



UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



**Modelo matemático depredador – presa
utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias
con retardo**

Tesis

Para optar el título profesional de:

Licenciado en Matemáticas

Autor:

Bach. Erick Omar Garay Gonzales

Asesor:

Dr. Dolores Sánchez García

Lambayeque - Perú

2020

UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “Modelo matemático depredador – presa utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo”, presentada por el Bachiller en Matemáticas, Erick Omar Garay Gonzales en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Presidente Jurado de Tesis

Secretario Jurado de Tesis

Vocal Jurado de Tesis

UNIVERSIDAD NACIONAL “PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Modelo matemático depredador – presa utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo

Bach. Mat. Erick Omar Garay Gonzales

Dr. Dolores Sánchez García

Lambayeque – Perú

Enero 2020

Dedicatoria

Esta tesis se la dedico a
mi amado hijo Thiago Yasier
y a mi amada esposa Sheila Yudith,
que son el origen de desvelos,
preocupaciones y de las ganas
de ser mejor persona cada día.
LOS AMO, Erick Omar.

Agradecimiento

A Dios nuestro supremo creador
por cuidarme y guiar mis pasos.
Por su infinito amor y sus bendiciones
derramadas sobre nuestras familias y seres
queridos.

A mi querida madre, por su amor, abnegación,
Constancia y corrección, las cuales me han convertido
En una persona con principios y espíritu de lucha.
Carmen Rosa

A mi querido padre. Gracias por su apoyo
Inquebrantable e incondicional, por sus
consejos certeros y su gran amor.
Victor Omar

Al profesor Dolores, un amigo y maestro que conocí
en las aulas de la UNPRG. Gracias por su asesoramiento
académico sin el cual el presente trabajo no hubiera
sido posible.

Índice general

Dedicatoria	4
Agradecimiento	5
Introducción	8
Resumen	10
Abstract	11
Capítulo 1.....	12
1.1. Nociones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Estabilidad.	12
1.1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias EDO.	12
1.1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas.	13
1.1.3. Estabilidad de una ecuación autónoma.	14
1.1.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales.	15
1.1.5. Estabilidad de los sistemas de ecuaciones.	18
1.1.6. Linealización de un sistema de ecuaciones diferenciales.	21
1.2. Nociones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo.	22
1.2.1. Solución de una ecuación diferencial con retardo.	25
1.2.2. Sistema de ecuaciones diferenciales con retardo.	35
1.2.3. Linealización de un sistema EDR.	37
1.3. Una ecuación especial con retardo.....	39
1.4. Teoría de bifurcaciones	45
1.4.1. Bifurcación Silla-Nodo	46
1.4.2. Bifurcación De Hoff	47
Capítulo 2.....	49
Modelo de depredador – presa sin retardo	49
2.1. Aspectos preliminares a la formulación del modelo	49
2.2.1. Principios Biológicos.....	49
2.2.1. Principios Matemáticos.....	50
2.2. Formulación del modelo	51
2.2.1. El modelo de crecimiento de población de Malthus	51
2.2.2. El modelo de logístico de crecimiento de poblaciones	52
2.3. El modelo depredador-presa de Lotka – Volterra.....	53
2.4. Estabilidad local del modelo de Lotka – Volterra.....	55

Capítulo 3.....	57
Modelo depredador – presa utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo	57
3.1. Formulación del modelo.....	57
3.2. Análisis del modelo.....	59
3.2.1. Soluciones positivas	59
3.2.2. Análisis de estabilidad de los equilibrios	60
3.2.3. Bifurcación de Hoff.....	64
3.3. Formulación del modelo utilizando la función de crecimiento logístico.....	67
3.3.1. Soluciones positivas	67
3.3.2. Análisis de estabilidad de los equilibrios	67
3.3.3. Bifurcación de Hoff.....	73
Discusión de resultados	76
Conclusiones.....	77
Sugerencias.....	78
Bibliografía.....	79

Introducción

En el mundo real, la biosfera es un campo importante para las actividades biológicas que son principalmente responsables de los cambios en la ecología y el medio ambiente, y la tasa de crecimiento de diferentes especies que dependen principalmente de la ecología, la capacidad de carga del medio ambiente, etc. como consecuencia de esto, la tasa de crecimiento por parte de la presa es un asunto importante para el modelo de interacción depredador – presa. La coexistencia de especies biológicas que interactúan ha sido de gran interés en las últimas décadas y ha sido estudiada ampliamente por varios investigadores utilizando modelos matemáticos. Un modelo de depredador - presa sin retardo fue estudiado por Dubby considerando un crecimiento diferente del depredador. En muchos modelos de EDO depredador – presa existente, se ignoró el tiempo de demora para la conversión de biomasa de la presa a la población depredadora. La realidad es que, en la ecuación depredadora, el retardo es causado a menudo por la conversión de la biomasa de la presa consumida por biomasa del depredador puede ser en forma de crecimiento o reproducción del tamaño corporal.

En el presente trabajo se propone seguir un modelo depredador-presa, que incluye un retardo de tiempo discreto para modelar el tiempo de retardo entre la captura de presas y la conversión a biomasa viable, considerando diferentes funciones de crecimiento de la presa. Además, el término $e^{-\delta t}$ es incluido en la ecuación depredadora que explica que los depredadores interactúan con la presa en un tiempo “ t ” pero antes de morir y τ unidades de tiempo después de reproducirse (o crecer). (i.e. Si se asume una tasa de muerte con una constante δ para los depredadores que sobreviven en el período de gestación, esto significa la probabilidad de sobrevivir entre el tiempo de retardo de conversión a biomasa).

Esta tesis ha sido dividida en tres capítulos. En el Capítulo 1 se tratan los preliminares, como nociones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias, sistemas de ecuaciones diferenciales, estabilidad, nociones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y algo breve sobre la teoría de bifurcaciones. En el Capítulo 2 se estudia todo lo concerniente al modelo de depredador – presa sin retardo, se empieza con sus aspectos preliminares a la formulación del modelo, depredador-presa de Lotka – Volterra y se estudia la estabilidad local.

Finalmente, en el Capítulo 3 se estudia el modelo depredador – presa utilizando ecuaciones diferenciales con retardo donde la dinámica de la población, responde a una función depredadora a la densidad de la presa, esto se refiere al cambio en la densidad de la presa adjunta por unidad de tiempo por depredador como cambia la densidad de la presa. Por simplicidad, el holling de tipo I (i.e. $h(x(t)) = \gamma x(t)$; $\gamma > 0$) de respuesta funcional es considerado para ambos casos. El estudio es analizar la dinámica del modelo depredador-presa de la población que interactúa debido la función de crecimiento diferente, incluido el tiempo con retardo discreto para la captura de la presa y su conversión a biomasa y el término $e^{-\delta t}$.

Los análisis se muestran para la función de crecimiento monótona de la presa y la función de crecimiento logística de la presa.

Se espera que este trabajo de tesis sirva como punto de partida para futuras investigaciones.

Finalmente se agradece a todas las personas que de alguna u otra manera han apoyado para poder culminar con éxito el presente trabajo. En especial al Prof. Dolores Sánchez por su valioso tiempo que le ha dedicado a la corrección de esta tesis.

Resumen

El presente trabajo de investigación tuvo como objetivo, identificar la manera como modelar matemáticamente la interacción depredador – presa que considere el tiempo en el que el depredador captura a la presa. Para ello se han utilizado ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo.

El análisis de estabilidad lineal revela que, en ausencia de retardo para la función monótona de crecimiento de la presa, el equilibrio de coexistencia es un centro, pero si la función de crecimiento de la presa es logística, entonces el equilibrio de coexistencia es localmente asintóticamente estable si $\beta < \gamma k$ y no existe si $\beta > \gamma k$.

Si se muestra que $\tau > 0$, surge una solución periódica en el caso de la función de crecimiento monótona de la presa, ya que la bifurcación de Hopf ocurre sin ninguna condición. En el caso del crecimiento logístico de presas cuando $\tau > 0$ la solución periódica es posible a través de la bifurcación de Hopf bajo ciertas condiciones.

Abstract

The objective of this research work was to identify the way to model the predator – prey interaction in a pretentious manner that considers the time in which the predator captures the prey. Ordinary differential equations with delay have been used for this.

Linear stability analysis reveals that in the absence of delay for the monotonic growth function of prey, the coexistence equilibrium is a center, but if the growth function of prey is logistic, then the coexistence equilibrium is locally asymptotically stable if $\beta < \gamma k$ and it does not exist if $\beta > \gamma k$.

It is shown that if $\tau > 0$, periodic solution arises in case of the monotonic growth function of prey, as Hopf bifurcation occurs without any condition. In the case of the logistic growth of prey $\tau > 0$, the periodic solution is possible through Hopf bifurcation under certain conditions.

Capítulo 1.

Preliminares

En este capítulo se presenta brevemente las herramientas matemáticas necesarias para comprender el resto de la tesis.

1.1. Nociones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Estabilidad.

1.1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias EDO.

Definición 1.1. Se llama EDO, a una ecuación en la que aparece derivadas ordinarias de una o más variables dependientes respecto de una sola variable independiente.

