UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales no Homogéneas por el Método de Runge Kutta Asistido con Matlab

TESIS

Para optar el título profesional de Licenciado (a) en Matemáticas

Autores:

Bach. Mat. **Carrasco Chávez Luis Angel**

Bach. Mat. **Heredia Tiparra Jesús Lucrecia**

Asesor:

M.Sc. Malca Villalobos Amado

LAMBAYEQUE – PERÚ

2020

UNIVERSIDAD NACIONAL" PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales no Homogéneas por el Método de Runge Kutta Asistido con Matlab

Bach. Mat. Carrasco Chávez Luis Angel
Autor

Bach. Mat. Heredia Tiparra Jesús Lucrecia
Autor

M. Sc. Malca Villalobos Amado
Asesor

Lambayeque – Perú
Octubre - 2020

UNIVERSIDAD NACIONAL" PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales no Homogéneas por el Método de Runge Kutta Asistido con Matlab"**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Carrasco Chávez Luis Angel y Heredia Tiparra Jesús Lucrecia, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de licenciado en matemáticas.

M.Sc. Peralta Lui Marco Antonio Martín

Presidente Jurado de Tesis

M.Sc. Estrada Huancas Miriam María

Secretario Jurado de Tesis

Lic. Mat. Cornetero Capitán Juan Antonio

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 03 de Febrero del 2020

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO
Ciudad Universitaria - Lambayeque

ACTA DE SUSTENTACIÓN N°011-2020-D/FACFyM

(Sustentación Autorizada por Resolución N° 073-2020-D/FACFyM)

En la ciudad de Lambayeque, siendo las 12:00 m del día 03 de febrero del 2020 se reunieron en Videoteca del Laboratorio de Física los miembros del Jurado designados mediante Resolución N°1598-2018-D/FACFyM, los docentes:

M.Sc. Marco Antonio Martín Peralta Lui	Presidente
M.Sc. Miriam María Estrada Huancas	Secretario
Lic. Mat. Juan Antonio Cornetero Capitán	Vocal

Para recibir la tesis titulada:
"Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales No Homogéneas por el Método de Runge Kutta Asistido con Matlab".

desarrollada por los Bachilleres en Matemáticas, **Carrasco Chávez Luis Angel y Heredia Tiparra Jesús Lucrecia.**

Después de escuchar la exposición y las respuestas a las preguntas formuladas por los miembros del Jurado, se acordó APROBAR el trabajo por UNANIMIDAD con el calificativo de BUENO

En consecuencia, los Bachilleres en referencia quedan aptos para recibir el Título Profesional de **Licenciado (a) en Matemáticas** de acuerdo a la Ley Universitaria, el Estatuto y Reglamento de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque.

Observaciones:

Para constancia del hecho firman.

M.Sc. Marco Antonio Martín Peralta Lui
Presidente

M.Sc. Miriam María Estrada Huancas
Secretario

Lic. Mat. Juan Antonio Cornetero Capitán
Vocal

CERTIFICO: Que, copia fiel del original
FECHA: 10 08 20
...ris Margarita Tejada Romero
SECRETARIO DOCENTE - FACFyM
...IDO PARA ASUNTOS INTERNOS DE LA UNPRG

Agradecimiento

A Dios, a mi compañera de tesis y a mi asesor M.Sc. Malca Villalobos Amado.

A mi papá Agapito Carrasco por brindarme su apoyo para seguir superándome cada día.

A mi esposa Patricia Cuipal mi motivo de inspiración en formar un futuro mejor junto a nuestros hijos.

A mis profesores a quienes les debo gran parte de mis conocimientos, gracias a su paciencia, enseñanza y formarnos como personas de bien.

Luis

Mi agradecimiento se dirige a quien ha forjado mi camino y me ha dirigido por el sendero correcto a Dios todo poderoso, sabemos que con él todo es posible.

Agradezco de todo corazón a mis queridos padres Raymundo y Myriam, a mis hermanos Carlos, Hebert ,Milagros y Ana que han sido mi fortaleza y siempre están conmigo ayudándome a aprender de mis errores y poder superarlos. Y a todos de una y otra forma por su apoyo incondicional que hacen posible dicho trabajo.

Jesús

Dedicatoria

Dedico este trabajo principalmente a Dios, por haberme dado la vida y permitirme llegar a mi formación profesional. A mis padres Agapito y Marleny, porque creyeron en mí y porque me sacaron adelante, dándome ejemplos dignos de superación y entrega. A mis hijos Nathaly y Sebastián, quienes son la razón de mi existir y poder seguir superándome cada día. A mis hermanos por haber fomentado en mí el deseo de superación.

Luis

Quiero dedicar esta tesis a mis padres Raymundo y Myriam porque ellos han dado la razón a mi vida, por sus sabios consejos, su apoyo incondicional y sobre todo por su paciencia; todo lo que soy es gracias a ellos.
A mi esposo Julio y a mis hijos Julissa, Ángel y Adriana que son lo mejor y más valioso que Dios me ha dado y todo lo que pueda conseguir es para ellos.

Jesús

Resumen

El objetivo de la presente investigación fue hallar la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas por el método de Runge-Kutta asistido con Matlab.

Se han desarrollado dos aplicaciones, la primera trata de un sistema de dos ecuaciones no homogéneas y la segunda sobre balance de masas en dos tanques la cual se construye el sistema no homogéneo, ambas aplicaciones son resueltas de manera detallada utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4, además la segunda aplicación de balance de masas nos permitió construir un sistema de ecuación diferencial ordinaria lineal no homogéneo con coeficientes constantes, lo cual se resolvió de forma analítica por el método de variación de parámetros y de forma numérica por el método de Runge-Kutta de orden 4, se compara los resultados de tal manera que de forma numérica se aproxima a la solución real con un mínimo margen de error.

Estos resultados son asistidos y comprobados mediante el software matemático Matlab, el cual resulta de manera sencilla resolver este tipo de sistemas de ecuaciones no homogéneas.

Palabras Clave: Sistema no homogéneo, método de Runge-Kutta de orden 4, software Matlab.

Abstract

The objective of the present investigation was to find the numerical solution of systems of non-homogeneous linear ordinary differential equations by the method of Runge-Kutta assisted with Matlab.

Two applications have been developed, the first deals with a system of two non-homogeneous equations and the second on mass balance in two tanks which builds the non-homogeneous system, both applications are solved in detail using the Runge-Kutta method of order 4, In addition, the second application of mass balance allowed us to build a non-homogeneous linear ordinary differential equation system with constant coefficients, which was solved analytically by the parameter variation method and numerically by the Runge-Kutta method of order 4, the results are compared in such a way that numerically approximates the real solution with a minimum margin of error.

These results are assisted and tested by Matlab mathematical software, which is easy to solve this type of systems of non-homogeneous equations.

Keywords: Non-homogeneous system, Runge-Kutta method of order 4, Matlab software.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales, ordinarias y parciales, aparecen en el diseño de modelos matemáticos de los fenómenos físicos, químicos, biológicos, etc.
Existen diferentes técnicas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas, sin embargo muchos de los problemas que se presentan en Ciencias e Ingeniería no se pueden resolver mediante estas técnicas.
La solución numérica de estos modelos matemáticos se recurre siempre que no sea posible obtener una solución exacta, ya que proporcionan valores numéricos de la solución con una aproximación adecuada, en un determinado conjunto de puntos.
Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos son de la forma

$$x' = Ax + b$$

Este modelo matemático es muy utilizado en la ingeniería donde su solución no es muy clara y en los libros solo muestran sus resultados sin detallarlos es por eso que nace nuestra inquietud de investigar sobre: ¿Cómo resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas por el método de Runge-Kutta asistido con Matlab?, lo cual tiene como objetivo hallar la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas por el método de Runge-Kutta asistido con Matlab.
La hipótesis a comprobar fue: Si se aplica el método iterativo de Runge-Kutta de cuarto orden asistido con Matlab a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas entonces se hallará su solución numérica más aproximada.
Mediante esta investigación nos ha permitido comprender de manera analítica y numérica el desarrollo de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, la cons-

trucción de un modelo matemático aplicado al balance de masas, detallamos el proceso del uso del software matemático Matlab.

El presente trabajo de investigación está estructurada de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se tiene los preliminares, el cual comienza con el uso del software matemático Matlab, matrices, balance de masas, sistema de ecuaciones diferenciales, variación de parámetros y la aplicación de manera analítica de balance de masas.

En el capítulo 2 se tiene Sistema de Ecuaciones Diferenciales ordinarias no Homogénea mediante el Método de Runge-Kutta, el cual comienza con el método de Runge Kutta, el método de Runge Kutta de Cuarto Orden, precisión del método de Runge-Kutta y el método de Runge-Kutta de Cuarto Orden para sistemas de ecuaciones no homogéneas.

En el capítulo 3 se tiene Aplicaciones: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales no Homogéneas por el Método de Runge Kutta Asistido con Matlab, el cual comienza con la aplicación 1 de manera detallada y la aplicación 2: Balance de Masas.

Finalmente se encuentran las conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y anexos.

Índice general

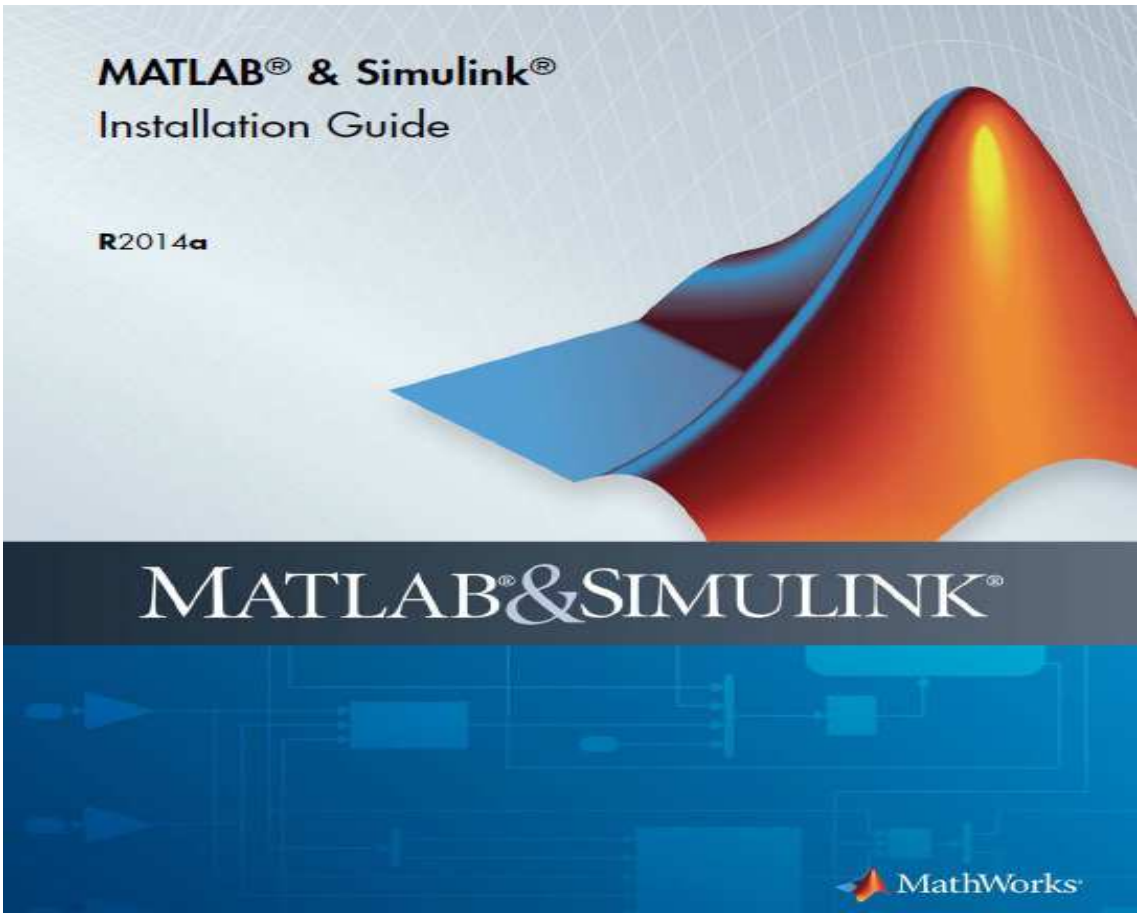
Capítulo 1

preliminares

1.1 Software Matlab 2014a

Sánchez, (2014). MATLAB es un lenguaje de alto desempeño diseñado para realizar cálculos técnicos. MATLAB integra el cálculo, la visualización y la programación en un ambiente fácil de utilizar donde los problemas y las soluciones se expresan en una notación matemática. MATLAB es un sistema interactivo cuyo elemento básico de datos es el arreglo que no requiere de dimensionamiento previo. El nombre abreviado de MATLAB es "MATrix LABoratory", es un programa para realizar cálculos numéricos con vectores y matrices. Como caso particular puede también trabajar con números escalares, tanto reales como complejos. Una de las capacidades más atractivas es la de realizar una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones. MATLAB tiene también un lenguaje de programación propio (lenguaje M).
Matlab se utiliza ampliamente en:

- Cálculos numéricos
- Desarrollo de algoritmos
- Modelado, simulación y prueba de prototipos
- Análisis de datos, exploración y visualización



- Graficación de datos con fines científicos o de ingeniería
- Desarrollo de aplicaciones que requieran de una interfaz gráfica de usuario (GUI, Graphical User Interface).

En el ámbito académico y de investigación, es la herramienta estándar para los cursos introductorios y avanzados de matemáticas, ingeniería e investigación. En la industria Matlab es la herramienta usada para el análisis, investigación y desarrollo de nuevos productos tecnológicos.

La ventaja principal de Matlab es el uso de familias de comandos de áreas específicas llamadas toolboxes. Lo más importante para los usuarios de Matlab es que los toolboxes le permiten aprender y aplicar la teoría. Los toolboxes son grupos de comandos de Matlab (archivos M) que extienden el ambiente de Matlab para resolver problemas de

áreas específicas de la ciencia e ingeniería. Por ejemplo, existen toolboxes para las áreas de Procesamiento Digital de Señales, Sistemas de Control, Redes Neuronales, Lógica Difusa, Wavelets, etc.

Requisitos del sistema operativo para la Instalación de Matlab

Visitando la página de Mathworks, empresa desarrolladora de Matlab, cuya sede central está situada en Natick, Massachusetts, Estados Unidos. Nos ofrece la siguiente información acerca de los requisitos del sistema y el ordenador para la correcta instalación de la version 2014a.