Se puede expresar así:

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0 \quad (1.1)$$

donde F es una función de $n + 2$ variables. Esto es la forma general de una EDO. De la ecuación (1.1) se puede despejar $\frac{d^n x}{dx^n}$, entonces la ecuación toma la forma:

$$\frac{d^n x}{dx^n} = f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t)) \quad (1.2)$$

se indica que " t " es la variable independiente y " x " es la variable dependiente, " n " es un número natural y se dice que (1.1) y (1.2) son EDO de orden " n ". Es la forma normal de una EDO.

Definición 1.2. Una EDO de primer orden en la variable independiente "t" y variable dependiente "x" es de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \quad (1.3)$$

o

$$x' = f(t, x) \quad (1.4)$$

donde la función incógnita "x", es una función:

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable con continuidad.

Definición 1.3. Para cada $(t_0, x_0) \in D \subset \mathbb{R}^n$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

consiste en determinar un intervalo abierto (a, b) conteniendo a t_0 y una solución $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. La igualdad $x(t_0) = x_0$ se llama condición inicial.

En el presente trabajo se considera, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1.1.2. Ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas.

Las ecuaciones autónomas tienen una marcada importancia en los modelos, pues muchos fenómenos funcionan igual todo el tiempo, para los investigadores resulta algo más fácil promediar tiempos, por ejemplo, en semanas y no en días.

Definición 1.4. Un punto $x^* \in A$ es un punto de equilibrio o estacionario de la ecuación (1.4) si y sólo si $f(x^*, t) = 0$ para todo "t".

Ejemplo 1.1.

- La ecuación $x'(t) = x^2 - 4$, tiene dos puntos de equilibrio, $x^* = 2$ y $x^* = -2$.

Definición 1.5. Una EDO es autónoma si en ella no aparece de forma explícita la variable independiente.

Esto es, una ecuación de la forma:

$$x' = f(x) \quad (1.6)$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable.

Ejemplo 1.2. La ecuación del ejemplo (1.1) es autónoma.

- La ecuación diferencial $x'' + 4x' + 3x = 0$ es autónoma de 2do. orden, pues $x'' = -3x - 4x'$, donde $F(x, x') = -3x - 4x'$.
La ecuación diferencial $x'' + 4x = 0$ también es autónoma de 2do. Orden.
- La siguiente ecuación no es autónoma: $x'' + 3tx' + 2x = 0$, pues aparece la variable independiente t en ella.

La definición de punto de equilibrio para (1.6) es la misma que se dio para la ecuación (1.4).

1.1.3. Estabilidad de una ecuación autónoma.

Definición 1.6. Un punto de equilibrio x^* de la ecuación (1.6) es estable si toda solución $x = x(t)$ de (1.6) que en el instante inicial t_0 toma un valor x_0 suficientemente cercano a x^* , permanece próxima a x^* para todo $t > t_0$.

Esto es: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, $\delta = \delta(\varepsilon)$, tal que $|x_0 - x^*| < \delta$ implica $|x(t) - x^*| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$. Si además se tiene $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ se dice que el equilibrio es asintóticamente estable. Los equilibrios que no son estables, se les llama inestable. Ver (Figura 1.1).

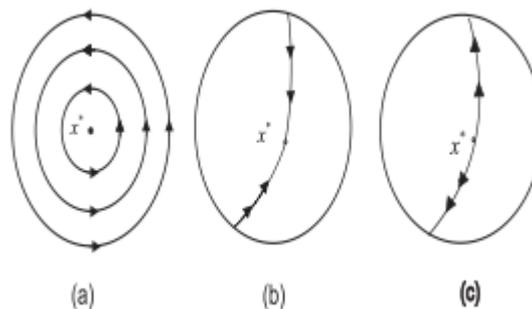


Figura 1.1: (a) Equilibrio estable, (b) Equilibrio asintóticamente estable, (c) Equilibrio inestable

Ejemplo 1.3. En la ecuación $x' = x^2 - 4$, los puntos críticos son $x^* = 2$, $x^* = -2$, además $f(x) = x^2 - 4, f'(x) = 2x \Rightarrow f'(-2) = -4 < 0 \Rightarrow x^* = -2$ es asintóticamente estable. $f'(2) = 4 > 0$, entonces $x^* = 2$ es inestable. Ver (Figura 1.2).

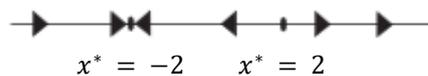


Figura 1.2

1.1.4. Sistemas de ecuaciones diferenciales.

Dada la naturaleza de la investigación, en este trabajo, se consideran sistemas de ecuaciones en dos dimensiones, esto es, sistemas con dos ecuaciones, pero la teoría en muchos casos se daría de manera general, para un sistema de n ecuaciones.

Solamente se trataría con sistemas de coeficientes constantes y autónomos.

Definición 1.7. Un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden en las n variables, x_1, x_2, \dots, x_n , es un sistema de la forma:

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\x_2' &= a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\&\vdots \\x_n' &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_n\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde los coeficientes $a_{ij}, b_i; i, j = 1, \dots, n$, son números reales. En notación matricial, la ecuación (1.7) se escribe así:

$$x' = Ax + b\tag{1.8}$$

Donde:

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La ecuación (1.8) es un sistema no homogéneo, si $b = 0$, la ecuación:

$$x' = Ax\tag{1.9}$$

es un sistema homogéneo.

Ahora un sistema con dos ecuaciones, es de la forma:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (1.10)$$

o también

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1.11)$$

esto es, $f(x, y) = a_{11}x + a_{12}y$, $g(x, y) = a_{21}x + a_{22}y$ son funciones lineales. Luego se tiene el sistema autónomo:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.12)$$

Ejemplo 1.4.

- El sistema:

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y \\ y' &= x - 3y \end{aligned}$$

es autónomo lineal.

- El sistema:

$$\begin{aligned} x' &= xy^2 \\ y' &= -y^2 \end{aligned}$$

es autónomo no lineal.

Definición 1.8. Se dice que λ es un valor propio de la matriz A en (1.9) si existe un valor $u \neq 0$ para el cual:

$$Au = \lambda u$$

en consecuencia, los valores propios de la matriz A son las raíces de la ecuación característica.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

o

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (1.13)$$

Donde I es la matriz identidad $n \times n$, y los vectores propios asociados a un valor propio λ son las soluciones u de la ecuación:

$$(A - \lambda I)u = 0 \quad (1.14)$$

Ejemplo 1.5.

$$\begin{aligned} x' &= x + 4y \\ y' &= 2x + 3y \end{aligned}$$

Solución

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, la ecuación característica es $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda - 5 &= 0 \\ \lambda_1 = 5 & \quad \lambda_2 = -1 \end{aligned}$$

para hallar los vectores propios se encuentran resolviendo las ecuaciones:

$(A - 5I)u = 0$ y $(A + I)u = 0$. Esto es:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Son los vectores propios asociados a los valores propios λ_1 y λ_2 .

Luego se tiene dos soluciones de la forma $e^{\lambda t}u$ del sistema dado

$$e^{\lambda_1 t}u_1 = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad e^{\lambda_2 t}u_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Estas dos soluciones forman un conjunto fundamental, pues:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{5t} & -e^{-t} \\ 5e^{5t} & e^{-t} \end{vmatrix} = 6e^{4t} \neq 0$$

Por lo tanto, la solución general se escribe así:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c_1, c_2 , son constantes arbitrarias.

1.1.5. Estabilidad de los sistemas de ecuaciones.

Definición 1.9. Un punto (x^*, y^*) es un punto de equilibrio (o estacionario) del sistema:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

Si y solo si $f(x^*, y^*) = 0$ y $g(x^*, y^*) = 0$.

Ejemplo 1.6.

- Hallar los puntos de equilibrio para el sistema:

$$\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x^3 + y \end{cases}$$

Solución

Sea: $1 - y = 0$, $x^3 + y = 0$

Por tanto, existe un único punto de equilibrio que es: $(x^*, y^*) = (-1, 1)$

Es decir, es la única solución que permanece constante en el tiempo.

- Hallar los puntos de equilibrio para el sistema:

$$\begin{cases} x' = (x - 1)(y - 1) \\ y' = (x + 1)(y + 1) \end{cases}$$

Solución

Sea: $(x - 1)(y - 1) = 0$ $(x + 1)(y + 1) = 0$

Por tanto, los puntos de equilibrio que es: $(x^*, y^*) = (1, -1)$ y

$$(x^*, y^*) = (-1, 1)$$

es decir:

$$f(x, y) = (x - 1)(y - 1) \Rightarrow f(1, -1) = 0$$

$$g(x, y) = (x + 1)(y + 1) \Rightarrow g(-1, 1) = 0$$

Definición 1.10. Se dice que un punto de equilibrio (x^*, y^*) del sistema:

$$\begin{cases} x' = f(x(t), y(t)) \\ y' = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Es estable si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ y $t_0 > 0$ tal que: $\|(x(t_0), y(t_0)) - (x^*, y^*)\| < \delta$

entonces $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon$ para todo $t > t_0$.

Caso contrario, se dice que (x^*, y^*) es inestable.

Además se afirma que (x^*, y^*) es asintóticamente estable, si es estable y $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$.

Considere la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio (x^*, y^*) :

$$J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

cuya ecuación característica es: $\det(J(x^*, y^*) - \lambda I) = 0$, cuyas raíces son los valores propios λ_1, λ_2 . Por lo que se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 1.1.

- i) El punto de equilibrio (x^*, y^*) es asintóticamente estable, si todos los valores propios tienen parte real negativa.
- ii) El punto de equilibrio (x^*, y^*) es inestable si al menos uno de los valores propios tiene parte real positiva.

Demostración

La demostración del teorema se puede ver en la bibliografía especializada y en [KellyW, PetersonA], lo que se hará a manera de ilustración:

“Para un sistema de dos ecuaciones diferenciales: Todos los valores tiene parte real negativa, esto es equivalente a $\det(J(x^*, y^*)) > 0$ y $\text{tra}(J(x^*, y^*)) < 0$

Ejemplo 1.7. En el siguiente sistema, hallar los puntos de equilibrio y ver su estabilidad.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1xy \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2xy \end{aligned}$$

Donde $a_1, b_1, a_2, b_2 > 0; x, y \geq 0$

Solución

El equilibrio (x^*, y^*) debe satisfacer:

$$\begin{aligned} a_1x^* - b_1x^*y^* &= 0 \\ a_2y^* - b_2x^*y^* &= 0 \end{aligned}$$

haciendo las operaciones adecuadas, se obtiene los siguientes equilibrios:

$$(0, 0) \text{ y } \left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right)$$

Para la estabilidad veamos Jacobiana, para ello hacemos:

$$f(x, y) = a_1x - b_1xy$$

$$g(x, y) = a_2y - b_2xy$$

Entonces el jacobiano es:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 - b_1y & -b_1x \\ -b_2y & a_2 - b_2x \end{pmatrix}$$

En cada punto de equilibrio (x^*, y^*) se tiene:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a_1 - b_1y^* & -b_1x^* \\ -b_2y^* & a_2 - b_2x^* \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

Para el equilibrio $(0,0)$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(J(0,0) - \lambda I) = 0$$

$$(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_1 = a_1, \lambda_2 = a_2$, se tiene que $a_1 > 0, a_2 > 0$ son positivos, luego $(0,0)$ es inestable.

Ahora para el punto $\left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right)$

$$J\left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-b_1a_2}{b_2} \\ \frac{-b_2a_1}{b_1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(J\left(\frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}\right) - \lambda I\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{-b_1 a_2}{b_2} \\ \frac{-b_2 a_1}{b_1} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - a_1 a_2 = 0$$

$$\lambda = \pm \sqrt{a_1 a_2}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{a_1 a_2} \quad \lambda_2 = -\sqrt{a_1 a_2}$$

Se observa un valor propio con parte real positiva, entonces el equilibrio es inestable.

1.1.6. Linealización de un sistema de ecuaciones diferenciales.

En el proceso de modelamiento, las ecuaciones que aparecen generalmente no son lineales, entonces para aplicar las teorías matemáticas es necesario linealizar las ecuaciones.

Considere el sistema:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad (1.16)$$

Sea (x^*, y^*) un punto de equilibrio del sistema.

Para evitar algunas confusiones, hagamos: $f = f_1$, $g = f_2$. Entonces se tiene:

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \quad (1.17)$$

Una solución cercana al punto de equilibrio de la forma $(x, y) = (x^* + \epsilon u, y^* + \epsilon v)$ cumple:

$$\begin{cases} x' = \epsilon u' = f_1(x^* + \epsilon u, y^* + \epsilon v) \\ y' = \epsilon v' = f_2(x^* + \epsilon u, y^* + \epsilon v) \end{cases} \quad (1.18)$$

Haciendo uso de la aproximación de Taylor en dos variables se obtiene $i = 1, 2$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_i(x^* + \epsilon u, y^* + \epsilon v) &\approx f_i(x^*, y^*) + D_1 f_i(x^*, y^*) \cdot \epsilon u + D_2 f_i(x^*, y^*) \cdot \epsilon v \\ &= \epsilon [D_1 f_i(x^*, y^*) u + D_2 f_i(x^*, y^*) v] \end{aligned} \quad (1.19)$$

Donde $D_j f_i$ son derivadas parciales de f respecto a las variables x o y .

Combinando (1.18) con (1.19), se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} u' = D_1 f_1(x^*, y^*)u + D_2 f_1(x^*, y^*)v \\ v' = D_1 f_2(x^*, y^*)u + D_2 f_2(x^*, y^*)v \end{cases} \quad (1.20)$$

en términos matriciales, se puede escribir así:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Donde:

$$J = \begin{bmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

1.2. Nociones básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo.

Se sabe que muchos fenómenos naturales como físicos, químicos y biológicos requieren de ecuaciones diferenciales para su descripción y estudio. Estas ecuaciones pueden ser diferenciales ordinarias o ecuaciones diferenciales parciales.

En una ecuación diferencial ordinaria, sin retardo que se llama EDO, la evolución en el tiempo " t " de algún fenómeno depende del estado actual del mismo en ese tiempo " t ". Por lo que una EDO no puede aplicar directamente los casos como:

- Duración de la cacería
- Digestión
- Historia de vida
- Gestación
- Duración de eventos
- Cualquier cosa que sucedió en el pasado, pero que es importante para la evaluación del fenómeno en el presente.

En muchos casos la respuesta de los modelos a los cambios en las variables dependientes no es instantáneo, sino que sucede después de un determinado lapso de tiempo (retardo).

En situaciones como esta es necesario usar Ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo, que se llamará simplemente EDR. Entonces se puede afirmar que las limitaciones de las EDO, las resuelve las EDR.

Antes de dar la definición de EDR, recordemos el problema de valor inicial para una EDO.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \quad (1.22a)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (1.22b)$$

Definición 1.11. Sea $t_0 \in \mathbb{R}, b \geq 0$ y $r \geq 0$. Si $x \in \mathcal{C}([t_0 - r, t_0 + b], \mathbb{R}^n)$, entonces para cualquier $t \in [t_0, t_0 + b]$ definimos $x_t \in \mathcal{C}$, siendo $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0, r], \mathbb{R}^n)$.

$$x_t(\tau) = x(t - \tau), \quad \tau > 0 \quad (1.23)$$

Definición 1.12. Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Una EDR es una ecuación en la que las derivadas de algunas funciones desconocidas en el momento actual depende de los valores de las funciones en momentos anteriores. Se escribe así:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t - \tau)) \quad (1.24)$$

$\tau > 0$ es el retardo.

El retardo se da en la función y en algunas de las derivadas de menor orden

Ejemplo 1.8. Son EDR las siguientes:

- i) $\frac{dx(t)}{dt} = -3x(t - 1)$
- ii) $x'(t) + x(t - 2) = 0$
- iii) $x''(t) = -x'(t) - x'(t - 1) - 3\text{sen}x(t) + \text{cost}$

Las siguientes no son EDR.

- i) $\frac{dx}{dt} = x(t) - x\left(\frac{t}{3}\right) + x'(t - 2)$
- ii) $x'(t) = x(t)x(t - 1) + t^3x(t + 2)$

Observación 1.1. Se conocen ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo discreto, que son las dadas en el ejemplo (1.8).

Esto, dependen de un valor específico de retardo. Una EDR discreto, puede tener más de un retardo.

También se conocen ecuaciones con retardo distribuido o continuo, esto es, cuando el retardo esta dado en un intervalo.

En el presente trabajo se usará un solo retardo discreto.

Definición 1.13. Una EDR general de primer orden, es de la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t \geq 0; \tau > 0 \quad (1.25)$$

Esta ecuación nos quiere decir: en el tiempo t la evolución del fenómeno depende de t , del estado actual del fenómeno y del estado para algún momento $\tau > 0$ en el pasado.

Definición 1.14. Un problema de valor inicial asociada a una EDR está dado por:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t \in [t_0, \tau] \quad (1.26a)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, t_0] \quad (1.26b)$$

Donde ϕ es alguna función dada. Entonces se busca la extensión continua de ϕ en el futuro, a una función x que satisface la ecuación (1.26a) para $t \geq t_0$ (figura 1.3)

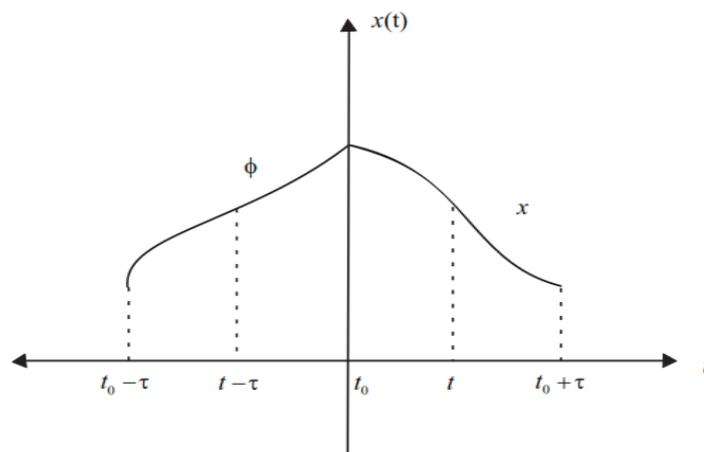


Figura 1.3. ilustración de la función “historia” ϕ

Observación 1.2. Si $t_0 = 0$ las ecuaciones (1.26a) – (1.26b) son:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad t \in [0, \tau] \quad (1.27a)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (1.27b)$$

1.2.1. Solución de una ecuación diferencial con retardo.

En el presente trabajo se considera EDR de primer orden con coeficientes constantes.