MATLAB Student, MATLAB and Simulink Student Suite — Release 2014a

Windows | Mac | Linux

32-Bit and 64-Bit MATLAB and Simulink Product Families

Operating Systems	Processors	Disk Space	RAM
Windows 8.1 Windows 8 Windows 7 Service Pack 1 Windows Vista Service Pack 2 Windows XP Service Pack 3 Windows XP x64 Edition Service Pack 2 Windows Server 2012 Windows Server 2008 R2 Service Pack 1 Windows Server 2008 Service Pack 2 Windows Server 2003 R2 Service Pack 2	Any Intel or AMD x86 processor supporting SSE2 instruction set*	1 GB for MATLAB only, 3–4 GB for a typical installation	1024 MB (At least 2048 MB recommended)

* Learn more about the SSE2 instruction set.

http://es.mathworks.com/support/sysreq/sv-r2014a/

1.1.1 La ventana de comando

Sanchez, (2014). La ventana de comando es la ventana principal, con la cual el usuario interactúa con Matlab. Es la primer ventana que se abre al ejecutar Matlab. Se utiliza para correr los comandos, correr el editor de archivos M (MEDIT, presente en la barra de herramientas), ejecutar los toolboxes, etc. En la figura (1.1) se muestra la ventana de comando de Matlab y algunas otras.

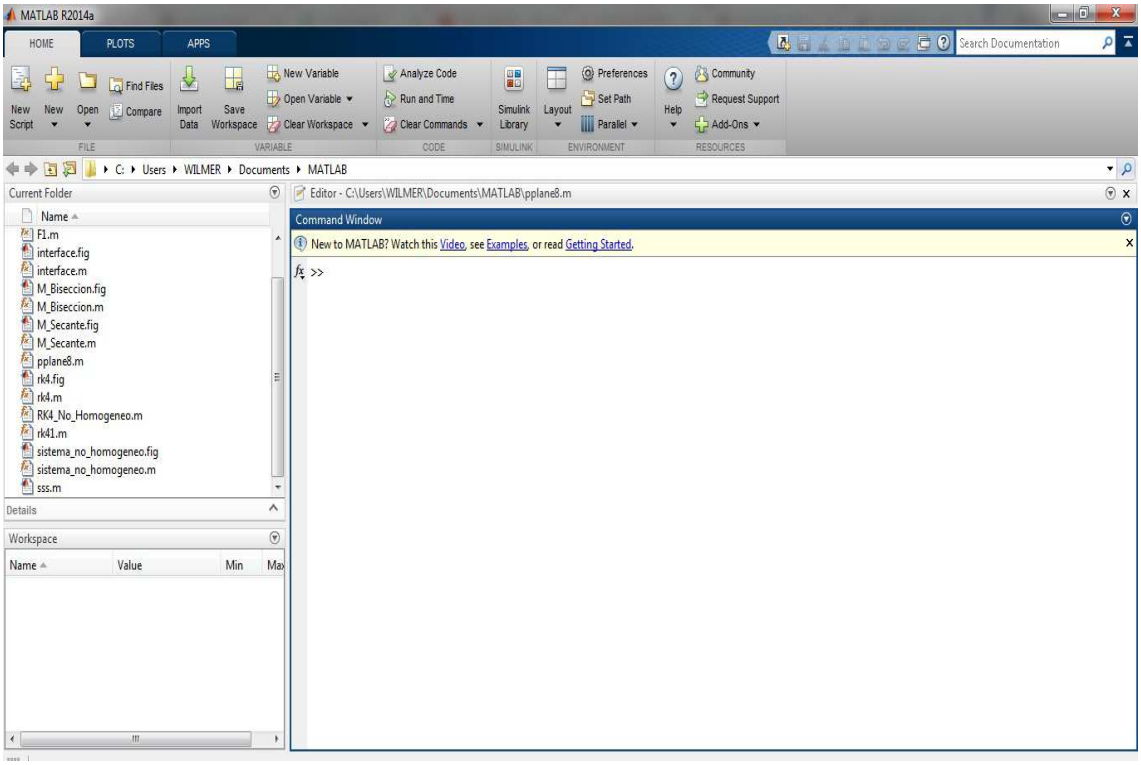


Figura 1.1: *La ventana principal de Matlab 2014a; a la derecha se muestra la ventana.*

1.1.2 Comandos principales

Alhiet, Cristian, & Alfonso, (2010). En la Tabla (1.1) se enlistan los comandos más comunes de la plataforma de simulación MATLAB. Dentro de estos comandos se encuentran aquellos que realizan búsquedas, la ayuda en línea, desplegar las variables presentes en el espacio de trabajo, entre otras.

Tabla 1.1: Comandos más comunes de MATLAB

Comando	**Función**
help	Ayuda en línea. Despliega líneas de texto en la ventana de comando conteniendo la descripción sobre un comando específico
helpwin	Despliega una ventana con la descripción específica de un comando y permite ver información sobre otros temas relacionados
lookfor	Busca en la ayuda de todos los comandos la clave espeficada
helpdesk	Realiza una búsqueda en hipertexto en un buscador Web proporcionando un acceso directo a toda la documentación: PDFs, información sobre la solución de problemas, etc
doc	Despliega en un buscador Web la página de referencia para el comando especificado, proporciona una descripción, referencias adicionales y ejemplos del comando especificado
figure	Crea una nueva gráfica
close	Cierra una gráfica
who	Despliega las variables presentes en el espacio de trabajo
whos	Despliega las variables presentes en el espacio de trabajo en extenso.
which	Indica la ruta en donde se encuentra la función especificada
cd	Cambia la ruta al subdirectorio superior
pwd	Despliega la ruta en donde se encuentra el directorio de trabajo actual

1. **Escalares, Vectores y Matrices**

   Alhiet, Cristian, & Alfonso, (2010). Enuncian que la mejor manera de familiarizarse con Matlab consiste en aprender a manejar las matrices en Matlab, una matriz es un arreglo rectangular de números. Las matrices de 1×1 se conocen como escalares, y las matrices con una sola columna o renglón se conocen como vectores. Estas matrices y/o vectores pueden contener datos tanto numéricos como no numéricos. Los datos pueden introducirse a Matlab de diferentes maneras:

   - Como una lista explícita de elementos
   - Cargando los datos de un archivo externo
   - Generados por otras funciones
   - Creados por archivos M creados por el usuario.

Tabla 1.2: Comandos que generan matrices básicas

Comando	**Función**
Zeros	Todos los elementos de la matriz son ceros
Ones	Todos los elementos de la matriz son unos
Rand	Genera una matriz con de elementos con distribución uniforme
Randn	Genera una matriz con elementos con distribución normal

2. **Operadores**

   Alhiet, Cristian, & Alfonso, (2010). Enuncian que las expresiones utilizan los operadores aritméticos comunes. Los operadores aritméticos son los mismos que en cualquier lenguaje de programación y se sigue un orden de evaluación similar al que se utiliza en los demás lenguajes de programación. En la Tabla (1.3) se muestran los operadores aritméticos más comunes en Matlab.

Tabla 1.3: Operadores aritméticos usados en Matlab

Operador	**Operación matemática**
+	Suma
-	Resta
*	Multiplicación
/	División
^	Potencia
'	Transpuesta compleja conjugada
( )	Especifica el orden de evaluación

3. **Funciones**

   Matlab proporciona un gran número de funciones matemáticas simples y avanzadas. La gran mayoría de estas funciones acepta argumentos complejos como se muestra enla Tabla (1.4)

Tabla 1.4: Funciones Matemáticas elementales

Función	**Descripción**
sqrt (x)	Raíz Cuadrada
exp (x)	Exponencial
abs (x)	Valor absoluto
log (x)	Logaritmo Natural
log10 (x)	Logaritmo en base 10
factorial (x)	Función factorial x!

4. **Comandos save y load**

   El comando **save** guarda una variable en un archivo binario de la siguiente forma:
   >> save nombrearchivo variable(s)

   Si no se especifica ninguna variable, guarda todas las variables presentes en el espacio de trabajo. El comando **save** crea un archivo en formato .mat.
   Por otra parte, el comando load carga un archivo en el espacio de trabajo actual de la siguiente forma:

```
>>load nombarch.dat
```

El archivo carga en el espacio de trabajo todas las variables presentes al momento de guardar el archivo. Este comando también puede cargar archivos de texto que contengan números (números en código ASCII, con extensión .dat)

5. **Graficación en Matlab y generación de secuencias discretas**
   Alhiet, Cristian, & Alfonso, (2010). Enuncian que Matlab grafica directamente en una ventana diferente a la ventana de comando. Dentro de Matlab a esta ventana se le conoce como figura (figure). Las funciones de graficación automáticamente crean una nueva ventana si no existe ninguna previa, de lo contrario, la ventana designada como ventana actual es usada por Matlab para generar la nueva gráfica, borrando así la anterior. Generalmente la ventana actual es la última ventana a la cual se le hizo clic con el ratón. Para referirse a una ventana generada anteriormente solo es necesario teclear figure(x), donde x representa el número de identificación de la ventana presente en la parte superior de la misma. En la Tabla (1.5) se enlistan los comandos básicos de graficación.

Tabla 1.5: Comandos para graficar funciones

Comando	**Función**
Plot	Crea una gráfica bidimensional continua con escala lineal en ambos ejes
Stem	Crea una gráfica bidimensional muestreada con escala lineal en ambos ejes
plot3	Crea una gráfica tridimensional análoga a plot
stem3	Crea una gráfica tridimensional análoga a stem
Loglog	Crea una gráfica bidimensional continua con escalas logarítmicas en ambos ejes
Semilogx	Crea una gráfica bidimensional continua con escala logarítmica en el eje x y escala lineal en el eje y
Semilogy	Crea una gráfica bidimensional continua con escala logarítmica en el eje y y escala lineal en el eje x

1.2 Matrices

Santamaría, & Ramírez, (2015).

Definición 1.1. Una matriz $A_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ es un arreglo rectangular de **m x n** números dispuestos en m filas (renglones) y n columnas. El orden de una matriz también se denomina dimensión o tamaño, siendo **m** y **n** números naturales.
Las matrices se denotan con letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots$ y los elementos de las matrices con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado:

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21} \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$. Un elemento genérico que ocupe la fila "i" y la columna "j" se escribe a_{ij} . Si el elemento genérico aparece entre paréntesis también representa a toda la matriz: $A = \Big(a_{ij}\Big)_{m\times n}$. (Santamaría & Ramirez, 2015)

Así tenemos:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \Big(a_{ij}\Big)_{m\times n}$$

1. <u>**Igualdad de matrices**</u>
   Se dice que dos matrices $A = \Big(a_{ij}\Big)_{m\times n}$ y $B = \Big(b_{ij}\Big)_{m\times n}$ son iguales si y solo si son idénticas; es decir, si y solo si son del mismo orden y sus respectivos elementos son iguales: $A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y para cada j.

1.2.1 Matrices Especiales

Santamaría, & Ramírez, (2015).

1. **Matrices positivas**

   Proposición 1.1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz positiva. Entonces*

   a) *$det(A) > 0$*

   b) *A es invertible*

   c) *A es simétrica y por lo tanto diagonalizable por medio de una matriz ortogonal.*

   d) *A^{-1} es también positiva.*

   e) *A^T es también positiva*

   f) *Para cada $1 \leq k \leq n$, A_k es también positiva*

   - **Matriz simétrica positiva**

     Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

     La matriz A es simétrica si $A = A^T$

     La matriz A es definida positiva si para todo $X \neq 0$ se tiene que

     $$X^T A X > 0$$

     Notación: Con $A > 0$ indicamos que la matriz es definida positiva.

     Decimos que H es una submatriz principal de A si es una submatriz cuadrada formada con las entradas alrededor de la diagonal principal

     $$H = A(j : k, j : k)$$

     Proposición 1.2.

     a) *Sea X no singular. A es simétrica positiva si y sólo si $X^T A X$ es simétrica positiva*

b) *Si A es simétrica positiva y H es cualquier submatriz principal de A, entonces H es simétrica positiva.*

c) *A es simétrica positiva si y sólo si A es simétrica y todos sus eigenvalores son positivos.*

d) *A es simétrica positiva si y sólo si existe una única matriz triangular inferior no singular L, con entradas positivas en la diagonal, tal que $A = LL^T$.*

2. **Matriz Cuadrada**

   Se dice que una matriz A es cuadrada cuando el número de filas es igual al número de columnas. A_{mxn} es cuadrada si y sólo si $m = n$, en este caso se dice que A es de orden $(n \times n)$ y se representa por A_n.

   En una matriz cuadrada A de orden $(n \times n)$, los elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$, forman la diagonal principal de la matriz.
   Denotaremos el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n por M_n .

3. **Matriz Nula**

   Una matriz en la cual todos sus elementos son ceros, se denomina matriz nula y se denota por $\theta_{m \times n}$.

4. **Matriz Diagonal**

   Una matriz cuadrada $A = \left(a_{ij}\right)$, es diagonal si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$ y
   $\exists i, a_{ii} \neq 0,\ 1 \leq i \leq n$.
   Es decir, si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son ceros y si por lo menos un elemento de la diagonal principal es diferente de cero.

5. **Matriz Escalar**

   Es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

6. **Matriz Identidad**

   La matriz cuadrada I_n es una matriz diagonal, si y solo si

$a_{ij} = 0; \quad \forall i \neq j \ \wedge \quad a_{ii} = 1; \quad \forall i = j$;

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, etc.$$

Se acostumbra denotar a la matriz identidad de orden $n \times n$ por I_n.

7. **Matriz Fila**

   Se llama matriz fila a una matriz de orden $1 \times n$ (1 fila y n columnas) de la forma: $A = [a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n}]$

8. **Matriz Columna**

   Se llama matriz columna a una matriz de orden $n \times 1$, (n filas y 1 columna), de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$$

9. **Transpuesta**

   Dada una matriz A, se llama transpuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^t ó A^T. Si es $A = (a_{ij})_{mxn}$, su transpuesta es $A^t = (a_{ji})_{nxm}$

10. **Matriz triangular**

    a) **Matriz Triangular Superior**

    La matriz cuadrada A_n es triangular superior si $a_{ij} = 0, \quad \forall i > j$

    Ejemplo 1.1.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

b) **Matriz Triangular Inferior**

La matriz cuadrada A_n es triangular inferior si $a_{ij} = 0, \quad \forall i < j$

Ejemplo 1.2.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

11. **Matriz Ortogonal**

Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible: $A^{-1} = A^T$ es decir la inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal. El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal. El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1. $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. **Matriz Inversa**

Decimos que una matriz cuadrada A tiene inversa,A^{-1} , si se verifica que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad su \;\; inversa \;\; es \;\; A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

13. **Matriz Tridiagonal**

Una matriz tridiagonal es una matriz "casi"diagonal. De un modo más exacto, una matriz tridiagonal es una matriz cuadrada que tiene elementos distintos a cero solo en la diagonal principal, la primera diagonal sobre ésta, y la primera diagonal bajo

la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

14. **Matriz Regular** Decimos que una matriz cuadrada es "regular"si su determinante es distinto de cero, y es "singular"si su determinante es igual a cero.

$$\mid A \mid \neq 0 \Longrightarrow Matriz \quad Regular$$

$$\mid A \mid = 0 \Longrightarrow Matriz \quad Singular$$

15. **Matriz de Diagonal Dominante**
Una matriz cuadrada de orden "n",$A = \left(a_{ij}\right)$ donde , se dice que es una matriz de diagonal dominante si $\mid a_{ii} \mid > \sum_{k=1k\neq i}^{n} \mid a_{ik} \mid \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

1.2.2 Operaciones y Propiedades

Santamaría & Ramirez, (2015). Definen lo siguiente:

1. **Suma de matrices**

   Sean las matrices: $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, ambas del mismo orden $m \times n$. La matriz suma de A y B es:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

   la cual también es de orden $m \times n$.