Las ecuaciones (1.25) se puede escribir así:

$$x'(t) = a_1x(t) + a_2x(t - \tau) \quad (1.28)$$

Sujeto a una condición inicial:

$$x'(t) = a_1x(t) + a_2x(t - \tau), \quad t \in [0, \tau] \quad (1.29a)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (1.29b)$$

Para solucionar una EDR tipo (1.28) y (1.29a) – (1.29b) se conoce el *Método de las Características* (MOC) y el *Método de los Pasos* (STEPS).

El MOC es apropiado para la ecuación (1.28) y STEPS es apropiado para el caso (1.29a) – (1.29b).

Resolver una EDR es un tanto complejo, comparado con resolver una EDO. A manera de ilustración, la siguiente EDO:

$$x'(t) = -ax(t), \quad \text{donde } a > 0$$

Tiene como solución:

$$x(t) = ce^{-at}, \quad c \text{ es constante arbitraria}$$

Note que la solución es uniparamétrica. (tiene un solo parámetro o cuadrante)

Ahora la EDR $x'(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ tiene una solución oscilante y con dos parámetros:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

En efecto

$$x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

También:

$$\begin{aligned}
 x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= c_1 \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\
 x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= c_1 \operatorname{sen} t - c_2 \cos t \\
 &= -(-c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t) \\
 -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \\
 -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) &= x'(t) \\
 x'(t) &= -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Dada la naturaleza compleja para resolver EDR, el objetivo en el presente trabajo es el estado cualitativo o geométrico de estas ecuaciones que son similares a las EDO.

Métodos de las características

El estudio cualitativo se hace de la ecuación diferencial con retardo más simple.

En la ecuación (1.28), hagamos $a_1 = 0$ y $a_2 = -b$

Entonces se tendría:

$$x'(t) = -bx(t - \tau), \quad b > 0 \quad (1.30)$$

Hallar la solución de (1.30) no es fácil y el comportamiento de las soluciones están determinadas por las raíces de la ecuación característica.

Igual que una EDO, asumimos una solución para (1.30) de la forma:

$$x(t) = e^{\lambda t}, \quad \lambda \text{ es una constante real o compleja.}$$

Reemplazando en (1.30):

$$\begin{aligned}
 \lambda e^{\lambda t} &= -b e^{\lambda(t-\tau)} \\
 \lambda e^{\lambda t} &= -b e^{\lambda t} \cdot b e^{-\lambda \tau} \\
 \lambda &= -b e^{-\lambda \tau} \\
 \lambda + b e^{-\lambda \tau} &= 0
 \end{aligned} \quad (1.31)$$

Si se considera $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in [0, \infty)$ en (1.31), se tiene:

$$\alpha + i\beta + be^{-\tau(\alpha+i\beta)} = 0$$

$$\alpha + i\beta + be^{-\tau\alpha} \cdot e^{-\tau i\beta} = 0$$

$$\alpha + i\beta + be^{-\tau\alpha} \cdot (\cos \tau\beta - i \operatorname{sen} \tau\beta) = 0 + i0$$

$$\alpha = -be^{-\tau\alpha} \cdot (\cos \tau\beta) \quad (1.32a)$$

$$\beta = be^{-\tau\alpha} \cdot (\operatorname{sen} \tau\beta) \quad (1.32b)$$

Ahora es necesario conocer donde la raíz λ sufre cambios y así afecta las soluciones.

TEOREMA 1.2. Sea $b, \tau \in (0, \infty)$, entonces para que todas las raíces λ de (1.31) tengan parte real negativa debe cumplirse:

$$0 < b\tau < \frac{\pi}{2} \quad (1.33)$$

De esta manera como en las EDO la solución sería estable.

Demostración

Supongamos que $b\tau < \frac{\pi}{2}$, se debe demostrar que las raíces de (1.31) tienen parte real negativa.

Por lo anterior supongamos que:

$\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha \geq 0$, tiene de (1.32a) – (1.32b) que λ no puede ser real y no negativa. De donde se debe suponer que $\beta > 0$. Entonces:

$$0 < b \Rightarrow 0 < \beta\tau \Rightarrow 0 < b\tau e^{-\alpha\tau} \operatorname{sen}(\beta\tau) \quad (1.34)$$

Ahora como $b\tau < \frac{\pi}{2}$, en (1.34)

$$0 < b\tau e^{-\alpha\tau} \operatorname{sen}(\beta\tau) < \frac{\pi}{2}$$

$$b\tau e^{-\alpha\tau} \operatorname{sen}(\beta\tau) < \frac{\pi}{2} \quad (1.35)$$

De (1.35) se deduce de α es no negativo, pero:

$$\alpha = -be^{-\tau\alpha} \cdot (\cos \tau\beta), \text{ lo que es una contradicción.}$$

Entonces en $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha < 0$.

TEOREMA 1.3. Sean $b, \tau \in (0, \infty)$ y $b\tau < \frac{\pi}{2}$ entonces las soluciones de (1.30) convergen exponencialmente a cero.

Esta convergencia es similar al caso de EDO.

Demostración

Debemos que probar que:

$$\left[\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)e^{\lambda_0 t} \right] = \frac{1}{1 + \lambda_0 \tau} \left[u(0) + \lambda_0 \int_{-\tau}^0 u(s)e^{-\lambda_0 s} ds \right] \quad (1.36)$$

donde λ_0 es una raíz real negativa de:

$$\lambda + be^{-\lambda\tau} = 0 \quad (1.37)$$

y u es alguna solución de:

$$u'(t) + bu(t - \tau) = 0 \quad (1.38)$$

es igual a cero

En efecto. Se define G de la siguiente manera:

$$G(\lambda) = \lambda + be - \lambda\tau$$

observe que:

$$\begin{aligned} G(0) &= b > 0 \\ G\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= -\frac{1}{\tau} + be^{-\left(-\frac{1}{\tau}\right)\tau} \\ &= -\frac{1}{\tau} + be = \frac{-1 + b\tau e}{\tau} \end{aligned}$$

por la condición $b\tau < \frac{1}{e} \Rightarrow b\tau e < 1$, entonces: $G\left(-\frac{1}{\tau}\right) < 0$.

Luego, existe una raíz real negativa de $\lambda + be^{-\lambda\tau} = 0$, señalando que todas las raíces:

$$\lambda_0 \in (-1/\tau, 0) \text{ satisfacen } |\lambda_0|\tau < 1$$

luego, de acuerdo a la teoría básica de antiderivación se tiene:

$$\frac{d}{dt} \left[y(t) + \lambda \int_{t-\tau}^t y(s) ds \right] = f(t) e^{-\lambda t}$$

ahora, alguna solución de (1.38) satisface:

$$\frac{d}{dt} \left[v(t) + \lambda_0 \int_{t-\tau}^t v(s) ds \right] = \left[u(0) + \lambda_0 \frac{d}{dt} \int_{t-\tau}^t v(s) ds \right]$$

haciendo $t = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[v(t) + \lambda_0 \int_{t-\tau}^t v(s) ds \right] &= \left[0 + \lambda_0 \int_{-\tau}^0 u(s) e^{\lambda_0 s} ds \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

reemplazando en (1.36):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [u(t) e^{\lambda_0 t}] = 0$$

Se resalta que el Teorema nos dice: Que para retardos pequeños las soluciones no sufren grandes cambios.

Además, si:

$$\frac{1}{e} < b\tau < \frac{\pi}{2}$$

Las soluciones convergen a cero, pero oscilando. Esta es una de las características de las ecuaciones con retardo, pues esto no sucede en una EDO lineal de primer orden. Para $b\tau \geq \frac{\pi}{2}$ aparecen soluciones periódicas y algunas no acotadas.

Método de los pasos.

Este método es mucho más intuitivo y también puede ser usado para resolver EDR con coeficientes variables sujeto a una condición inicial. Este método convierte la EDR en un intervalo dado en una EDO sobre este intervalo, utilizando la función historia conocida para ese intervalo o también llamada condición inicial. La ecuación resultante y el proceso se repite en el siguiente intervalo con la solución recién descubierta que sirve como función historia para el próximo intervalo.

Antes de dar los detalles de este método se verá un teorema similar al de que se conoce en la teoría de EDO.

TEOREMA 1.4. Dado el PVI

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t - \tau)) \quad (1.39a)$$

$$x(t_0) = \phi_0 \quad (1.39b)$$

Tiene una solución si y solo si la ecuación integral:

$$\mu(t) == \int_{t_0}^t f(s, u_s) ds \quad (1.40)$$

tiene la misma solución.

Demostración

⇒ Suponga se cumple (1.39a) – (1.39b) entonces se debe demostrar que se cumple (1.40). En efecto. Si se cumple (1.39a) – (1.39b) entonces existe una solución $x(t) = u(t)$ que satisface dichas ecuaciones. Esto es:

$$\frac{\partial u(t_0, \phi_0)(t)}{\partial t} = f(t, u_t(t_0, \phi_0))$$

$$u(t_0) = \phi_0$$

Ahora cambiando de t a s .

$$\frac{\partial u(s_0, \phi_0)(s)}{\partial s} = f(s, u_s(s_0, \phi_0))$$

integrando de t_0 a t ambos lados.

$$\int_{t_0}^t du(s_0, \phi_0) ds = \int_{t_0}^t f(s, u_s(s_0, \phi_0)) ds$$

$$u(t, \phi_0) - u(t_0, \phi_0) = \int_{t_0}^t f(s, u_s(s_0, \phi_0)) ds$$

$$u(t, \phi_0) = u(t_0, \phi_0) + \int_{t_0}^t f(s, u_s(s_0, \phi_0)) ds$$

$$u(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_s) ds$$

Supongamos que se cumple (1.40) entonces se debe demostrar (1 · 39a) – (1 · 39b).

⇐ **En efecto.** Derivando respecto a t la ecuación (1.40):

$$u'(t) = \frac{d}{dt} \left[\phi_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_s) ds \right]$$

$$u'(t) = f(t, u_t) = f(t, u(t - \tau))$$

por la condición inicial en [...] se hace $t = t_0$ y se tiene:

$$u(t_0) = \phi_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, u_s) ds$$

$$u(t_0) = \phi_0$$

a continuación, se dará detalles del método de los pasos.

Se considera las ecuaciones (1.27a) – (1.27b).

Paso 1.

En el intervalo $[-\tau, 0]$, la función $x(t)$ es la función dada $\phi(t)$, es la función conocida. Por lo tanto se dice que la ecuación es resuelta para el intervalo $[-\tau, 0]$ llamada esta solución $x_0(t)$ o $\phi_0(t)$.

Observación 1.3. Cuando $t \in [0, \tau]$, $t - \tau \in [-\tau, 0]$, entonces $x(t - \tau)$ se convierte en $x_0(t - \tau)$ en $[0, \tau]$.

Paso 2.

En el intervalo $[0, \tau]$, el sistema (1.27a) – (1.27b) se convierte en:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_0(t - \tau)), & \text{en } [0, \tau] \\ x(0) = \phi_0 \end{cases} \quad (1.41)$$

la ecuación (1.41) es una EDO y no es una EDR pues $x_0(t - \tau)$ es conocida y es sencilla la ecuación $\phi(t - \tau)$. Por lo tanto, solucionamos esta EDO en $[0, \tau]$ usando $x(0) = \phi(0)$ como la nueva condición inicial. Se denota por $x_1(t)$ esta solución en el intervalo $[0, \tau]$.

Paso 3.

En el intervalo $[\tau, 2\tau]$ el sistema se convierte en:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), x_1(t - \tau)) \\ x(\tau) = x_1(\tau) \end{cases} \quad (1.42)$$

que es una nueva EDO. Solucionaremos esta ecuación, haciendo uso de la ecuación inicial en τ y obtendremos una solución $x_2(t)$ para el sistema en $[\tau, 2\tau]$.

Estos pasos pueden continuarse para intervalos positivos.

Ejemplo 1.9. Estimar la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$x'(t) = x(t - 1), \quad t \in [0, 1] \quad (1.43a)$$

$$x(t) = 1, \quad t \in [-1, 0] \quad (1.43b)$$

Solución

siguiendo los pasos señalados anteriormente, la aproximación de la solución es así:

Por el Paso 1:

$x_0(t) = 1$ (ó $\phi_0(t) = 1$) es la solución para $t \in [-1, 0]$.

Por observación (1.2): $\phi_0(t) = (t - 1)$. La ecuación (1.43a) puede ser escrita en el intervalo $[0, 1]$ como la ecuación no autónoma sin retardo.

$$x'(t) = x(t - 1) = f(t, x(t))$$

$$x(t) = \phi_0(t - 1)$$

⇒)

$$\begin{aligned}x(t) &= x(0) + \int_0^t f(s, x(s)) ds \\ &= x(0) + \int_0^t \phi_0(s-1) ds \\ &= x(0) + \int_0^t 1 ds = 1 + t\end{aligned}$$

$$x(t) = 1 + t, \text{ solución para } t \in [0,1]$$

Procedimiento como lo anterior, se puede escribir (1.43a) en el intervalo $[1,2]$ como la EDO no autónoma.

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

$$x(t) = \phi_1(t-1)$$

Donde $\phi_1(t)$ está definida en $[0,1]$, $x_1(t) = 1 + t$, por lo tanto (1.43a) se puede escribir:

$$x'(t) = \phi_1(t-1), t \in [1,2]$$

donde $\phi_1(t) = 1 + t$, para $t \in [0,1]$

⇒)

$$\begin{aligned}x(t) &= x(1) + \int_1^t \phi_1(s-1) ds \\ &= x(1) + \int_0^t \phi_1(s) ds = x(1) + \int_0^t (1+s) ds \\ &= 2 + \left[s + \frac{s^2}{2} \right]_0^t\end{aligned}$$

$$x(t) = 2 + t + \frac{t^2}{2}, \quad \text{solución para } t \in [1,2]$$

Procediendo de manera similar para $t \in [2,3]$

$$x(t) = x(2) + \int_2^t \phi_2(s-1) ds$$

donde:

$$\phi_2(t) = 2 + t + \frac{t^2}{2}, \quad t \in [1,2]$$

y

$$x(2) = 6$$

⇒)

$$x(t) = 6 + \int_1^t \phi_2(s) ds$$

$$x(t) = 6 + \int_1^t \left(2 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds$$

$$x(t) = \frac{10}{3} + 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \quad t \in [2,3]$$

En algunos casos es posible hallar una expresión general para un problema de valor inicial trabajando en intervalos de la forma:

$$(n-1)\tau \leq t \leq n\tau, n \geq 0$$

para el ejemplo dado es: $(n-1) \leq t < n$ pues $\tau = 1$.

1.2.2. Sistema de ecuaciones diferenciales con retardo.

Las clases muy importantes de sistemas de ecuaciones con retardo, son los sistemas lineales con coeficientes constantes y sus retardos. Es de nuestro interés los sistemas autónomos.

Definición 1.15. Un sistema de n ecuaciones diferenciales con un solo retardo en n variables es de la forma:

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1(t - \tau), \dots, x_n(t - \tau)) \\x'_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1(t - \tau), \dots, x_n(t - \tau)) \\&\vdots \\x'_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1(t - \tau), \dots, x_n(t - \tau))\end{aligned}\tag{1.44}$$

siendo $\tau > 0$ el único retardo.

La ecuación (1.44) también se puede escribir así:

$$\begin{aligned}x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \dots + a_{1n} + b_{11}(t - \tau) + \dots + b_{1n}(t - \tau) \\x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \dots + a_{2n} + b_{21}(t - \tau) + \dots + b_{2n}(t - \tau) \\&\vdots \\x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2, \dots + a_{nn} + b_{n1}(t - \tau) + \dots + b_{nn}(t - \tau)\end{aligned}\tag{1.45}$$

en forma matricial es:

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)\tag{1.46}$$

donde A y B son matrices de orden $n \times n$.

Observación 1.4.

- a) El término $x(t - \tau)$ en (1.46) actúa como un escalar.
- b) En las ecuaciones (1.44), (1.45) y (1.46) se supone que el retardo afecta a todas las variables, pero en la práctica no es así, se puede dar el caso que el retardo afecta a una sola variable o a más, pero no a todas. Como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.10. Para $n = 3, \tau = 1$ se tiene el sistema:

$$\begin{aligned}x'_1(t) &= 2x_2(t) \\x'_2(t) &= x_3(t) + x_1(t - 1) \\x'_3(t) &= 2x_2(t - 1)\end{aligned}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t - 1).$$

note que el retardo solo afecta las variables x_1 y x_2 , que pueden ser las de más interés para el investigador.

Un sistema con más de un retardo, tiene la forma:

$$x'(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^m B_j x(t - \tau_j) \quad (1.47)$$

ecuación que no se considera en esta investigación.

La ecuación (1.46) es autónoma, por lo que se puede dotar de una condición inicial de la forma:

$$x(t) = \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq 0$$

donde $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$.

De la misma manera que en la solución de un sistema de EDO, en un sistema de EDR se busca soluciones de la forma:

$$e^{\lambda t} v \text{ del sistema dado, } v \neq 0$$

la ecuación característica para (1.46) que en general no es un polinomio, es de la forma:

$$\det[\lambda I - A - e^{-\lambda \tau}] = 0 \quad (1.48)$$

note que la ecuación (1.48) es una función trascendente.

$$h(\lambda) = \det[\lambda I - A - e^{-\lambda \tau}] \quad (1.49)$$

1.2.3. Linealización de un sistema EDR.

En la presente investigación se considera sistemas con dos variables, esto es de la forma:

$$x'_1 = f_1(x, y, x(t - \tau), y(t - \tau)) \quad (1.50a)$$

$$x'_2 = f_2(x, y, x(t - \tau), y(t - \tau)) \quad (1.50b)$$

donde f_1 y f_2 son funciones diferenciales.