   Observación 1.1. En otras palabras, para sumar matrices, lo que se hace es sumar los elementos que están situados en la misma fila y en la misma columna.[2]

Propiedad 1.1. Sean A, B y C matrices de dimensiones iguales.

a) A + B = B + A

b) (A + B) + C = A + (B + C)

c) k (A + B) = k A + k B (k : escalar)

d) (k+ l) A = k A + l A (k , l : escalares)

e) (k l) A = k (l A) (k , l : escalares)

f) 1A = A

g) -A = (-1) A

h) La diferencia de A y B, del mismo orden, es definida por: A - B = A + (-B)

2. **Multiplicación de una Matriz por un Escalar**

Sea $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times n$ y k un número real. Entonces: $kA = [ka_{ij}]$ para todo i, j.

Nota 1.1. Observar que cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar k.

3. **Producto de un Vector Fila por un Vector Columna**

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Entonces $AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ es el producto de A por B.

Al número $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ se le conoce como producto escalar de A y B.

Nota 1.2. . Observar que ambas matrices tienen la misma cantidad de elementos (la matriz A tiene n elementos columna y la matriz B tiene n elementos fila)

4. **Producto de dos Matrices**

El producto de una matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$ y una matriz $B = [b_{ik}]$ de $n \times p$, es otra matriz $C = [c_{ik}]$de orden $m \times p$, donde c_{ik} es el producto escalar de la $i-$ésima fila de A por la $k-$ésima columna de B. Gráficamente podemos observar lo siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{Fila i de la matriz A} \Rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ik} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots & b_{np} \end{array}\right] = C = [C_{ik}]$$

$$\begin{array}{c} \Uparrow \\ \text{Columna k} \\ \text{de la matriz B} \end{array}$$

Donde:

$$C_{ik} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{ik} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

5. **Propiedades**

Sean A, B y C matrices de dimensiones iguales.

a) A(BC)=(AB)C

b) (A+B)C=AC+BC

c) A(B+C)=AB+AC

d) En general, no se cumple que $AB = BA$. (No conmutan).

1.2.3 Determinantes

Santamaría & Ramirez, (2015). Definen lo siguiente:

Definición 1.2. El determinante viene a ser una función que aplicada a una matriz cuadrada da un único valor numérico.
Sea $M_{n\times n}$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n, entonces la definición queda de la siguiente manera:

$$det : M_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}(o\ \ \mathbb{C})$$

$$A \longrightarrow\ det(A)$$

Notación:
Sea A una matriz cuadrada, entonces el determinante de la matriz A se representa por $\mid A \mid$ o $det(A)$ o $det\ A$.

1. **<u>Determinante de una matriz cuadrada de orden 2</u>**

   Sea A una matriz cuadrada de orden 2

   $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

   Su determinante se define mediante la fórmula:

   $$\mid A \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. **<u>Determinante de una matriz cuadrada de orden 3</u>** Sea A una matriz cuadrada de orden 3

   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Su determinante se define mediante la fórmula:

$$| A |= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

3. **Cálculo del determinante de orden n, por los adjuntos**

   Cuando el orden de los determinantes es superior a 3 la regla de Sarrus no es fácilmente aplicable y entonces utilizamos el método de los adjuntos, que reduce el orden en una unidad cada vez que le utilizamos. Para ello vamos a definir dos nuevos conceptos:

4. **Menor complementario**

   Dada una matriz A_n se llama menor complementario de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz, que resulta de suprimir la fila i y la columna j en la matriz A_n: se llama m_{ij}.

   Ejemplo 1.3. Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Para obtener el menor complementario de 1, eliminamos la fila y la columna donde se encuentra el 1:

$$\text{Menor complemento de } 1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5. **Adjunto de un elemento** Al producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario m_{ij} de a_{ij} se llama adjunto de un elemento a_{ij} y se escribe A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

   A partir de estas definiciones obtenemos otra forma de calcular un determinante: el valor de un determinante de orden n es igual a la suma de los productos de los

elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos.

$$\begin{aligned} \mid A \mid \quad &= \sum_{ioj}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &\qquad + a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$

Propiedades

1. Para toda matriz $A_{n\times n}$ se tiene $detA = det(A^t)$.
2. El determinante de una matriz $A_{n\times n}$ cambia de signo si dos filas o dos columnas se intercambian.
3. Si la matriz $B_{n\times n}$ se obtiene de la matriz $A_{n\times n}$ trasladando una de sus filas o columnas k lugares, entonces, $\mid B \mid = (-1)^k \mid A \mid$.
4. Si una matriz $A_{n\times n}$ se tiene que una fila o columna es múltiplo de otra fila o columna, entonces el determinante de dicha matriz vale CERO.
5. Si en una matriz $A_{n\times n}$ todos los elementos de una matriz fila o columna son CEROS entonces su determinante es CERO.
6. Si a una fila o una columna de una matriz $A_{n\times n}$ se le suma el múltiplo de otra fila o columna, se tendrá que el valor del determinante $A_{n\times n}$ no varía.
7. El determinante de la matriz identidad es igual a la unidad.
8. Sea $D = [d_{ij}]$ una matriz diagonal de orden $n \times n$, entonces
   $\mid D \mid = d_{11} \cdot d_{22} \cdot \cdot d_{33} \cdot \cdots d_{nn}$
9. El determinante de una matriz triangular superior o triangular inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
10. En forma general el determinante de una suma de matrices es diferente de la suma de los determinantes de cada matriz, es decir:
    $det(A + B) = det(A) + det(B)$
11. Sean A y B dos matrices cuadradas. Entonces $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

1.3 Balance de Masas

Olivares, (2016). Enuncia que el concepto de continuidad o de conservación de masa es uno de los más fundamentales en ingeniería. Básicamente este concepto establece que para un sistema real en el cual no existe almacenamiento, la masa de las sustancias que entran debe ser igual a la masa de las sustancias que salen de él. En forma muy simple este concepto se puede escribir como:

$$Entradas = Salidas \tag{1.1}$$

Si el material se acumula dentro del sistema tenemos que:

$$\text{Variación} = Entradas - Salidas \tag{1.2}$$

Lo cual el modelo matemático se representa de la siguiente manera:

$$\frac{dCV}{dt} = \dot{m}_e - \dot{m}_s \tag{1.3}$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{1}{V}\dot{m}_{ent} - \frac{1}{V}\dot{m}_{sal} \tag{1.4}$$

Además:

$$\dot{m}_e = \sum_{i=1}^{N} Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i} \tag{1.5}$$

y

$$\dot{m}_{sal} = \sum_{j=1}^{M} Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j} \tag{1.6}$$

Donde:

Q: Representa el flujo volumétrico ($\frac{l}{min}$)

C: Representa la concentración de algún componente (tanques) ($\frac{g}{l}$)

1.3.1 Balance másico para sustancias conservativas

Olivares, (2016). Supongamos un sistema que intercambia masa con su entorno, tal como se indica en la Figura (1.2). En esta figura las variables Q representan flujos volumétricos (L^3/T) que entran o salen del sistema, mientras que C corresponde a la concentración (M/L^3) de algún componente de interés. Para un componente conservativo (es decir que no sufre ningún tipo de reacción química o degradación), es posible escribir la siguiente ecuación diferencial basada en la conservación de masa:

$$\frac{d}{dt}(V \cdot C_{sis}) = \sum_{i=1}^{N} Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i} - \sum_{j=1}^{M} Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j} \tag{1.7}$$

Los subíndices "ent" y "sal"se refieren a las entradas y salidas desde el sistema, respectivamente, mientras que el subíndice "sis" indica la concentración al interior del sistema. El volumen V representa al sistema en estudio.

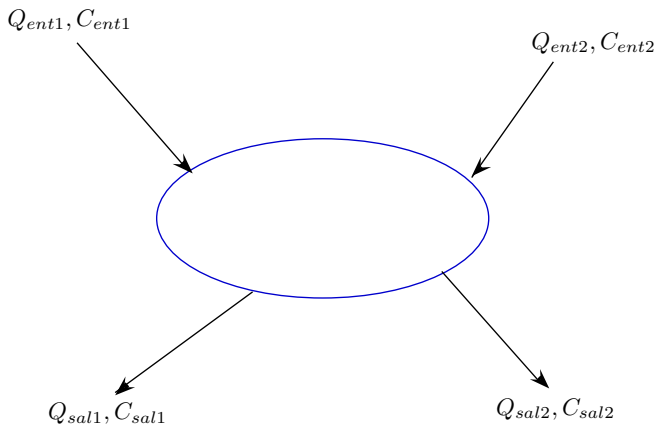


Figura 1.2: *Esquemas para balances de masa*

Si consideramos que el volumen al interior de este sistema se mantiene constante, la ecuación anterior se puede escribir en forma más compacta como:

$$\frac{dC_{sis}}{dt} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i} - \frac{1}{V}\sum_{j=1}^{M} Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j} \tag{1.8}$$

Para condiciones estacionarias o de régimen permanente la derivada temporal en la ecuación (1.8) es igual a cero y todos los valores de Q y C son constantes. De esta manera, se puede obtener la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{N} Q_{ent,i} \cdot C_{ent,i} = \sum_{j=1}^{M} Q_{sal,j} \cdot C_{sal,j} \tag{1.9}$$

1.3.2 Balance Volumétrico

Olivares, (2016). Enuncian otra ecuación importante resulta si consideramos que en la ecuación (1.7), la concentración C se refiere más bien a la densidad del fluido. De esta manera, la ecuación (1.7) se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}(V \cdot \rho_{sis}) = \sum_{i=1}^{N} Q_{ent,i} \cdot \rho_{ent,i} - \sum_{j=1}^{M} Q_{sal,j} \cdot \rho_{sal,j} \tag{1.10}$$

Esta ecuación se puede extender en su lado izquierdo:

$$V \cdot \frac{d\rho_{sis}}{dt} + \rho_{sis} \cdot \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{N} Q_{ent,i} \cdot \rho_{ent,i} - \sum_{j=1}^{M} Q_{sal,j} \cdot \rho_{sal,j} \tag{1.11}$$

Si la densidad es constante (fluido incompresible) se obtiene la ecuación de balance volumétrico:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{N} Q_{ent,i} - \sum_{j=1}^{M} Q_{sal,j} \tag{1.12}$$

Finalmente, si la densidad y el volumen son constantes se obtiene la ecuación de continuidad de la hidráulica fundamental:

$$\sum_{i=1}^{N} Q_{ent,i} = \sum_{j=1}^{M} Q_{sal,j} \tag{1.13}$$

1.4 Sistema de Ecuaciones Diferenciales

Zill, (1998). Menciona que un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de ecuaciones diferenciales que contienen varias funciones incógnitas y sus derivadas. Los sistemas de ecuaciones diferenciales juegan un rol esencial en la descripción matemática de fenómenos físicos, ya que en general no resulta fácil hallar leyes que vinculen directamente las magnitudes que caracterizan dichos fenómenos, aunque si es posible en muchos casos determinar la dependencia entre esas magnitudes y sus derivadas. Esto dará origen, en general, a un sistema de ecuaciones diferenciales, que determinaría la evolución del sistema físico.

Dado el siguiente sistema de n ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots &= \vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ & \text{Condiciones iniciales} \\ & x_i(0) = x_0^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.14}$$

para $a \leq t \leq b$

La ecuación (3.1) puede escribirse en forma de vector de la siguiente manera:

$$x' = f(t, x) \tag{1.15}$$

Donde:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Una solución de este sistema es un vector $X(t)$ de n componentes $x_i(t),\ i = 1, \ldots, n$, que satisface la ecuación anterior en algún intervalo de t ($t \in I \subset \mathbb{R}$).

1.4.1 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden

Zill, (1998). Menciona que dado el siguiente sistema (3.1) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots, a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots, a_{2n}x_n \\ \vdots &= \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots, a_{nn}x_n \\ & \text{Condiciones iniciales} \\ & x_i(0) = x_0^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.16}$$

para $a \leq t \leq b$

Nótese que el sistema es lineal y puede tomar la forma siguiente:

$$x' = Ax \tag{1.17}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es una matriz constante.

Definición 1.3. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n vectores solución linealmente independiente del sistema homogéneo (1.17), entonces la matriz fundamental formada por los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es la matriz cuyas columnas son los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir

$$x = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n) \tag{1.18}$$

Definición 1.4. La matriz fundamental tiene tres propiedades básicas:

1. La matriz fundamental es no singular, es decir, siempre es invertible.

2. La derivada de la matriz fundamental (que se realiza derivando individualmente las componentes de la matriz) cumple

$$x'(t) = A(t)x(t) \tag{1.19}$$

3. La solución general del sistema homogéneo puede escribirse como

$$x_h(t) = e^{\lambda t}v \tag{1.20}$$

donde λ es un número real o complejo y v un vector independiente del tiempo. O de la forma

$$x_h(t) = xc \tag{1.21}$$

donde c es un vector de constantes

Esta ecuación (1.17) se va a resolver en forma matricial como se muestra a continuación. De la ecuación (1.20) se tiene

$$x = e^{\lambda t}v \tag{1.22}$$

donde se toma v constante. Derivando se tiene

$$x' = \lambda e^{\lambda t}v \tag{1.23}$$

y sustituyendo en (1.17) se tiene

$$\lambda e^{\lambda t}v = Ae^{\lambda t}v \tag{1.24}$$

por lo tanto, λ debe cumplir la ecuación

$$\lambda v = Av \tag{1.25}$$

es decir, λ debe ser un valor propio de A y v un vector propio de A. es necesario considerar valores propios tantos reales como complejos de la matriz A.

Para hallar los valores propios de la matriz A se hallan las raíces del polinomio característico de A, es decir, se resuelve la ecuación

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{1.26}$$

Luego los vectores propios se hallan resolviendo el sistema homogéneo

$$(A - \lambda I)v = 0 \tag{1.27}$$

Si v es un vector propio con valor propio λ entonces

$$x = e^{\lambda t} v$$

es una solución del sistema (1.17)

Definición 1.5. Suponga que se tiene el sistema lineal homogéneo

$$x' = Ax$$

Si la matriz $n \times n$ A posee únicamente valores propios reales y posee n vectores linealmente independientes $v_1, \ldots, v_n$ que corresponden a los valores propios (no necesariamente distintos) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ entonces la solución general del sistema homogéneo anterior es

$$x_h = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \tag{1.28}$$

Definición 1.6. Para hallar la solución correspondiente a un valor propio $\lambda = a + ib$ de la matriz A con vector propio v se toma la parte real e imaginaria de la solución compleja, es decir, se toma

$$c_1 Re(e^{(a+bi)t} v) + c_2 Im(e^{(a+bi)t} v) \tag{1.29}$$

1.4.2 Exponencial de una matriz

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, (s.f.). Define:

Definición 1.7. La solución del problema de valor inicial

$$x'(t) = Ax \quad x(0) = x_0 \tag{1.30}$$

tiene por solución

$$x(t) = e^{tA}x_0 \tag{1.31}$$

Definición 1.8. Si A es una matriz cuadrada, siempre tiene sentido multiplicar la matriz consigo misma, es decir, formar las matrices $A,\ A^2,\ \ldots, A^n$. Ahora bien, la exponencial de un número viene dada por el desarrollo de Taylor

$$e^{ta} = 1 + (ta) + \frac{(ta)^2}{2} + \ldots + = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ta)^n}{n!} \tag{1.32}$$

por lo tanto, tiene sentido definir la matriz exponencial como su serie de Taylor

$$e^{ta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n a^n}{n!} \tag{1.33}$$

Definición 1.9. Si A es una matriz $n \times n$ su matriz exponencial e^A se define como

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \tag{1.34}$$

Propiedad 1.2.

1. $e^{0_n} = 1_n$ donde 0_n es la matriz nula e 1_n la matriz identidad
2. La matriz exponencial conmuta con la matriz que la genera, es decir, $Ae^A = e^A A$
3. Si dos matrices conmutan, es decir, $AB = BA$ entonces $e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$
4. Si A es la matriz diagonal $A = diag(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, es decir, los elementos sobre la diagonal son $d_1, d_2, \ldots, d_n$ entonces la matriz exponencial es diagonal y nada más la exponencial de los elementos individuales sobre la diagonal, es decir,

$$e^A = diag(e^{d_1}, e^{d_2}, \ldots, e^{d_n})$$

1.4.3 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Primer Orden no Homogéneo

Zill, (1998). Menciona que dado el siguiente sistema (3.1) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots, a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots, a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \vdots &= \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots, a_{nn}x_n + b_n(t) \\ & \text{Condiciones iniciales} \\ & x_i(0) = x_0^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{1.35}$$

para $a \leq t \leq b$

Nótese que el sistema es lineal y puede tomar la forma siguiente:

$$x' = Ax + b \tag{1.36}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

El siguiente resultado es la base para encontrar todas las soluciones del sistema (1.36)

Teorema 1.1. *Sea x_h la solución general del sistema homogéneo $x' = Ax$ y sea x_p una solución particular del sistema no homogéneo (1.36). Entonces la solución general del sistema (1.36) es de la forma*

$$x = x_h + x_p \tag{1.37}$$

Demostración.

Desde luego si $x = x_h + x_p$ entonces x es solución de (1.36).

En efecto

$$\begin{aligned} x' &= x_h' + x_p' \\ &= Ax_h + Ax_p + b \\ &= A(x_h + x_p) + b \\ &= Ax + b \end{aligned}$$

Así pues todas las funciones vectoriales de la forma $x = x_h + x_p$ son solución del sistema no homogéneo. Veamos que no hay más; es decir, que cualquier solución es de esta forma. Sea x una solución cualquiera del sistema (1.36) y x_p una solución particular del mismo. Entonces

$$\begin{aligned} x' - x_p' &= Ax + b - Ax_p - b \\ &= A(x - x_p) \end{aligned}$$

de modo que $x - x_p$ es una solución del sistema homogéneo $x' = Ax$.

Sea, ahora,

$$x = (x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n)$$

una matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo $x' = Ax$; es decir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forman un sistema fundamental de soluciones de $x' = Ax$. Como $x - x_p$ es una solución del sistema homogéneo $x' = Ax$, debe poder escribirse como una combinación lineal de las columnas de x:

$$x - x_p = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

para algunas constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Por lo tanto

$$x = x_p + c_1x_1 + c_2x_2$$

Esto significa que cualquier solución del sistema no homogéneo es suma de una solución particular de éste y de una solución del sistema homogéneo. Y esto es lo que se quería demostrar $\square$

1.4.4 Variación de Parámetros

Sistemas no homogéneos y Aplicaciones, (s.f.). Enuncia que la solución general del sistema homogéneo $x' = Ax$ se puede escribir como la ecuación (1.21) de la siguiente forma

$$x_h = xc$$

donde x es una matriz fundamental de soluciones y c un vector arbitrario de números reales constantes. El método de variación de parámetro consiste en buscar una solución particular del sistema no homogéneo $x' = Ax + b$ de la forma

$$x_p = xc(t) \tag{1.38}$$

donde se ha sustituído el vector de constantes c por un vector de funciones $c(t)$ que se trata de determinar para que x_p sea solución del sistema no homogéneo. En lo que sigue haremos las operaciones necesarias para dar una expresión lo más explícita posible de $c(t)$ y, a partir de ella, de x.

Antes de proceder debemos recordar que, como x es una matriz fundamental de soluciones, es invertible para todo t en el que A es continua y $x' = Ax$. Ahora, lo que queremos es que el vector

$$x_p = c_1(t)x_1 + c_2(t)x_2 + \ldots + c_n(t)x_n = xc(t) \tag{1.39}$$

sea una solución del sistema (1.36); i.e. del sistema $x' = Ax + b$. Ahora bien, para que el vector x_p sea una solución de (1.36) debe suceder que

$$x_p' = Ax_p + b \tag{1.40}$$

Pero para derivar un producto de matrices de funciones se procede como para derivar un producto de funciones (respetando el orden de multiplicación). Como por (1.39) $x_p = xc(t)$:

$$x_p' = x'c(t) + xc'(t)$$

y como $x' = Ax$, se tiene que

$$x_p' = Axc(t) + xc'(t)$$

Sustituyendo en (1.40) obtenemos

$$Axc(t) + xc'(t) = Ax_p + b = Axc(t) + b$$

Por lo tanto, para que x_p dado por (1.39) sea una solución particular del sistema no homogéneo (1.36) basta que

$$xc'(t) = b \tag{1.41}$$

Este es un sistema lineal de ecuaciones cuyos coeficientes e incógnitas son funciones, pero como la matriz de los coeficientes x es una matriz invertible siempre tiene solución:

$$c'(t) = x^{-1}b$$

Ahora basta integrar para calcular $c(t)$:

$$c(t) = \int x^{-1}b \; dt$$

Ahora sólo tenemos que sustituir en (1.38) para encontrar una expresión de una solución particular de la ecuación no homogénea:

$$x_p = xc = x\Big(\int x^{-1}b \; dt\Big) \tag{1.42}$$

Una vez obtenida la expresión para x_p, de acuerdo con el Teorema (1.1), la solución general del sistema no homogéneo será

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= x(t)c(t) + x(t)\Big(\int x^{-1}(t)b(t) \; dt\Big) \end{aligned} \tag{1.43}$$

Nótese que $x^{-1}(t)b(t)$ y $\int x^{-1}(t)b(t) \; dt$ son vectores cuyas componentes se obtienen al integrar las componentes de $x^{-1}(t)b(t)$.

Ejemplo 1.4. Dos tanques están conectados como se muestra en la Figura (1.3). Inicialmente en el depósito B hay 1 kg. de sal disuelto y en el tanque A sólo hay agua. En

ese mismo instante se comienza a bombear una disolución de agua y sal con un caudal de $4\frac{l}{min.}$ y una concentración de 30 $\frac{g}{l}$ al tanque A. La disolución circula entre los tanques y hacia el exterior de acuerdo a los datos de la Figura (1.3), y se supone que se encuentra uniformemente distribuida.

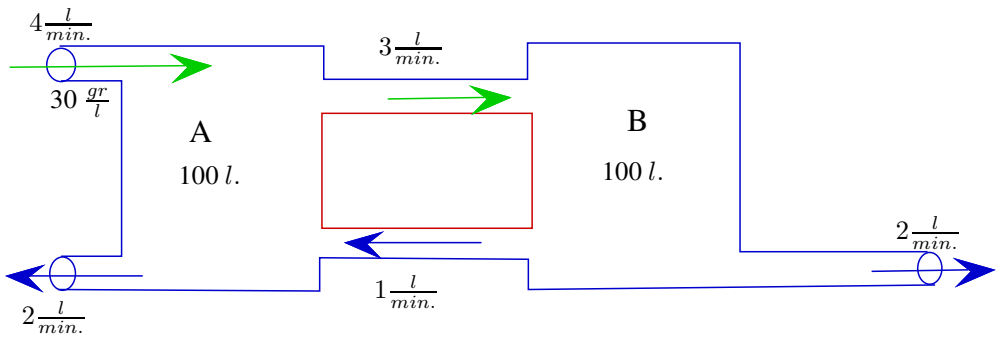


Figura 1.3: *2 tanques conectados con entrada y salidas*

Donde:

Flecha verde: Indica entrada de concentración.

Fecha Azul: Indica Salida de concentración.

Hallar la concentración de sal en cada tanque en cualquier instante.

Solución

El análisis de esta aplicación se encuentra detallada en la aplicación 2 del capítulo 3, solo tomaremos en cuenta el sistema no homogéneo como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} c_A' &= -\dfrac{5}{100}c_A + \dfrac{1}{100}c_B + \dfrac{120}{100} \\ c_B' &= \dfrac{3}{100}c_A - \dfrac{3}{100}c_B \end{cases}$$

con una condición inicial: $c_A(0) = 0$, $c_B(0) = 10$.

En forma matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} c'_A \\ c'_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Primero se halla la solución general del sistema homegéneo, donde la matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{pmatrix}$$

Calculamos los valores propios de A utilizando la ecuación (1.26)

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{pmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{5}{100} - \lambda & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Big(-\frac{5}{100} - \lambda\Big)\Big(-\frac{3}{100} - \lambda\Big) - \Big(\frac{3}{100}\Big)\Big(\frac{1}{100}\Big) = 0$$

$$\frac{15}{10000} + \frac{5\lambda}{100} + \frac{3\lambda}{100} + \lambda^2 - \frac{3}{10000} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{8\lambda}{100} + \frac{12}{10000} = 0$$

$$\Big(\lambda + \frac{2}{100}\Big)\Big(\lambda + \frac{6}{100}\Big) = 0$$

Así pues, los valores propios de A son $\lambda_1 = -\frac{2}{100}$ y $\lambda_2 = -\frac{6}{100}$.

Calculamos un vector propio para cada valor propio mediante la ecuación (1.27)

$$(A - \lambda I)v = 0$$

Para $\lambda_1 = -\dfrac{2}{100}$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{100} - \left(-\dfrac{2}{100}\right) & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} - \left(-\dfrac{2}{100}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{100} + \dfrac{2}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} + \dfrac{2}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{3}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{1}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{100}v_1 + \dfrac{1}{100}v_2 = 0 \\ \dfrac{3}{100}v_1 - \dfrac{1}{100}v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{100}v_2 = \dfrac{3}{100}v_1 \\ \dfrac{3}{100}v_1 = \dfrac{1}{100}v_2 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = 3v_1$$

Escogiendo $v_1 = 1$, un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = -\dfrac{2}{100}$ es $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Y la solución correspondiente

$$x_h^1(t) = e^{\lambda_1 t} u_1 = e^{-\frac{2}{100}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{100}t} \\ 3e^{-\frac{2}{100}t} \end{pmatrix}$$

Procedemos de la misma forma con $\lambda_2 = -\dfrac{6}{100}$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{100} - \left(-\dfrac{6}{100}\right) & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} - \left(-\dfrac{6}{100}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{100} + \dfrac{6}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} + \dfrac{6}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & \dfrac{3}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{100}v_1 + \dfrac{1}{100}v_2 = 0 \\ \dfrac{3}{100}v_1 + \dfrac{3}{100}v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{100}v_2 = -\dfrac{1}{100}v_1 \\ -\dfrac{3}{100}v_1 = \dfrac{3}{100}v_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow v_2 = -v_1$$

Escogiendo $v_1 = 1$, un vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = -\dfrac{6}{100}$ es $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Y la solución correspondiente

$$x_h^2(t) = e^{\lambda_2 t}u_2 = e^{-\frac{6}{100}t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{6}{100}t} \\ -e^{-\frac{6}{100}t} \end{pmatrix}$$

La solución general del sistema homogéneo será:

$$x_h(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-\frac{2}{100}t} + c_2 e^{-\frac{6}{100}t} \\ 3c_1 e^{-\frac{2}{100}t} - c_2 e^{-\frac{6}{100}t} \end{pmatrix}$$

$$x_h(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{100}t} & e^{-\frac{6}{100}t} \\ 3e^{-\frac{2}{100}t} & -e^{-\frac{6}{100}t} \end{pmatrix}}_{x(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{c}$$

Con c_1 y c_2 constantes arbitrarias.

Calculamos una solución del sistema no homogéneo por el método de variación parámetros. Se tiene de la ecuación (1.39)

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

siendo $c_1(t)$ y $c_2(t)$ las funciones que se obtienen integrando las soluciones del siguiente sistema de la ecuación (1.41)

$$xc'(t) = b$$

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{100}t} & e^{-\frac{6}{100}t} \\ 3e^{-\frac{2}{100}t} & -e^{-\frac{6}{100}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} c_1'(t)e^{-\frac{2}{100}t} + c_2'(t)e^{-\frac{6}{100}t} & = \dfrac{120}{100} & (I) \\ 3c_1'(t)e^{-\frac{2}{100}t} - c_2'(t)e^{-\frac{6}{100}t} & = 0 & (II) \end{array}\right.$$

Sumando las ecuaciones (II) y (I) se tiene:

$$4c_1'(t)e^{-\frac{2}{100}t} = \frac{120}{100}$$

$$\overset{1}{\cancel{4}}c_1'(t)e^{-\frac{2}{100}t} = \frac{\cancel{120}^{3}}{\cancel{100}^{10}}$$

$$c_1'(t)e^{-\frac{2}{100}t} = \frac{3}{10}$$

$$c_1'(t) = \frac{3}{10}e^{\frac{2}{100}t}$$

Integrando se tiene

$$c_1(t) = \frac{3}{10}\int e^{\frac{2}{100}t}dt$$

$$c_1(t) = \frac{3}{10} * \frac{100}{2}e^{\frac{2}{100}t}$$

$$c_1(t) = \frac{3}{\cancel{10}^{1}} * \frac{\cancel{100}^{\cancel{10}^{5}}}{\cancel{2}^{1}}e^{\frac{2}{100}t}$$

$$c_1(t) = 15e^{\frac{2}{100}t}$$

Multiplicando por 3 a la ecuación (I)

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3c_1'(t)e^{-\frac{2}{100}t} + 3c_2'(t)e^{-\frac{6}{100}t} & = \dfrac{360}{100} \qquad (I) \\ 3c_1'(t)e^{-\frac{2}{100}t} - c_2'(t)e^{-\frac{6}{100}t} & = 0 \qquad (II) \end{cases}$$