También, un punto de equilibrio (x^*, y^*) satisface (1.50a) – (1.50b), si:

$$f_1(x^*, y^*, x^*, y^*) = 0 \quad (1.51a)$$

$$f_2(x^*, y^*, x^*, y^*) = 0 \quad (1.51b)$$

para linealizar (1.50a) – (1.50b), movemos el punto de equilibrio al origen, mediante la perturbación:

$$\epsilon u = x - x^*$$

$$\epsilon v = y - y^*$$

luego, una solución cercana al punto de equilibrio de la forma

$$(x, y) = (x^* + \epsilon u, y^* + \epsilon v)$$

cumple:

$$x' = \epsilon u' = f_1(x^* + \epsilon u, y^* + \epsilon v, x^* + \epsilon u_t, y^* + \epsilon v_t) \quad (1.52a)$$

$$y' = \epsilon v' = f_2(x^* + \epsilon u, y^* + \epsilon v, x^* + \epsilon u_t, y^* + \epsilon v_t) \quad (1.52b)$$

recuerde que: $u_t = u(t - \tau)$, $v_t = v(t - \tau)$.

Por medio de aproximaciones de Taylor u tiene:

$$\begin{aligned} & f_i(x^* + \epsilon u, y^* + \epsilon v, x^* + \epsilon u_t, y^* + \epsilon v_t) \\ & \approx f_i(x^*, y^*, x^*, y^*) + D_1 f_i(x^*, y^*, x^*, y^*) \epsilon u + D_2 f_i(x^*, y^*, x^*, y^*) \epsilon v \\ & \quad + D_3 f_i(x^*, y^*, x^*, y^*) \epsilon u_t + D_4 f_i(x^*, y^*, x^*, y^*) \epsilon v_t = \\ & = \epsilon [D_1 f_i(x^*, y^*, x^*, y^*) u + D_2 f_i(x^*, y^*, x^*, y^*) v + D_3 f_i(x^*, y^*, x^*, y^*) u_t \\ & \quad + D_4 f_i(x^*, y^*, x^*, y^*) v_t] \\ & = \epsilon [D_1 f_i u + D_2 f_i v + D_3 f_i u_t + D_4 f_i v_t] \end{aligned} \quad (1.53)$$

donde $D_j f_i$ son las derivadas parciales de f_i con respecto a la j -ésima variable evaluada en el punto (x^*, y^*, x^*, y^*) . Aquí $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3, 4$.

Finalmente, combinando (1.52a, 1.52b) con (1.53) se obtiene el sistema:

$$u' = D_1 f_1 \cdot u + D_2 f_1 \cdot v + D_3 f_1 u_t + D_4 f_1 v_t \quad (1.54a)$$

$$v' = D_1 f_2 \cdot u + D_2 f_2 \cdot v + D_3 f_2 u_t \quad (1.54b)$$

usando notación matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + J_D \begin{bmatrix} u_t \\ v_t \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

donde:

$$J = \begin{bmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

$$J_D = \begin{bmatrix} D_3 f_1 & D_4 f_1 \\ D_3 f_2 & D_4 f_2 \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Las derivadas parciales se evalúan en los puntos adecuados mencionados anteriormente. La ecuación (1.55) es la linealización (1.50a – 1.50b).

La ecuación característica para la ecuación linealizada se encuentra así: suponga que $(u, v) = (c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t})$ la forma de la solución para el sistema, al remplazar en (1.55) se obtiene:

$$\lambda e^{\lambda t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} J \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} J_D \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + e^{-\lambda \tau} J_D \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

o

$$[\lambda I - J - e^{-\lambda \tau} J_D] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0,$$

Entonces este sistema tiene una solución no trivial si:

$$\det [\lambda I - J - e^{-\lambda \tau} J_D] = 0 \quad (1.58)$$

donde J y J_D son las matrices definidas por (1.56) y (1.57).

La ecuación (1.58) es la ecuación característica para (1.50a – 1.50b).

Para matrices J y J_D 2×2 , como nuestro caso, la ecuación (1.58) se puede escribir así:

$$\det[\lambda I - J - e^{-\lambda\tau} J_D] = \lambda^2 + p\lambda + r + (s\lambda + q)e^{-\lambda\tau} + we^{-2\lambda\tau} \quad (1.59)$$

donde:

$$p = -tr(J)$$

$$r = \det(J)$$

$$s = -tr(J_D)$$

$$q = \det(J + J_D) - \det(J) - \det(J_D)$$

$$w = \det(J_D).$$

también (1.59) se puede escribir así:

$$\lambda^2 + p\lambda + r + (s\lambda + q)e^{-\lambda\tau} + we^{-2\lambda\tau} = 0 \quad (1.60)$$

como se ha mencionado, la estabilidad en los sistemas con retardo es similar a los tratados en los sistemas sin retardo como se vio en el Teorema (1.2)

1.3. Una ecuación especial con retardo

Esta ecuación es de mucha importancia en la presente investigación, el estudio de la estabilidad de sus soluciones representa el soporte teórico en el estudio de la estabilidad de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales con retardo.

Antes de enunciar el teorema relacionado a la estabilidad de las soluciones de esta ecuación, se hará un estudio preliminar de las posibles soluciones de esta ecuación.

Dada la ecuación:

$$x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau) \text{ para } a, b \in R, \tau > 0 \quad (1.61)$$

Hallamos la ecuación característica (en realidad una función trascendente).

Como en las EDO, una solución es de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$.

Remplazamos en (1.61):

$$\begin{aligned}
\lambda e^{\lambda\tau} &= ae^{\lambda\tau} + be^{\lambda(t-\tau)} \\
\lambda e^{\lambda\tau} &= ae^{\lambda\tau} + be^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda\tau} \\
\lambda e^{\lambda\tau} &= e^{\lambda\tau}(a + be^{-\lambda\tau}) \\
\lambda &= a + be^{-\lambda\tau} \\
\lambda - a - be^{-\lambda\tau} &= 0
\end{aligned} \tag{1.62}$$

o

$$h(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda\tau} \tag{1.63}$$

(1.62) es la ecuación característica.

Es importante escribir (1.62) de otra manera, para ello, multiplicamos a (1.62) por τ .

$$\lambda\tau - a\tau - b\tau e^{-\lambda\tau} = 0$$

Ahora, hagamos: $z = \lambda\tau$, $\alpha = a\tau$, $\beta = b\tau$.

Entonces

$$z - \alpha - \beta e^{-z} = 0 \tag{1.64}$$

o

$$F(z, \alpha, \beta) = z - \alpha - \beta e^{-z} \tag{1.65}$$

representa la función trascendente en tres variables.

Sin perder originalidad, se puede escribir:

$z = x + iy$, para hallar las raíces de (1.64) y (1.65).

En (1.64):

$$\begin{aligned}
z &= \alpha + \beta e^{-z} \\
x + iy &= \alpha + \beta e^{-(x+iy)} \\
&= \alpha + \beta e^{-x} \cdot e^{-iy} \\
(x - \alpha) + iy &= \beta e^{-x} (\cos y - i \operatorname{sen} y) \\
(x - \alpha) + iy &= \beta e^{-x} \cos y - i \beta e^{-x} \operatorname{sen} y
\end{aligned}$$

$$x = \alpha + \beta e^{-x} \cos y \quad (1.66a)$$

$$y = -\beta e^{-x} \operatorname{sen} y \quad (1.66b)$$

entonces, las raíces de (1.64) o (1.65) quedan determinadas por el sistema en (1.66a – 1.66b). Se puede limitar a considerar $y \geq 0$. Pero, primero veamos cuales son las raíces con parte real nula, esto es, con $x = 0$.

Cuando $y = 0$, se tiene que $z = 0$ es solución si o si $\alpha + \beta = 0$, esto es reemplazando en (1.66a) $0 = \alpha + \beta$, que resulta lo mismo que al reemplazar $z = 0$ en (1.64). Ahora, cuando $y > 0$ entonces $z = \pm iy$ es raíz si y sólo si:

$$y = -\beta \operatorname{sen} y$$

$$\alpha = -\beta \cos y$$

lo que se ha hecho es reemplazar $x = 0$ en (1.66a – 1.66b).

Esto dice que y no puede ser múltiplo de π , pues al reemplazar en la igualdad anterior se tendría un absurdo, más aún para cada $y \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{N}_0$ queda determinado un único par (α, β) dado por:

$$\beta = \left(\frac{-y}{\operatorname{sen} y} \right),$$

$$\alpha = \left(\frac{y \cos y}{\operatorname{sen} y} \right)$$

lo que se ha hecho es reemplazar $x = 0$ en (1.66a – 1.66b), luego hallar α y β . Esto permite definir curvas suaves en el plano (α, β) , dadas por:

$$C_k = \{(\alpha(y), \beta(y)) / y \in \langle k\pi, (k + 1)\pi \rangle\}$$

estas curvas son todas disjuntas y son autointersecciones.

En efecto. Si $(\alpha(y), \beta(y)) = (\alpha(\bar{y}), \beta(\bar{y}))$ para ciertos, $y \in \langle k\pi, (k + 1)\pi \rangle$,

$\bar{y} \in \langle \bar{k}\pi, (\bar{k} + 1)\pi \rangle$ se deduce que:

$$\left(\frac{y \cos y}{\operatorname{sen} y}, \frac{-y}{\operatorname{sen} y} \right) = \left(\frac{\bar{y} \cos \bar{y}}{\operatorname{sen} \bar{y}}, \frac{-\bar{y}}{\operatorname{sen} \bar{y}} \right)$$

$$\frac{y \cos y}{\operatorname{sen} y} = \frac{\bar{y} \cos \bar{y}}{\operatorname{sen} \bar{y}} \quad (1.67a)$$

$$\frac{y}{\text{sen}y} = \frac{\bar{y}}{\text{sen}\bar{y}} \quad (1.67b)$$

En (1.67b)

$$\text{sen}y = \frac{y \text{sen}\bar{y}}{\bar{y}}$$

reemplazamos en (1.67a)

$$\begin{aligned} \frac{\bar{y}y \text{cos}y}{y \text{sen}\bar{y}} &= \frac{\bar{y} \text{cos}\bar{y}}{\text{sen}\bar{y}} \\ \text{cos}y &= \text{cos}\bar{y} \end{aligned} \quad (1.68)$$

La cual dá lugar a dos posibles situaciones:

- $y = \bar{y} - 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{sen}y &= \text{sen}(\bar{y} - 2n\pi) \\ &= \text{sen}\bar{y} \text{cos}(2n\pi) + \text{cos}\bar{y} \text{sen}(2n\pi) \\ \text{sen}y &= \text{sen}\bar{y} \end{aligned} \quad (1.69)$$

también: $\beta(\bar{y}) = \frac{-\bar{y}}{\text{sen}\bar{y}} \Rightarrow \bar{y} = -\beta(\bar{y})\text{sen}\bar{y}$

Reemplazando (1.69) en esta última ecuación:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= -\beta(y)\text{sen}y = y \\ \bar{y} &= y \end{aligned}$$

- $y = -\bar{y} + 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. Procediendo como en lo anterior, se tiene:

$$\text{sen}y = -\text{sen}\bar{y}$$

nuevamente como lo anterior se obtiene.

$$\bar{y} = -y$$

lo que es un absurdo.

Note, también, que C_0 se puede extender en forma continua incluyendo el valor de $y = 0$, de modo que se encuentre con la recta $\alpha + \beta = 0$ en el punto $(-1,1)$. Así:

$$\beta = -\alpha \Rightarrow$$

$$(\alpha(y), \beta(y)) = (\alpha(y), -\alpha(y))$$

$$= \left(\frac{y \cos y}{\operatorname{sen} y}, \frac{-y \cos y}{\operatorname{sen} y} \right)$$

$$= \frac{y \cos y}{\operatorname{sen} y} (1, -1)$$

se obtiene el punto $(1, -1)$.

Por otra parte, para $y \in \langle 0, \pi \rangle$ se cumple que $\alpha'(y), \beta'(y) < 0$ de modo que tanto α como β decrecen y además:

$$\lim_{y \rightarrow \pi} \alpha(y) = -\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow \pi} \beta(y) = -\infty$$

Finalmente, observamos que la curva se mete en el primer cuadrante por el punto $(0, -\pi/2)$ y se acerca asintóticamente a la recta $\alpha = -\beta$, siempre por debajo de ella.

En efecto. Es suficiente ver que:

$$\alpha(y) - \beta(y) = \frac{y(1 + \cos y)}{\operatorname{sen} y} > 0 \text{ para } y \in \langle 0, \pi \rangle$$

por otro lado:

$$\lim_{y \rightarrow \pi} \frac{y(1 + \cos y)}{\operatorname{sen} y} = 0$$

Llamamos Ω a la región no acotada que queda debajo de la recta $\alpha + \beta = 0$ y arriba de C_0 , es decir, esa especie de "triángulo infinito" que queda determinado en la (Figura 1.4).

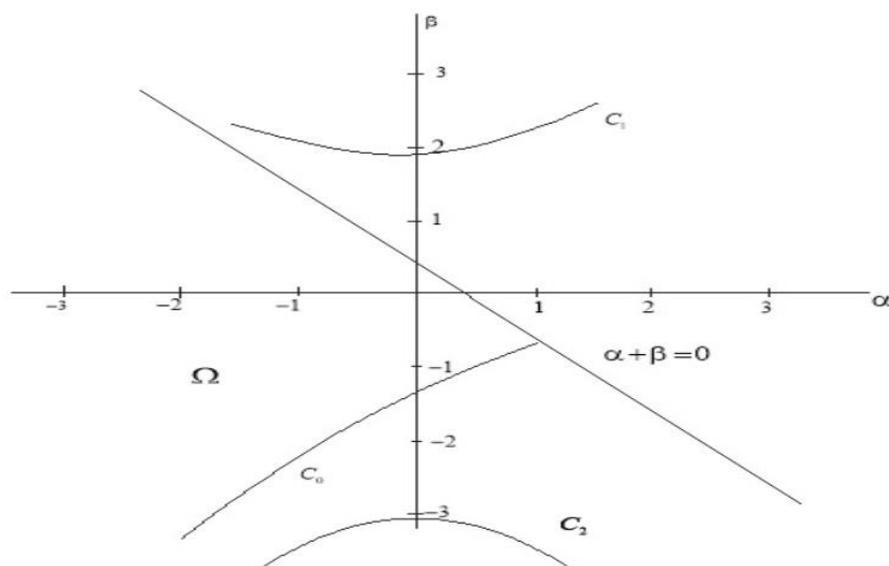


Figura 1.4

Se nota que las curvas C_k para $k > 0$ no tocan la región Ω .

El objetivo es probar que si $(\alpha, \beta) \in \Omega$, entonces el origen es un punto de equilibrio. Para tal fin, para cada (α, β) fijo, se considera el número $N \in \mathbb{N}_0$ dado por:

$$N(\alpha, \beta) = \{z \in \mathbb{C} \text{ raíz característica} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$$

Se prueba que si $N(\alpha, \beta) = 0$ para todo $(\alpha, \beta) \in \Omega$ todas las raíces características tienen parte real negativa.

También se prueba que si $(\alpha, \beta) \notin \Omega$, entonces hay alguna raíz característica con parte real positiva, esto es, cuando $N(\alpha, \beta) > 0$.

TEOREMA 1.5. Para la ecuación escalar $x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$ cuya ecuación característica es:

$$h(\lambda) = \lambda - a - b\epsilon^{-\lambda\tau}$$

o

$$\lambda = a + b\epsilon^{-\lambda\tau} \quad (1.70)$$

Entonces:

- i) Si $a + b > 0$, el equilibrio $x = 0$ es inestable.
- ii) Si $a + b < 0$ y $b \geq a$, el equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable.
- iii) Si $a + b < 0$ y $b < a$, existe un valor $\tau^* > 0$, tal que el equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable para $\tau < \tau^*$ e inestable para $\tau > \tau^*$.

Demostración

La demostración se puede ver en la bibliografía (Smith, H.) y (Amster, P.).

Lo que se hará es una interpretación de acuerdo a lo detallado en esta sección.

Se observa que para $a + b = 0$ se tiene $\lambda = 0$ es raíz característica y cualquier constante es un punto de equilibrio, así que se supondrá que: $a + b \neq 0$.

- i) En tal caso, se sabe que hay inestabilidad si $(\alpha, \beta) \notin \Omega$. Esto ocurre siempre para $\alpha + \beta > 0$, es decir, cuando $a + b > 0$.
- ii) Ahora, la región que queda debajo de la recta $\alpha + \beta = 0$ y encima de la recta $\alpha = \beta$ (incluyéndola) está contenida en Ω y para estos valores hay estabilidad asintótica. Esta situación corresponde al caso $a + b < 0$ y $b \geq a$.

- iii) Cuando $a + b < 0$ y $b < a$ sigue habiendo estabilidad asintótica mientras (α, β) se mantenga estrictamente por encima de C_0 . Como $(\alpha, \beta) = \tau(a, b)$ y además $0 \in \Omega$, se observa que $(\alpha, \beta) \in \Omega$ para valores pequeños de τ , y $(\alpha, \beta) \notin \Omega$ cuando τ es grande.

Observe además, que para $y \in \langle 0, \pi \rangle$ se tiene $\alpha'(y) < \beta'(y)$, lo que quiere decir que la semirecta $\{\tau(a, b)/\tau > 0\}$ no puede cortar a la curva C_0 más de una vez, esto es, existe un único valor τ^* para el cual $(\alpha, \beta) \in C_0$, se deduce que $x = 0$ es asintóticamente estable para $0 < \tau < \tau^*$ inestable para $\tau > \tau^*$.

1.4. Teoría de bifurcaciones

Las bifurcaciones están unidas a los puntos fijos. Una característica de un punto fijo es su estabilidad. Una manera intuitiva sería colocar una partícula en el punto fijo y perturbarla ligeramente de esa posición de equilibrio.