Restando las ecuaciones se tiene

$$4c_2'(t)e^{-\frac{6}{100}t} = \frac{360}{100}$$

$$\overset{1}{\cancel{4}}c_2'(t)e^{-\frac{6}{100}t} = \frac{\cancel{360}^{9}}{\cancel{100}^{10}}$$

$$c_2'(t)e^{-\frac{6}{100}t} = \frac{9}{10}$$

$$c_2'(t) = \frac{9}{10}e^{\frac{6}{100}t}$$

Integrando se tiene

$$c_2(t) = \frac{9}{10}\int e^{\frac{6}{100}t}dt$$

$$c_2(t) = \frac{9}{10} * \frac{100}{6}e^{\frac{6}{100}t}$$

$$c_2(t) = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}_{1}} * \frac{\cancel{100}^{\cancel{10}^{5}}}{\cancel{6}_{\cancel{3}_{1}}}e^{\frac{6}{100}t}$$

$$c_2(t) = 15e^{\frac{6}{100}t}$$

Así que

$$x_p(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$$

$$x_p(t) = 15e^{\frac{2}{100}t}\begin{pmatrix} e^{-\frac{2}{100}t} \\ 3e^{-\frac{2}{100}t} \end{pmatrix} + 15e^{\frac{6}{100}t}\begin{pmatrix} e^{-\frac{6}{100}t} \\ -e^{-\frac{6}{100}t} \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = 15\begin{pmatrix} e^{\frac{2}{100}t} * e^{-\frac{2}{100}t} \\ 3e^{\frac{2}{100}t} * e^{-\frac{2}{100}t} \end{pmatrix} + 15\begin{pmatrix} e^{\frac{6}{100}t} * e^{-\frac{6}{100}t} \\ -e^{\frac{6}{100}t} * e^{-\frac{6}{100}t} \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = 15\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 15\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} 15 + 15 \\ 45 - 15 \end{pmatrix}$$

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

La solución general del sistema no homogéneo se tiene de la ecuación (1.37)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{-\frac{2}{100}t} + c_2e^{-\frac{6}{100}t} \\ 3c_1e^{-\frac{2}{100}t} - c_2e^{-\frac{6}{100}t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{-\frac{2}{100}t} + c_2e^{-\frac{6}{100}t} + 30 \\ 3c_1e^{-\frac{2}{100}t} - c_2e^{-\frac{6}{100}t} + 30 \end{pmatrix}$$

Imponemos ahora la condición inicial $c_A = 0$ y $c_B = 10$, para $t = 0$

$$x(0) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-\frac{2}{100}(0)} + c_2 e^{-\frac{6}{100}(0)} + 30 \\ 3c_1 e^{-\frac{2}{100}(0)} - c_2 e^{-\frac{6}{100}(0)} + 30 \end{pmatrix}$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 30 \\ 3c_1 - c_2 + 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 30 \\ 3c_1 - c_2 + 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + 30 & = 0 \\ 3c_1 - c_2 + 30 & = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = -30 \\ 3c_1 - c_2 & = 10 - 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = -30 \quad (III) \\ 3c_1 - c_2 & = -20 \quad (IV) \end{cases}$$

Sumar (III) y (IV) se tiene

$$4c_1 = -50$$

$$c_1 = -\frac{50}{4}$$

$$c_1 = -12.5$$

Reemplazando c_1 en la ecuación (III)

$$c_1 + c_2 = -30$$

$$-12.5 + c_2 = -30$$

$$c_2 = -30 + 12.5$$

$$c_2 = -17.5$$

La concentración de cada tanque en cada instante será

$$\boxed{\begin{aligned} c_A &= -12.5e^{-\frac{2}{100}t} - 17.5e^{-\frac{6}{100}t} + 30 \\ c_B &= -37.5e^{-\frac{2}{100}t} + 17.5e^{-\frac{6}{100}t} + 30 \end{aligned}}$$

En Matlab

$$
\begin{array}{l}
t = 0 : 300; \\
y = -(12.5) * exp(-(2/100) * t) - (17.5) * exp(-(6/100) * t) + 30; \\
z = -(37.5) * exp(-(2/100) * t) + (17.5) * exp(-(6/100) * t) + 30; \\
plot(t, y, t, z)
\end{array}
$$

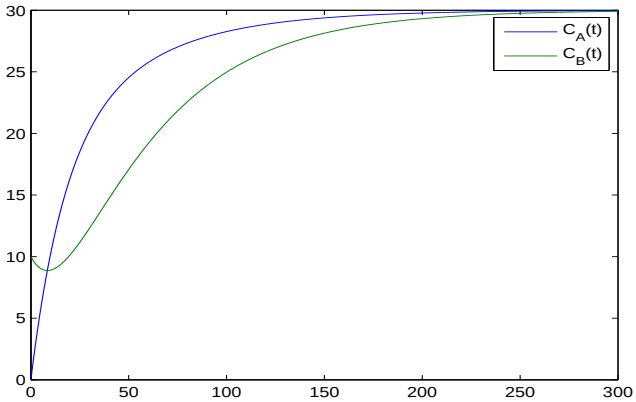


Figura 1.4: *Gráficas de las soluciones del sistema que modeliza la evolución de las concentraciones en los dos tanques.*

La Figura (1.4) muestra las gráficas de la evolución de la concentración en cada depósito. Vamos a ver el comportamiento con un tiempo de 0 a 1 minuto y poder comparar el resultado resuelto con el método de Runge-Kutta de la aplicación 2 del capítulo 3.

Tabla 1.6: Valores obtenidos de la concentración de los tanques para $t \in [0, 1]$

t	c_A	c_B
0	$-12.5e^{-\frac{2}{100}(0)} - 17.5e^{-\frac{6}{100}(0)} + 30 \quad =0$	$-37.5e^{-\frac{2}{100}(0)} + 17.5e^{-\frac{6}{100}(0)} + 30 \quad =10$
0.25	$-12.5e^{-\frac{2}{100}(0.25)} - 17.5e^{-\frac{6}{100}(0.25)} + 30 \quad =0.322885$	$-37.5e^{-\frac{2}{100}(0.25)} + 17.5e^{-\frac{6}{100}(0.25)} + 30 \quad =9.926491$
0.5	$-12.5e^{-\frac{2}{100}(0.5)} - 17.5e^{-\frac{6}{100}(0.5)} + 30 \quad =0.641580$	$-37.5e^{-\frac{2}{100}(0.5)} + 17.5e^{-\frac{6}{100}(0.5)} + 30 \quad =9.855928$
0.75	$-12.5e^{-\frac{2}{100}(0.75)} - 17.5e^{-\frac{6}{100}(0.75)} + 30 \quad =0.956145$	$-37.5e^{-\frac{2}{100}(0.75)} + 17.5e^{-\frac{6}{100}(0.75)} + 30 \quad =9.788258$
1	$-12.5e^{-\frac{2}{100}(1)} - 17.5e^{-\frac{6}{100}(1)} + 30 \quad =1.266637$	$-37.5e^{-\frac{2}{100}(1)} + 17.5e^{-\frac{6}{100}(1)} + 30 \quad =9.723429$

Gráfica en Matlab

$$
\begin{array}{l}
t = 0 : 0.25 : 1; \\
y = -(12.5) * exp(-(2/100) * t) - (17.5) * exp(-(6/100) * t) + 30; \\
z = -(37.5) * exp(-(2/100) * t) + (17.5) * exp(-(6/100) * t) + 30; \\
plot(t, y, t, z)
\end{array}
$$

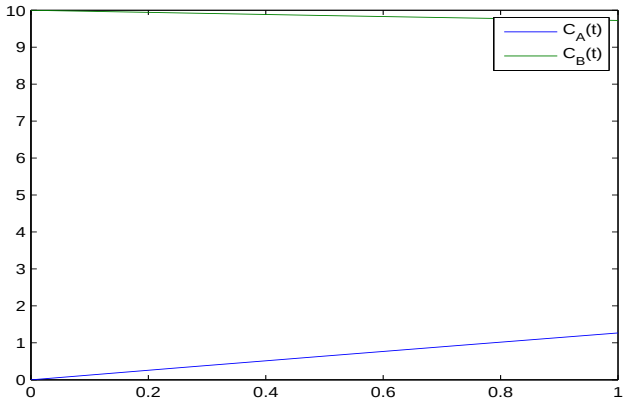


Figura 1.5: *Gráficas de las soluciones del sistema que modeliza la evolución de las concentraciones en los dos tanques para* $t \in [0, 1]$.

La Figura (1.5) muestra las gráficas de la evolución de la concentración en cada tanque para $t \in [0, 1]$.

Capítulo 2

Sistema de Ecuaciones Diferenciales ordinarias no Homogénea mediante el Método de Runge-Kutta

2.1 Método de Runge Kutta

Coronel, & Chávez, (2017). Enuncian que el método de Runge-Kutta va a permitir solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden la cual tiene la forma siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1k_1 + w_2k_2 + ... + w_nk_n), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_i, y_i) \\
k_2 &= hf(t_i + a_1h, y_i + b_{11}k_1) \\
k_3 &= hf(t_i + a_2h, y_i + b_{21}k_1 + b_{22}k_2) \\
k_4 &= hf(t_i + a_3h, y_i + b_{31}k_1 + b_{32}k_2 + b_{33}k_3) \\
&\vdots \\
k_n &= hf(t_i + a_{n-1}h, y_i + b_{n-1,1}k_1 + b_{n-1,2}k_2 + b_{n-1,3}k_3 + ... + b_{n-1,n-1}k_{n-1})
\end{aligned}$$

2.1.1 Método de Runge Kutta de Orden 4

Coronel, & Chávez, (2017). Enuncian que el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad a \leq t \leq b, \qquad y(a) = \alpha$$

en $(N + 1)$ números uniformemente espaciados en el intervalo $[a, b]$:
El método de cuarto orden de Runge-Kutta (RK4) simula la precisión del método de la serie de Taylor de orden $N = 4$ y consiste en calcular la aproximación $y_(k + 1)$ de la siguiente manera:

$$y_{k+1} = y_k + w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3 + w_4 k_4 \tag{2.1}$$

Donde k_1, k_2, k_3 y k_4 son de la forma

$$\begin{aligned}
i &= 0, 1, 2, ..., n \\
k_1 &= hf(t_i, y_i) \\
k_2 &= hf(t_i + a_1 h, y_i + b_1 k_1) \\
k_3 &= hf(t_i + a_2 h, y_i + b_2 k_1 + b_3 k_2) \\
k_4 &= hf(t_i + a_3 h, y_i + b_4 k_1 + b_5 k_2 + b_6 k_3)
\end{aligned}$$

Comparando estos coeficientes con los del método de Taylor de Orden 4, de manera el error de truncamiento sea de orden $O(h^5)$. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$b_1 = a_1 \quad b_2 + b_3 = a_2 \quad b_4 + b_5 + b_6 = a_3$$

$$\begin{aligned}
w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= 1 & w_2 a_1 + w_3 a_2 + w_4 a_3 &= \tfrac{1}{2} \\
w_2 a_1^2 + w_3 a_2^2 + w_4 a_3^2 &= \tfrac{1}{3} & w_2 a_1^3 + w_3 a_2^3 + w_4 a_3^3 &= \tfrac{1}{4} \\
w_3 a_1 b_3 + w_4(a_1 b_5 + a_2 b_6) &= \tfrac{1}{6} & w_3 a_1 a_2 b_3 + w_4 a_3(a_1 b_5 + a_2 b_6) &= \tfrac{1}{8} \\
w_3 a_1^2 b_3 + w_4(a_1^2 b_5 + a_2^2 b_6) &= \tfrac{1}{12} & w_4 a_1 b_3 b_6 &= \tfrac{1}{24}
\end{aligned}$$

Este sistema consta de 13 incógnitas y solo 11 ecuaciones, así que debemos añadir dos condiciones adicionales para resolverlo. Tomaremos: $a_1 = \frac{1}{2}$ y $b_2 = 0$
Entonces los valores de la solución para las demás variable son:

$a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = 1$; $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_3 = \frac{1}{2}$; $b_4 = b_5 = 0$; $b_6 = 1$ $w_1 = \frac{1}{6}$; $w_2 = \frac{1}{3}$; $w_3 = \frac{1}{3}$; $w_4 = \frac{1}{6}$
Sustituyendo en las ecuaciones (2.1) obtenemos la fórmula del Método de Runge-Kutta de orden 4:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

Donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} f_1) \\ k_3 &= f(t_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} f_2) \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + h f_3) \end{aligned}$$

2.1.2 Precisión del Método de Runge-Kutta

Coronel, & Chávez, (2017).
Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(t, y) \text{ en } [t_0, t_M]$$

con $y(t_0) = y_0$. Si $y(t) \in C^5[t_0, b]$ y $\{(t_k, y_k)\}_{k=0}^{M}$ es la sucesión de aproximaciones generada por el método de Runge-Kutta de orden 4, entonces:

- **Error de truncamiento global**

$$|e_k| = |y(t_k) - y_k| = O(h^4) \tag{2.2}$$

- **Error de truncamiento local**

$$|e_{k+1}| = |y(t_{k+1}) - y_k - hT_N(t_k, y_k)| = O(h^5) \tag{2.3}$$

El **error global final** del extremo derecho del intervalo, viene dado por

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = O(h^4) \tag{2.4}$$

Para el caso de orden 4, tomamos dos tamaños de paso h y h/2, tenemos:

$$E(y(b), h) \approx Ch^4 \tag{2.5}$$

Para el tamaño de paso más grande

$$E(y(b), \tfrac{h}{2}) \approx C\frac{h^4}{16} = \frac{1}{16}Ch^4 \approx \frac{1}{16}E(y(b), h) \tag{2.6}$$

Podemos ver que si el tamaño de paso en el método de Rungue Kutta de orden 4 se reduce a la mitad, entonces el error global final se reducirá en un factor de orden de $\frac{1}{16}$.

2.2 Método de Runge-Kutta de Orden 4 para Sistemas de Ecuaciones no Homogéneas con coeficientes constantes

Collante, (2011). Menciona que el método de Runge-Kutta de cuarto orden va ha permitir solucionar sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes.

La ecuación (1.15) la resolveremos por las iteraciones del Método de Runge-Kutta de cuarto orden para sistemas no homogéneos, donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= h * f(t_n, x_n) \\ k_2 &= h * f(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= h * f(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= h * f(t_n + h, x_n + k_3) \end{aligned} \tag{2.7}$$

para $a \leq t \leq b$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} * \Big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big)$$

Donde:

$h = \dfrac{b-a}{N}$

[a,b] = Intervalo

n = Número de variables

N = Número de subintervalos

h = El valor del incremento de h se llama **tamaño de paso**

Nuestro objetivo es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas por el método de Runge-Kutta.

(Collante, 2011) en su libro texto afirma que el sistema (3.1) puede escribirse en forma lineal de la siguiente forma:

$$x' = Ax + B \tag{2.8}$$

entonces (2.7) se escribe como:

$$\begin{aligned} k_1 &= h * [A * x_n + B(t_n)]) &&= k_1^n \\ k_2 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_1) + B(t_n + \tfrac{1}{2}h)] &&= k_2^n \\ k_3 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_2) + B(t_n + \tfrac{1}{2}h)] &&= k_3^n \\ k_4 &= h * [A * (x_n + k_3) + B(t_n + h)] &&= k_4^n \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} * \Big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big) \tag{2.10}$$

Observación 2.1. "n"depende del número de variables

Capítulo 3

Aplicaciones: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales no Homogéneas por el Método de Runge Kutta Asistido con Matlab

3.1 Aplicación 1

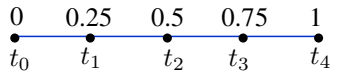
Collante, (2011). Dado el siguiente sistema lineal no homogéneo:

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 - (2t^2+1)e^{2t} \\ x_2' &= 4x_1 + x_2 + (t^2+2t-4)e^{2t} \\ & \text{Condiciones iniciales} \\ & x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1 \\ & 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Solución.

Identificamos A y B donde $n = 2$, $N = 4$ y $h = \dfrac{1-0}{4}$ =0.25

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -(2t^2+1)e^{2t} \\ (t^2+2t-4)e^{2t} \end{bmatrix}$$



Primera iteración: Se halla el primer incremento

<u>Para $t_1 = 0.25$</u>

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h * \Big(A * x_n + B(t_n)\Big) = 0.25\Big([A]x_n + B(0)\Big) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2t^2+1)e^{2t} \\ (t^2+2t-4)e^{2t} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0)^2+1)e^{2(0)} \\ ((0)^2+2(0)-4)e^{2(0)} \end{bmatrix}\right) = 0.25\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_1^2 \end{pmatrix} \\
k_2 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_1) + B(t_n + \tfrac{h}{2})] \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}k_1^1 \\ x_2 + \frac{1}{2}k_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_0+\frac{h}{2})^2+1)e^{2(t_0+\frac{h}{2})} \\ ((t_0+\frac{h}{2})^2+2(t_0+\frac{h}{2})-4)e^{2(t_0+\frac{h}{2})} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.125)^2+1)e^{2(0.125)} \\ ((0.125)^2+2(0.125)-4)e^{2(0.125)} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 1.625 \\ 1.125 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.324151 \\ -4.795032 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\begin{pmatrix} 0.300849 \\ -3.670032 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.075212 \\ -0.917508 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^1 \\ k_2^2 \end{pmatrix} \\
k_3 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_2) + B(t_n + \tfrac{1}{2}h)] \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}k_2^1 \\ x_2 + \frac{1}{2}k_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_0+\frac{h}{2})^2+1)e^{2(t_0+\frac{h}{2})} \\ ((t_0+\frac{h}{2})^2+2(t_0+\frac{h}{2})-4)e^{2(t_0+\frac{h}{2})} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.037606 \\ 0.541246 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.125)^2+1)e^{2(0.125)} \\ ((0.125)^2+2(0.125)-4)e^{2(0.125)} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 1.19531 \\ 0.69167 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.324151 \\ -4.795032 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\begin{pmatrix} -0.128841 \\ -4.103362 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.032210 \\ -1.025840 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3^1 \\ k_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= h * [A * (x_n + k_3) + B(t_n + h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + k_3^1 \\ x_2 + k_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_0+h)^2+1)e^{2(t_0+h)} \\ ((t_0+h)^2 + 2(t_0+h) - 4)e^{2(t_0+h)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.03221 \\ -0.025840 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.25)^2+1)e^{2(0.25)} \\ ((0.25)^2 + 2(0.25) - 4)e^{2(0.25)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -0.14831 \\ -0.15468 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.854811 \\ -5.667479 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} -2.003121 \\ -5.822159 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.500780 \\ -1.455539 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4^1 \\ k_4^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(0) + \tfrac{1}{6}(k_1^1 + 2(k_2^1 + k_3^1) + k_4^1) \\
x_1 &= 0 + \tfrac{1}{6}(0.25 + 2(0.075212 - 0.032210) - 0.500780) = \textbf{-0.027463}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_2(0) + \tfrac{1}{6}(k_1^2 + 2(k_2^2 + k_3^2) + k_4^2) \\
x_2 &= 1 + \tfrac{1}{6}(-0.75 + 2(-0.917508 - 1.02584) - 1.455539) = \textbf{-0.015373}
\end{aligned}
$$

Segunda iteración: Se halla el segundo incremento

<u>Para $t_2 = 0.5$</u>

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h * \Big(A * x_n + B(t_n)\Big) = 0.25\Big([A]x_0 + B(0.25)\Big) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2t^2+1)e^{2t} \\ (t^2 + 2t - 4)e^{2t} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.027463 \\ -0.015373 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.25)^2+1)e^{2(0.25)} \\ ((0.25)^2 + 2(0.25) - 4)e^{2(0.25)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -0.113134 \\ -0.125224 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.854811 \\ -5.667479 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} -1.967946 \\ -5.792704 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.491986 \\ -1.448176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_1^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_1) + B(t_n + \tfrac{h}{2})] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}k_1^1 \\ x_2 + \frac{1}{2}k_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_1 + \frac{h}{2})^2 + 1)e^{2(t_1 + \frac{h}{2})} \\ ((t_1 + \frac{h}{2})^2 + 2(t_1 + \frac{h}{2}) - 4)e^{2(t_1 + \frac{h}{2})} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.273456 \\ -0.739461 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.375)^2 + 1)e^{2(0.375)} \\ ((0.375)^2 + 2(0.375) - 4)e^{2(0.375)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -2.299290 \\ -1.833285 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.712406 \\ -6.582547 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} -5.011696 \\ -8.415832 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.252924 \\ -2.103958 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^1 \\ k_2^2 \end{pmatrix} \\
k_3 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_2) + B(t_n + \tfrac{1}{2}h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}k_2^1 \\ x_2 + \frac{1}{2}k_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_1 + \frac{h}{2})^2 + 1)e^{2(t_1 + \frac{h}{2})} \\ ((t_1 + \frac{h}{2})^2 + 2(t_1 + \frac{h}{2}) - 4)e^{2(t_1 + \frac{h}{2})} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.653925 \\ -1.067352 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.375)^2 + 1)e^{2(0.375)} \\ ((0.375)^2 + 2(0.375) - 4)e^{2(0.375)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -4.096478 \\ -3.683051 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.712406 \\ -6.582547 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} -6.808885 \\ -10.265598 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.702221 \\ -1.067352 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3^1 \\ k_3^2 \end{pmatrix} \\
k_4 &= h * [A * (x_n + k_3) + B(t_n + h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + k_3^1 \\ x_2 + k_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_1 + h)^2 + 1)e^{2(t_1 + h)} \\ ((t_1 + h)^2 + 2(t_1 + h) - 4)e^{2(t_1 + h)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.72968 \\ -2.58177 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.5)^2 + 1)e^{2(0.5)} \\ ((0.5)^2 + 2(0.5) - 4)e^{2(0.5)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -10.352597 \\ -9.500508 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.077423 \\ -7.475275 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} -14.430020 \\ -16.975783 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.607505 \\ -4.243946 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4^1 \\ k_4^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(0.25) + \tfrac{1}{6}(k_1^1 + 2(k_2^1 + k_3^1) + k_4^1) \\
x_1 &= -0.027463 + \tfrac{1}{6}(-0.491986 + 2(-1.252924 - 1.702221) - 3.607505) = \textbf{-1.69576}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_2(0.25) + \tfrac{1}{6}(k_1^2 + 2(k_2^2 + k_3^2) + k_4^2) \\
x_2 &= -0.015373 + \tfrac{1}{6}(-1.448176 + 2(-2.103958 - 1.067352) - 4.243946) = \textbf{-2.52085}
\end{aligned}
$$

Tercera iteración: Se halla el tercer incremento

<u>Para $t_3 = 0.75$</u>

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h * \Big(A * x_n + B(t_n)\Big) = 0.25\Big([A]x_0 + B(0.5)\Big) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2t^2+1)e^{2t} \\ (t^2+2t-4)e^{2t} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1.69576 \\ -2.52085 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.5)^2+1)e^{2(0.5)} \\ ((0.5)^2+2(0.5)-4)e^{2(0.5)} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} -10.128971 \\ -9.303885 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4.077423 \\ -7.475275 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\begin{pmatrix} -14.206393 \\ -16.779160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.551598 \\ -4.194790 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_1^2 \end{pmatrix} \\
k_2 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_1) + B(t_n + \tfrac{h}{2})] \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}k_1^1 \\ x_2 + \frac{1}{2}k_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_2+\frac{h}{2})^2+1)e^{2(t_2+\frac{h}{2})} \\ ((t_2+\frac{h}{2})^2+2(t_2+\frac{h}{2})-4)e^{2(t_2+\frac{h}{2})} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3.471559 \\ -4.618241 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.625)^2+1)e^{2(0.625)} \\ ((0.625)^2+2(0.625)-4)e^{2(0.625)} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} -19.651158 \\ -18.504476 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6.217173 \\ -8.235028 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\begin{pmatrix} -25.868332 \\ -26.739504 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.467083 \\ -6.684876 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^1 \\ k_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_3 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_2) + B(t_n + \tfrac{1}{2}h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}k_2^1 \\ x_2 + \frac{1}{2}k_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_2 + \frac{h}{2})^2 + 1)e^{2(t_2 + \frac{h}{2})} \\ ((t_2 + \frac{h}{2})^2 + 2(t_2 + \frac{h}{2}) - 4)e^{2(t_2 + \frac{h}{2})} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.929301 \\ -5.863284 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.625)^2 + 1)e^{2(0.625)} \\ ((0.625)^2 + 2(0.625) - 4)e^{2(0.625)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -26.514471 \\ -25.580489 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6.217173 \\ -8.235028 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} -32.731645 \\ -33.815516 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8.18291 \\ -8.45388 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3^1 \\ k_3^2 \end{pmatrix} \\
k_4 &= h * [A * (x_n + k_3) + B(t_n + h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + k_3^1 \\ x_2 + k_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_2 + h)^2 + 1)e^{2(t_2 + h)} \\ ((t_2 + h)^2 + 2(t_2 + h) - 4)e^{2(t_2 + h)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9.87867 \\ -10.97472 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.75)^2 + 1)e^{2(0.75)} \\ ((0.75)^2 + 2(0.75) - 4)e^{2(0.75)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -51.585462 \\ -50.489408 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9.523589 \\ -8.683273 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} -61.109052 \\ -59.172681 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.277263 \\ -14.793170 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4^1 \\ k_4^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(0.5) + \tfrac{1}{6}(k_1^1 + 2(k_2^1 + k_3^1) + k_4^1) \\
x_1 &= -1.695760 + \tfrac{1}{6}(-3.551598 + 2(-6.467083 - 8.18291) - 15.277263) = \textbf{-9.71723}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_2(0.5) + \tfrac{1}{6}(k_1^2 + 2(k_2^2 + k_3^2) + k_4^2) \\
x_2 &= -2.520846 + \tfrac{1}{6}(-4.194790 + 2(-6.684876 - 8.45388) - 14.793170) = \textbf{-10.73176}
\end{aligned}
$$

Cuarta iteración: Se halla el cuarto incremento

<u>Para $t_4 = 1$</u>

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h * \Big(A * x_n + B(t_n)\Big) = 0.25\Big([A]x_0 + B(0.75)\Big) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2t^2+1)e^{2t} \\ (t^2+2t-4)e^{2t} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -9.717235 \\ -10.731757 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.75)^2+1)e^{2(0.75)} \\ ((0.75)^2+2(0.75)-4)e^{2(0.75)} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} -50.615219 \\ -49.600696 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9.523589 \\ -8.683273 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\begin{pmatrix} -60.138808 \\ -58.283969 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15.034702 \\ -14.570992 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_1^2 \end{pmatrix} \\
k_2 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_1) + B(t_n + \tfrac{h}{2})] \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}k_1^1 \\ x_2 + \frac{1}{2}k_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_3+\frac{h}{2})^2+1)e^{2(t_3+\frac{h}{2})} \\ ((t_3+\frac{h}{2})^2+2(t_3+\frac{h}{2})-4)e^{2(t_3+\frac{h}{2})} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -17.234586 \\ -18.017254 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.875)^2+1)e^{2(0.875)} \\ ((0.875)^2+2(0.875)-4)e^{2(0.875)} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} -87.738264 \\ -86.955596 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14.566338 \\ -8.541988 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\begin{pmatrix} -102.304602 \\ -95.497585 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25.576151 \\ -23.874396 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^1 \\ k_2^2 \end{pmatrix} \\
k_3 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_2) + B(t_n + \tfrac{1}{2}h)] \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 + \frac{1}{2}k_2^1 \\ x_2 + \frac{1}{2}k_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_3+\frac{h}{2})^2+1)e^{2(t_3+\frac{h}{2})} \\ ((t_3+\frac{h}{2})^2+2(t_3+\frac{h}{2})-4)e^{2(t_3+\frac{h}{2})} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -22.505310 \\ -22.668956 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(0.875)^2+1)e^{2(0.875)} \\ ((0.875)^2+2(0.875)-4)e^{2(0.875)} \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\left(\begin{bmatrix} -112.853841 \\ -112.690195 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14.566338 \\ -8.541988 \end{bmatrix}\right) \\
&= 0.25\begin{pmatrix} -127.420179 \\ -121.232184 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31.85504 \\ -30.30805 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3^1 \\ k_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= h * [A * (x_n + k_3) + B(t_n + h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + k_3^1 \\ x_2 + k_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(t_3+h)^2 + h)e^{2(t_3+h)} \\ ((t_3+h)^2 + 2(t_3+h) - 4)e^{2(t_3+h)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -41.57228 \\ -41.03980 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(2(1)^2 + 1)e^{2(1)} \\ ((1)^2 + 2(1) - 4)e^{2(1)} \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -206.796445 \\ -207.328921 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -22.167168 \\ -7.389056 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} -228.963613 \\ -214.717977 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -57.240903 \\ -53.679494 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4^1 \\ k_4^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1(0.75) + \tfrac{1}{6}(k_1^1 + 2(k_2^1 + k_3^1) + k_4^1) \\
x_1 &= -9.717235 + \tfrac{1}{6}(-15.034702 + 2(-25.576151 - 31.85504) - 57.240903) = \textbf{-40.90690}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_2(0.75) + \tfrac{1}{6}(k_1^1 + 2(k_2^1 + k_3^1) + k_4^1) \\
x_2 &= -10.731757 + \tfrac{1}{6}(-14.570992 + 2(-23.874396 - 30.30805) - 53.679494) = \textbf{-40.16765}
\end{aligned}
$$

Tabla 3.1: Resultados de manera directa de la aplicación 1

	k_1		k_2		k_3		k_4		Resultado	
t_n	k_1^1	k_1^2	k_2^1	k_2^2	k_3^1	k_3^2	k_4^1	k_4^2	x_1	x_2
0									0	1
0.25	0.250000	-0.750000	0.075212	-0.917508	-0.032210	-1.025841	-0.500781	-1.455540	-0.027463	-0.015373
0.5	-0.491986	-1.448176	-1.252924	-2.103958	-1.702221	-2.566400	-3.607505	-4.243946	-1.695760	-2.520846
0.75	-3.551598	-4.194790	-6.467083	-6.684876	-8.182911	-8.453879	-15.277263	-14.793170	-9.717235	-10.731757
1	-15.034702	-14.570992	-25.576151	-23.874396	-31.855045	-30.308046	-57.240903	-53.679494	-40.906901	-40.167653

Utilizando el Software Matlab

1. **Crear un archivo m, donde se ingresa las funciones**

```
function [F] = F(t,X)
F(1) = 3*X(1)+2*X(2)-(2*t^2 +1)*exp(2*t) ;
F(2) = 4*X(1)+X(2)+(t^2 +2*t -4)*exp(2*t);
```

```
return;
```

2. **Ingresar los datos en el Command Window**

```
>>R= RK4_No_Homogeneo(@F, 0, 1, [0, 1], 4)
-------------------------------
      (t)        (x1)       (x2)
-------------------------------
R =
         0          0     1.0000
    0.2500    -0.0275    -0.0154
    0.5000    -1.6958    -2.5208
    0.7500    -9.7172   -10.7318
    1.0000   -40.9069   -40.1677
```

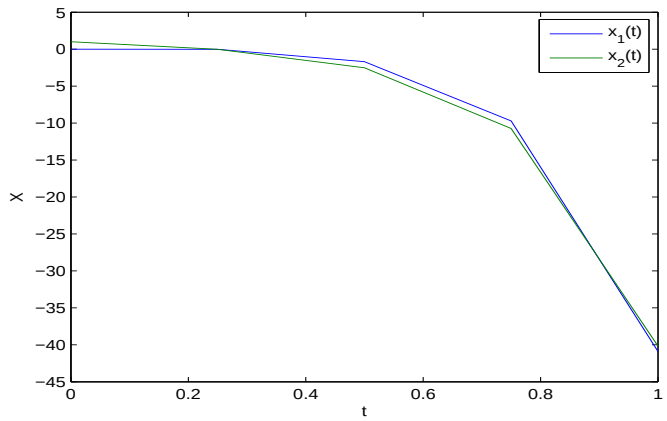


Figura 3.1: *Gráfica de* $x_1(t)$ *y* $x_2(t)$ *donde* $t \in [0, 1]$

3.2 Aplicación 2: Balance de Masas

Sistemas no homogéneos y Aplicaciones, (s.f.).

Dos tanques están conectados como se muestra en la Figura (3.2). Inicialmente en el depósito B hay 1 kg. de sal disuelto y en el tanque A sólo hay agua. En ese mismo instante se comienza a bombear una disolución de agua y sal con un caudal de $4\frac{l}{min.}$ y una concentración de 30 $\frac{g}{l}$ al tanque A. La disolución circula entre los tanques y hacia el exterior de acuerdo a los datos de la Figura (3.2), y se supone que se encuentra uniformemente distribuida.

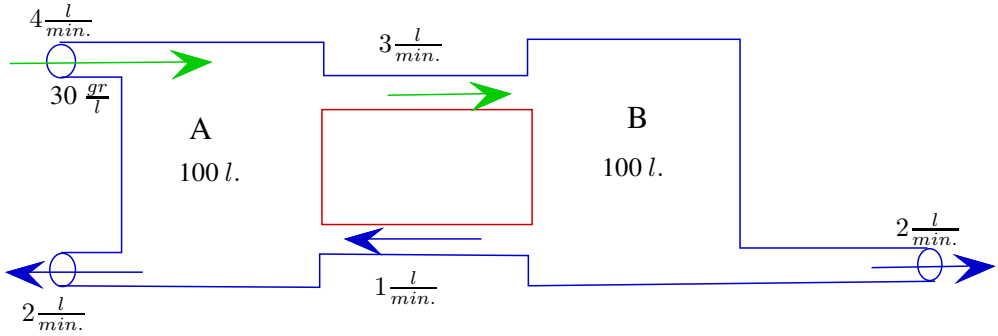


Figura 3.2: *2 tanques conectados con entrada y salidas*

Donde:

Flecha verde: Indica entrada de concentración.

Fecha Azul: Indica Salida de concentración.

Hallar la concentración de sal en cada tanque en cualquier instante.

Solución

Solucionaremos este tipo de problema utilizando balance de masas como se menciona en las ecuaciones (1.2), (1.3), (1.4) y (1.7).

Acumulación = Entradas-Salidas

Ahora designaremos los símbolos $c_A(t)$ y $c_B(t)$ las funciones que nos proporcionan las concentraciones en los tanques A y B a lo largo del tiempo.

1. **Analizaremos el comportamiento de las entradas en el tanque A**

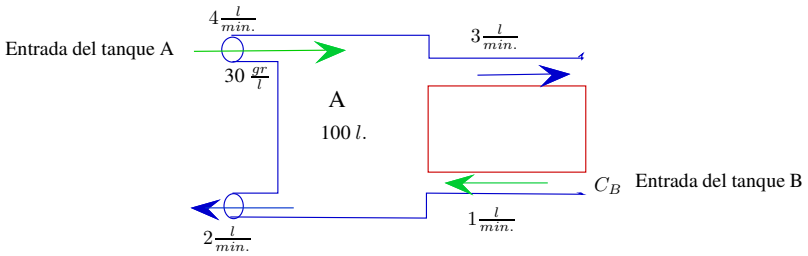


Figura 3.3: *Comportamiento de entradas en el tanque A*

De la ecuación (1.5) se tiene:

$$\dot{m}_{eA} = \begin{bmatrix} \text{Concentración} \\ \textit{en masa } A \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{Velocidad de} \\ \textit{entrada de masa} \\ \textit{al sistema en } A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Concentración} \\ \textit{en masa } B \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{Velocidad de} \\ \textit{entrada de masa} \\ \textit{al sistema } B \end{bmatrix}$$

$$\dot{m}_{eA} = \left(30\frac{g}{l}\right)\times\left(4\frac{l}{min}\right)+\left(c_B\frac{g}{l}\right)\times\left(1\frac{l}{min}\right) = 120\frac{g}{min}+c_B\frac{g}{min} = \left(120+c_B\right)\frac{g}{min}$$

2. **Analizaremos el comportamiento de las salidas en el tanque A**

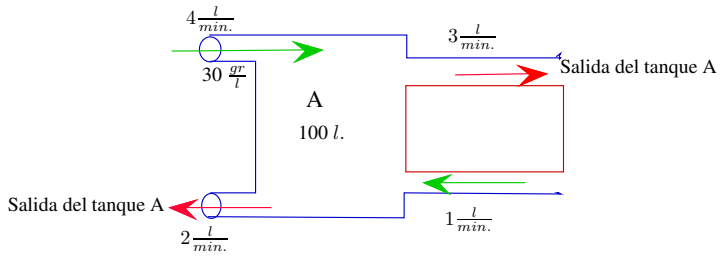


Figura 3.4: *Comportamiento de salidas en el tanque A*

De la ecuación (1.6) se tiene:

$$\dot{m}_{sA} = \left(3\frac{l}{min} + 2\frac{l}{min}\right) \times c_A\frac{g}{l} = 5\frac{l}{min} \times c_A\frac{g}{l} = 5c_A\frac{g}{min}$$

3. **Analizaremos la acumulación en el tanque A**

   De la ecuación (1.7) y la Figura (3.2) muestra que el volumen permanece constante lo cual se tiene:

$$\frac{d(c_A V)}{dt} = Vc'_A = 100c'_A$$

4. **Analizaremos el comportamiento de las entradas en el tanque B**

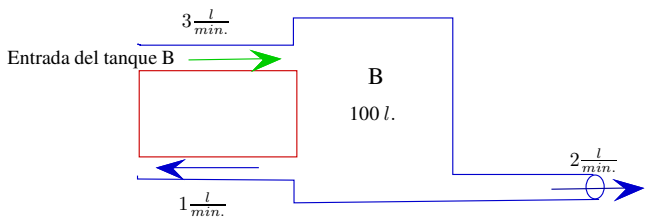


Figura 3.5: *Comportamiento de entradas en el tanque B*

De la ecuación (1.5) se tiene:

$$\dot{m}_{eB} = \begin{bmatrix} \text{Velocidad de} \\ \textit{entrada de masa} \\ \textit{al sistema en B} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \text{Concentración} \\ \textit{en masa A} \end{bmatrix}$$

$$\dot{m}_{eB} = \left(3\frac{l}{min}\right) \times \left(c_A\frac{g}{l}\right) = 3c_A\frac{g}{min}$$

5. **Analizaremos el comportamiento de las salidas en el tanque B**

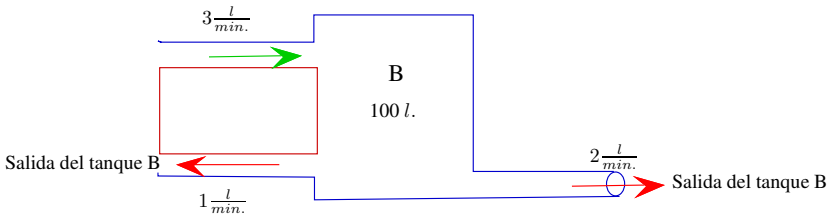


Figura 3.6: *Comportamiento de salidas en el tanque B*

De la ecuación (1.6) se tiene:

$$\dot{m}_{sB} = \left(2\frac{l}{min} + 1\frac{l}{min}\right) \times c_B\frac{g}{min} = 3\frac{l}{min} \times c_B\frac{g}{min} = 3c_B\frac{g}{min}$$

6. **Analizaremos la acumulación en el tanque B:**

   De la ecuación (1.7) y la Figura (3.2) muestra que el volumen permanece constante lo cual se tiene:

$$\frac{d(c_B V)}{dt} = V c_B' = 100 c_B'$$

7. **Analizaremos la concentración inicial en el tanque A:**

   De acuerdo a los datos del problema indica que no hay sal disuelta en el tanque A, lo cual se tiene:

$$c_A(0) = 0\frac{g}{l}$$

8. **Analizaremos la concentración inicial en el tanque B:**

   De acuerdo a los datos del problema indica que hay 1Kg de sal disuelta en el tanque B, lo cual se tiene:

$$c_B(0) = \frac{\text{gramos del soluto}}{\text{litros de la solución}} = \frac{1Kg}{100l} = \frac{1000g}{100l} = 10\tfrac{g}{l}$$

   El balance de materia en cada tanque da lugar a un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \dfrac{d(c_A V)}{dt} & = \dot{m}_{eA} - \dot{m}_{sA} \\ \dfrac{d(c_B V)}{dt} & = \dot{m}_{eB} - \dot{m}_{sB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100c_A' & = 120 + c_B - 5c_A \\ 100c_B' & = 3c_A - 3c_B \end{cases}$$

   Se forma el siguiente sistema no homogéneo:

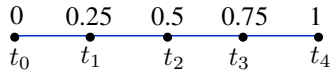
$$\begin{cases} c_A' & = -\frac{5}{100}c_A + \frac{1}{100}c_B + \frac{120}{100} \\ c_B' & = \frac{3}{100}c_A - \frac{3}{100}c_B \end{cases} \tag{3.1}$$

   con una condición inicial: $c_A(0) = 0$, $c_B(0) = 10$.

   Solución.

Utilizaremos el método de Runge-Kutta de orden 4 para resolver de manera iterativa el sistema (3.1) y analizaremos el comportamiento de los tanques en 1 minuto. Identificamos A y B donde $n = 2$, $N = 4$ y $h = \dfrac{1-0}{4}$ =0.25

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}$$



Primera iteración:

Analizaremos el comportamiento en los primeros 15 segundos.

<u>Para $t_1 = 0.25$</u>

$$\begin{aligned}
k_1 &= h * \Big(A * x_n + B(t_n)\Big) = 0.25\Big(A * x_n + B(0)\Big) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A \\ c_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0.25 \left(\begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} 1.3 \\ -0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.325 \\ -0.075 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_1^2 \end{pmatrix} \\
k_2 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_1) + B(t_n + \tfrac{h}{2})] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A + \frac{1}{2}k_1^1 \\ c_B + \frac{1}{2}k_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$=0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1625 \\ 9.9625 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\left(\begin{bmatrix} 0.0915 \\ -0.294 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\begin{pmatrix} 1.2915 \\ -0.294 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.322875 \\ -0.073500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^1 \\ k_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_2) + B(t_n + \tfrac{1}{2}h)] \\ &= 0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_A + \frac{1}{2}k_2^1 \\ c_B + \frac{1}{2}k_2^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &=0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.1614375 \\ 9.96325 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= 0.25\left(\begin{bmatrix} 0.091560625 \\ -0.294054375 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= 0.25\begin{pmatrix} 1.291560625 - 0.294054375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.322890 \\ -0.073514 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3^1 \\ k_3^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= h * [A * (x_n + k_3) + B(t_n + h)] \\ &= 0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_A + k_3^1 \\ c_B + k_3^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &=0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.322890156 \\ 9.926486406 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$= 0.25 \begin{pmatrix} 1.283120356 \\ -0.288107888 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.320780 \\ -0.072027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4^1 \\ k_4^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_A &= c_A(0) + \tfrac{1}{6}(k_1^1 + 2(k_2^1 + k_3^1) + k_4^1) \\ c_A &= 0 + \tfrac{1}{6}(-0.075 + 2(-0.073500 - 0.073514) - 0.072027)) = \mathbf{0.3229} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_B &= c_B(0) + \tfrac{1}{6}(k_1^2 + 2(k_2^2 + k_3^2) + k_4^2) \\ c_B &= 1 + \tfrac{1}{6}(-0{,}075000 + 2(-0{,}073500 - 0{,}073514) - 0{,}072027) = \mathbf{9.9265} \end{aligned}$$

Segunda iteración:

Analizaremos el comportamiento en los primeros 30 segundos.

<u>Para $t_2 = 0.5$</u>

$$\begin{aligned} k_1 &= h * \Big(A * x_n + B(t_n)\Big) = 0.5\Big(Ax_0 + B(0.5)\Big) \\ &= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A \\ c_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.322885067 \\ 9.926490973 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 0.083120656 \\ -0.288108177 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= 0.25 \begin{pmatrix} 1.283120656 \\ -0.288108177 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.320780 \\ -0.072027 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_1^2 \end{pmatrix} \\ k_2 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_1) + B(t_n + \tfrac{h}{2})] \\ &= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A + \frac{1}{2}k_1^1 \\ c_B + \frac{1}{2}k_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$=0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.483275149 \\ 9.890477451 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\left(\begin{bmatrix} 0.074741017 \\ -0.282216069 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\begin{pmatrix} 1.274741017 \\ -0.282216069 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.318685 \\ -0.070554 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_2^1 \\ k_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= h*[A*(x_n+\tfrac{1}{2}k_2)+B(t_n+\tfrac{1}{2}h)] \\ &= 0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_A+\frac{1}{2}k_2^1 \\ c_B+\frac{1}{2}k_2^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$=0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.482227694 \\ 9.891213965 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\left(\begin{bmatrix} 0.074800755 \\ -0.282269588 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\begin{pmatrix} 1.274800755 \\ -0.282269588 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.318700 \\ -0.070567 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_3^1 \\ k_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= h*[A*(x_n+k_3)+B(t_n+h)] \\ &= 0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_A+k_3^1 \\ c_B+k_3^2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$=0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.641585256 \\ 9.855923576 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\left(\begin{bmatrix} 0.066479973 \\ -0.27643015 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\begin{pmatrix} 1.266479973 \\ -0.27643015 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.316620 \\ -0.069108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4^1 \\ k_4^2 \end{pmatrix}$$

$$c_A = c_A(0.25) + \tfrac{1}{6}(k_1^1 + 2(k_2^1 + k_3^1) + k_4^1)$$

$$c_A = 0.322885067 + \tfrac{1}{6}(0.320780 + 2(0.318685 + 0.318700)0.316620))= \mathbf{0.6416}$$

$$c_B = c_B(0.25) + \tfrac{1}{6}(k_1^2 + 2(k_2^2 + k_3^2) + k_4^2)$$

$$c_B = 9.926490973 + \tfrac{1}{6}(-0{,}072027 + 2(-0{,}070554 - 0{,}070567) - 0{,}069108)= \mathbf{9.8559}$$

Tercera iteración:

Analizaremos el comportamiento en los primeros 45 segundos.

<u>Para $t_3 = 0.75$</u>

$$k_1 = h * \Big(A * x_n + B(t_n)\Big) = 0.25\Big([A]x_0 + B(0.5)\Big)$$

$$= 0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_A \\ c_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$=0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.641580241 \\ 9.855928072 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\left(\begin{bmatrix} 0.066480269 \\ -0.276430435 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\begin{pmatrix} 1.266480269 \\ -0.276430435 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.316620 \\ -0.069108 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_1^2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
k_2 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_1) + B(t_n + \tfrac{h}{2})] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A + \frac{1}{2}k_1^1 \\ c_B + \frac{1}{2}k_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.799890274 \\ 9.821374267 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 0.058219229 \\ -0.27064452 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} 1.258219229 \\ -0.27064452 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.314555 \\ -0.067661 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^1 \\ k_2^2 \end{pmatrix} \\
k_3 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_2) + B(t_n + \tfrac{1}{2}h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A + \frac{1}{2}k_2^1 \\ c_B + \frac{1}{2}k_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.798857644 \\ 9.822097507 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 0.058278093 - 0.270697196 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} 1.258278093 \\ -0.270697196 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.314570 \\ -0.067674 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3^1 \\ k_3^2 \end{pmatrix} \\
k_4 &= h * [A * (x_n + k_3) + B(t_n + h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{100} & \dfrac{1}{100} \\ \dfrac{3}{100} & -\dfrac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A + k_3^1 \\ c_B + k_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

$$=0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.956149764 \\ 9.788253773 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\left(\begin{bmatrix} 0.05007505 \\ -0.26496312 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\begin{pmatrix} 1.25007505 \\ -0.26496312 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.312519 \\ -0.066241 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_4^1 \\ k_4^2 \end{pmatrix}$$

$$c_A = c_A(0.5)+\tfrac{1}{6}(k_1^1+2(k_2^1+k_3^1)+k_4^1)$$

$$c_A = 0.641580+\tfrac{1}{6}(0.316620+2(0.314555+0.314570)+0.312519)= \mathbf{0.9561}$$

$$c_B = c_B(0.5)+\tfrac{1}{6}(k_1^2+2(k_2^2+k_3^2)+k_4^2)$$

$$c_B = 9.855928+\tfrac{1}{6}(-0.069108+2(-0.067661-0.067674)-0.066241)= \mathbf{9.7883}$$

Cuarta iteración:

Analizaremos el comportamiento en los primeros 60 segundos, que equivale a 1 minuto.

<u>Para $t_4 = 1$</u>

$$k_1 = h*\Big(A*x_n+B(t_n)\Big)=0.25\Big([A]x_0+B(0.75)\Big)$$

$$= 0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_A \\ c_B \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$=0.25\left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.956144823 \\ 9.788258197 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25\left(\begin{bmatrix} 0.050075341 \\ -0.264963401 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 0.25 \begin{pmatrix} 1.250075341 \\ -0.264963401 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.312519 \\ -0.066241 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^1 \\ k_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_1) + B(t_n + \tfrac{h}{2})] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A + \frac{1}{2}k_1^1 \\ c_B + \frac{1}{2}k_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.11240424 \\ 9.755137772 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 0.041931166 \\ -0.259282006 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} 1.241931166 \\ -0.259282006 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.310483 \\ -0.064821 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2^1 \\ k_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= h * [A * (x_n + \tfrac{1}{2}k_2) + B(t_n + \tfrac{1}{2}h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A + \frac{1}{2}k_2^1 \\ c_B + \frac{1}{2}k_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.111386218 \\ 9.755847947 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 0.041989169 \\ -0.259333852 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} 1.241989169 \\ -0.259333852 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.310497 \\ -0.064833 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_3^1 \\ k_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= h * [A * (x_n + k_3) + B(t_n + h)] \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_A + k_3^1 \\ c_B + k_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} -\frac{5}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{3}{100} & -\frac{3}{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.266642115 \\ 9.723424734 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{120}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \left(\begin{bmatrix} 0.033902142 \\ -0.253703479 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= 0.25 \begin{pmatrix} 1.233902142 \\ -0.253703479 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.308476 \\ -0.063426 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_4^1 \\ k_4^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_A &= c_A(0.75) + \tfrac{1}{6}(k_1^1 + 2(k_2^1 + k_3^1) + k_4^1) \\
c_A &= 0.956145 + \tfrac{1}{6}(0.312519 + 2(0.310483 + 0.310497) + 0.308476) = \mathbf{1.2666}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_B &= c_B(0.75) + \tfrac{1}{6}(k_1^1 + 2(k_2^1 + k_3^1) + k_4^1) \\
c_B &= 9.788258 + \tfrac{1}{6}(-0.066241 + 2(-0.064821 - 0.064833) - 0.063426)) = \mathbf{9.7234}
\end{aligned}
$$

La concentración en cada tanque en el instante de $1min$ es:

Tabla 3.2: Resultados de manera directa de la aplicación 2

	k1		k2		k3		k4		Resultado	
tn	k11	k12	k21	k22	k31	k32	k41	k42	CA	CB
0									0	10
0.25	0.325	-0.075	0.322875	-0.0735	0.32289016	-0.07351359	0.32078009	-0.07202697	0.322885	9.926491
0.5	0.32078016	-0.07202704	0.31868525	-0.07055402	0.31870019	-0.0705674	0.31661999	-0.06910754	0.641580	9.855928
0.75	0.31662007	-0.06910761	0.31455481	-0.06766113	0.31456952	-0.0676743	0.31251876	-0.06624078	0.956145	9.788258
1	0.312519	-0.066241	0.310483	-0.064821	0.310497	-0.064833	0.308476	-0.063426	1.266637	9.723429

<u>**Utilizando el Software Matlab**</u>

1. **Crear un archivo m, donde se ingresa las funciones**

```
function [G]=G(t,C)
G(1)=(-5/100)*C(1)+(1/100)*C(2)+120/100;
G(2)=(3/100)*C(1)-(3/100)*C(2);
return;
```

2. **Ingresar los datos en el Command Window**

```
>> RK4_No_Homogeneo(@G, 0, 1, [0, 10], 4)
--------------------------------
      (t)        (C_A)       (C_B)
--------------------------------
ans = 0          0          10.0000
      0.2500     0.3229      9.9265
      0.5000     0.6416      9.8559
      0.7500     0.9561      9.7883
      1.0000     1.2666      9.7234
```

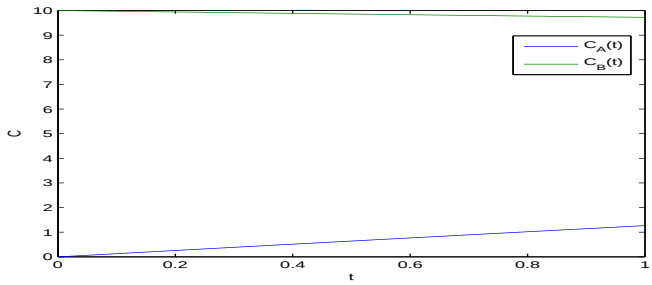


Figura 3.7: *Gráfica de* $C_A(t)$ *y* $C_B(t)$ *donde* $t \in [0, 1]$

La Figura (3.7) muestra las gráficas de la evolución de la concentración en cada tanque para $t \in [0, 1]$.

Tabla 3.3: Comparación de resultados para $t \in [0, 1]$ minuto

Tiempo	**Solución Analítica Variación de parámetros**		**Solución Numérica Método de Runge-Kutta**		$\lvert error \rvert$	$\lvert error \rvert$
t (segundos)	**CA**	**CB**	**CA**	**CB**	**CA**	**CB**
0=0s	0.000000	10	0	10	0	0
0.25=15s	0.322885	9.926491	0.322884	9.92649	0.000001	0.000001
0.5=30s	0.641580	9.855928	0.641581	9.855929	0.000001	0.000001
0.75=45s	0.956145	9.788258	0.956144	9.788259	0.000001	0.000001
1=60s=1'	1.266637	9.723429	1.266638	9.723428	0.000001	0.000001

De acuerdo a la tabla (3.3), podemos observar el resultado de la aplicación 2, la cual hemos resuelto de manera analítica por el método de variación de parámetros y el método de Runge-Kutta de orden 4 con un error de 0.000001, lo que significa que nos aproximamos a la solución.
Además con ayuda del software Matlab comprobamos que los resultados que se obtienen son de manera rápida y confiable.

Además se cumple nuestra hipótesis que utilizando el método iterativo de Runge-Kutta de cuarto orden asistido con Matlab a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas entonces se hallará su solución numérica más aproximada.

Conclusiones

1. La aplicación de balance de masas nos permitió construir un sistema de ecuación diferencial ordinaria lineal no homogéneo con coeficientes constantes, lo cual se resolvió de forma analítica por el método de variación de parámetros y de forma numérica por el método de Runge-Kutta de orden 4, se contrasta los resultados de tal manera que de forma numérica se aproxima a la solución real con un mínimo margen de error.

2. El método de Runge-Kutta de orden 4 nos permitió resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales no homogéneas con coeficientes constantes y comparar con el método de variación de parámetros los resultados de una manera sencilla.

3. El software Matlab es una herramienta que permite comprobar inicialmente los resultados obtenidos manualmente y además garantiza hallar una solución del problema en forma rápida y confiable.

Recomendaciones

- Dar a conocer a los estudiantes y docentes de Matemática en profundizar la investigación en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y verificar si el método de Runge-Kutta de orden 4 permite solucionar este tipo de sistema.
- Utilizar el software matemático Matlab como una herramienta poderosa, rápida y eficiente para la solución de sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Referencias Bibliográficas

Abdelwahab K., Ronald B. (2012). *"An Introduction to Numerical Methods a MATLAB Approach"*: Trird Edition.

Alhiet, O., Cristian, M. & Alfonso, V. (2010) *Software para ciencia e ingeniería MATLAB* , Empresa Editora MACRO.

Ayres, F. (2008). *"Ecuaciones Diferenciales"*. Edición Mc Graw-Hill.

Arenas, S.& Ramírez, M. (2010). *"Cuaderno de Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales"*. Facultad de Ingeniería, UNAM México.

Burden, R.& Faires, J. (2002). *Análisis Numérico*. México: lnternational Thomson Editores, S. A.

Chapra S. & Canale, R. (2010). *"Numerical Methods for Engineers"*, 6 edición Mcgraw-Hill.

Comer, B. (2008). *"Métodos Numéricos"*. Instituto Tecnológico de Tijuana 17 de septiembre, Edición Preliminar.

Collante, A. (2010). *Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Matlab*. Universidad Nacional del Callao, Lima, Perú.

Conde C.& Schiavi, E. (2001). *Métodos numéricos de resolución de ecuaciones no lineales*. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Coronel, D. & Chávez, D. (2017). *Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no Lineales Asistida con Matlab (tesis de pregrado)*. Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque, Perú.

De Castro, C. (2014). *"Métodos Numéricos Básicos para Ingeniería con Implementaciones en Matlab y Excel.* Asesorías en Matemáticas, Física e Ingeniería.

Esquerro, J. (2012). *"Iniciación a los métodos numéricos".* Universidad de la Rioja, servicio de publicaciones.

Keller, H. & Isaacson, E. (1996). *"Analysis of numerical methods".* New York, Dover Publications.

Matemática, (2007). *Álgebra Lineal. Aplicaciones Tema: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales.* Recuperado de: file:///C:/Users/WILMER/Downloads/ECDIF 1_2.pdf

Mathews, J.& Fink, K. (1999). *"Métodos Numéricos con Matlab".*

Olivares, M. (2016). *Balances de Masa.* Universidad de Chile, Chile.

Montero, G. (2005). *"Métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales".* Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Peralta, M. (2014). *Diseño e Implementación de un Toolbox en Matlab de Métodos Explícitos de Runge-Kutta para Problemas de Valor Inicial no Rígidos en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (tesis de maestría).* Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque, Perú.

Sánchez, J. (2014). *Introducción a Matlab.* Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

Santamaría, A. & Ramírez, J. (2015). *Diferencias Finitas Asistido con Matlab en la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas.* Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque, Perú.

Simmons, G. (1998). *"Ecuaciones Diferenciales (con aplicaciones y notas históricas)".* Edición Mc Graw-Hill.

Sistemas no homogéneos y Aplicaciones, (s.f.). Recuperado de: http://www.ehu.eus/izaballa/Ecu_Dif/Apuntes/lec10.pdf

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, (s.f.). Recuperado de: http://www.ehu.eus/izaballa/Ecu_Dif/Apuntes/lec9.pdf

Spiegel, R.(1993). *"Ecuaciones Diferenciales Aplicadas "*. Prentice-Hall México.

Zill, D. (1998). *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*, Edición Grupo editorial Iberoamericana.

Anexo

3.2.0 Algoritmo para sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer no homogéneo

```
function R = RK4_No_Homogeneo(F, a, b, X0, N)
% Sintaxis
% [t, X] = RK4_No_Homogeneo(F, a, b, X0, N)
% Entrada
% - F es el sistema de ecuaciones diferenciales, almacenado
% como un archivo F.m
% - a y b son los extremos del intervalo
% - X0 es la condición inicial X0 = [X10, X20, X30, . . ., XM0]
% - N es el número de pasos
% Salida
% - t es el vector de la abscisas o variable independiente
% - X es el vector de resultados, X = [X1, X2, X3, . . ., XM]
H = (b - a) / N;
t = zeros(1, N +1);
X = zeros(N+1 , length(X0));
t = [a : H : b]';
X(1, :) = X0;
for J = 1 : N
K11 =  H*feval(F, t(J), X(J, :));
```

```
K12 =  H*feval(F, t(J) + H/2, X(J, :) + K11/2);
K13 =  H*feval(F, t(J) + H/2, X(J, :) + K12/2);
K14 =  H*feval(F, t(J) + H, X(J, :) + K13);
X(J+1, :) = X(J, :)+(K11 + 2*K12 + 2*K13 + K14) / 6;
end
 R=[t X];
 disp('--------------------------------')
 disp('      (t)        (x1)       (x2)')
 disp('--------------------------------')
```