Supongamos que se tiene el sistema $x' = f(x)$, con punto fijo en $x^* = 0$. De no ser así haríamos una translación para llevar el punto fijo al origen. Si perturbamos ligeramente una partícula situada en $x^* = 0$, pasaría a $x = x^* + \varepsilon = \varepsilon$. Al introducirlo en la ecuación diferencial queda:

$$x' = \varepsilon' = f(0 + \varepsilon) = f(0) + \varepsilon f'(0)$$

Como $x^* = 0$ es un punto fijo, se cumple $f(0) = 0$, por lo que resulta $\varepsilon' = \varepsilon f'(0)$ integrando se obtiene

$$\varepsilon = C e^{f'(0)t}$$

Por lo tanto, si es $f'(0) > 0$, la perturbación crece con el tiempo: la partícula se alejaría de la posición de equilibrio, el punto sería inestable. Por el contrario si es $f'(0) < 0$, la perturbación disminuye con el tiempo: la partícula regresaría al punto de equilibrio, el cual sería estable.

Como el signo de la derivada de $f(x)$ no cambia por una translación, se deduce que un punto fijo x^* es estable si $f'(x^*) < 0$ e inestable si $f'(x^*) > 0$.

Ejemplo 1.11

Para el sistema $f(x) = \mu - x^2$ determinar un análisis de estabilidad.

Solución:

Cuando $f(x) = 0$ se tiene que $\mu = x^2$

entonces $x^* = \pm\sqrt{\mu}$

Entonces resultan 2 puntos fijos para cuando $\mu \geq 0$ y ninguno para $\mu < 0$.

Para determinar la estabilidad lineal, se deriva si $f(x^*)$

$$\Rightarrow f'(x^*) = -2x^*$$

Los valores de x^* se reemplazan en $f'(x^*)$

$$f'(x^*) = -2(+\sqrt{\mu}) \Rightarrow f'(x^*) < 0 \quad \text{Estable}$$

$$f'(x^*) = -2(-\sqrt{\mu}) \Rightarrow f'(x^*) > 0 \quad \text{Inestable}$$

$$f'(x^*) = 0 \quad \text{Para cuando } \mu = 0 \Rightarrow \text{"Punto de Bifurcación"}$$

1.4.1. Bifurcación Silla-Nodo

La Bifurcación Silla-nodo es el mecanismo básico por el que los puntos de equilibrio se crean y se destruyen. Mientras un parámetro es variado, los 2 puntos fijos se mueven el uno hacia el otro, chocando y aniquilándose mutuamente.

Ejemplo 1.12:

Sea $f(x) = \mu + x^2$. Los puntos fijos del sistema vienen dados por:

$\mu + x^2 = 0$, ó $x^* = \pm\sqrt{-\mu}$ y solo existen para $\mu \leq 0$.

Para $\mu > 0$ no hay puntos fijos. Según se disminuye μ se alcanza el valor de $\mu = 0$, en el cual se produce la bifurcación y se crea un punto fijo: un punto silla-nodo, de aquí de aquí el nombre de la bifurcación. Para $\mu < 0$ hay dos puntos fijos: uno estable, el nodo y el otro inestable, el silla.

1.4.2. Bifurcación De Hopf

Considérese un sistema de 2 dimensiones con un punto fijo estable. ¿Cuáles son todas las posibles vías en la que podría perder estabilidad cuando un parámetro μ varía? La respuesta se encuentra en los valores propios del Jacobiano. Si el punto fijo es estable, los valores propios λ_1, λ_2 , deben estar en la parte izquierda del plano real-imaginario $Re\lambda < 0$. Desde que los satisfagan la ecuación cuadrática con coeficientes reales, existen 2 posibles diagramas: Uno de ellos son valores reales negativos (figura 1.5.a); u otro en que los valores son complejos conjugados. Para desestabilizar el punto fijo, uno o ambos valores propios deben cruzar a la mitad derecha del plano mientras μ varia.

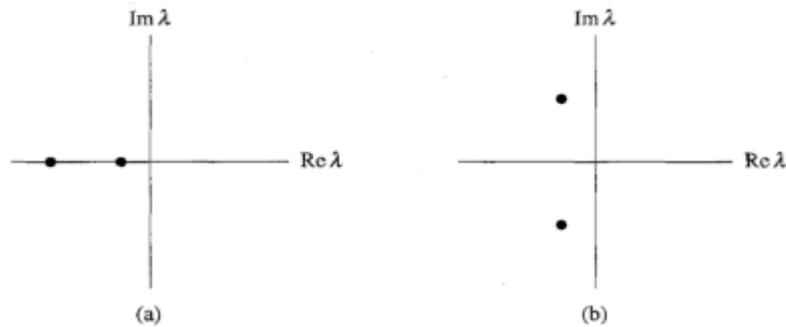


Figura 1.5. Diagrama de valores propios

El punto donde un par de valores característicos complejos conjugados alcanza al eje imaginario y cruzan hacia la parte derecha del plano complejo con respecto al cambio del parámetro de bifurcación, es conocido como un punto de bifurcación Hopf.

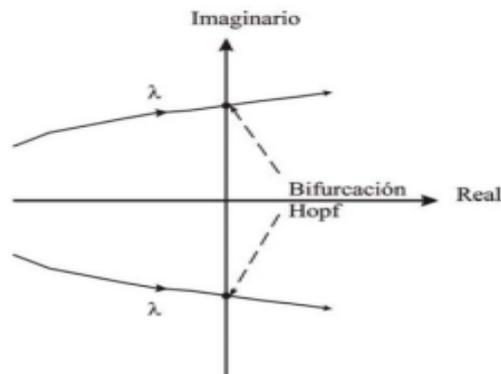


Figura 1.6.

Definición 1.16: Sean las condiciones de aparición de ciclos límites para un sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu) \text{ con } x \in \mathbb{R}^n \text{ y } \mu \in \mathbb{R} \text{ con } f(x^e, \mu^0) = 0$$

Aparece un ciclo limite cuando un par de autovalores complejos del Jacobiano $A(\mu) = D_x f(x^e(\mu), \mu)$ crucen el eje imaginario cumpliendo la condición de transversalidad.

$$\left. \frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\mu))}{d\mu} \right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$$

Siendo μ_0 el valor para el que $A(\mu_0)$ tiene solo un par de raíces puramente imaginarios.

Capítulo 2.

Modelo de depredador – presa sin retardo

Los retardos son naturales en los sistemas biológicos, pues ello permite la coexistencia de poblaciones en competición como una solución periódica no forzada.

La presencia de términos con retardo en un modelo depredador – presa está bien justificada, ya que el comportamiento de los sistemas dinámicos no sólo dependen en general del presente, sino también del pasado.

2.1. Aspectos preliminares a la formulación del modelo

En esta parte de la investigación, se describen los principios básicos para la formulación del modelo.

2.2.1. Principios Biológicos.

Se consideran los siguientes principios biológicos:

- Las especies pueden interactuar entre ellas de diferentes maneras, pudiendo ser estas interacciones positivas (+), negativas (-) o no presentar ningún efecto (0).
- Si las dos poblaciones se benefician mutuamente, la interacción es (+ +), o positiva, y recibe el nombre de mutualismo.
- Cuando una especie proporciona una condición necesaria para el bienestar de otra, la relación (+ 0) es de comensalismo.
- Las relaciones en las que una de las especies se beneficia a expensas de la otra (+ -) son la depredación, el parasitismo y el parasitoidismo.

- La relación en la cual las poblaciones de ambas especies asociadas se ven afectadas negativamente (- -) es competencia interespecífica.
- La competencia intraespecífica produce una selección hacia el ensanchamiento en la base de los recursos utilizados, o una generalización, mientras que la competencia interespecífica favorece una reducción en la base de recursos utilizados, o una especialización (R. L. Smith y T. M. Smith, 2001).

2.2.1. Principios Matemáticos.

A finales del siglo XVIII, Malthus, publicó su ensayo sobre dinámica de la población (*An Essay on the Principle of Population*), según el cual propone el principio de que las poblaciones humanas crecen exponencialmente (es decir, se duplican con cada ciclo). Esta es una observación muy simple pero bastante razonable a su vez, y puede ser formulada de la siguiente manera (A. A. Berryman, 1992).

Siendo $x(t)$ el tamaño de la población en el instante t , el modelo exponencial presupone que la tasa de aumento de la población es proporcional a la población en ese instante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx(t) \quad (2.1)$$

Donde k es una constante de proporcionalidad.

La ecuación malthusiana en (1) puede resultar adecuada cuando el tamaño de la población es pequeño en relación a las dimensiones del ecosistema y, en ese caso, k representaría la tasa de aumento de la población que iguala a la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad.

Por el contrario, cuando la población cuyo crecimiento pretende ser estudiado mediante la expresión en (1) alcanza un cierto tamaño en relación al ambiente ecológico donde se desarrolla la población, el modelo exponencial puede dejar de ser adecuado porque los factores limitantes del crecimiento como la escasez de recursos reducen la tasa de incremento de la población. En estos casos resulta adecuado introducir un término que dé cuenta de la capacidad del ecosistema para sostener una gran población. El modelo resultante llamado modelo logístico está basado en la curva logística o curva en forma de "S" (gráfica 2.1). Este modelo es adecuado para describir el crecimiento de una población de personas tanto como el de bacterias en un cultivo o la forma en que se propaga una epidemia.

En 1838, el matemático belga Pierre-François Verhulst, tras leer el ensayo de Malthus, publicó un modelo continuo (basado en una ecuación diferencial ordinaria) usando la ecuación logística:

$$\frac{dx(t)}{dt} = mx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) \quad (2.2)$$

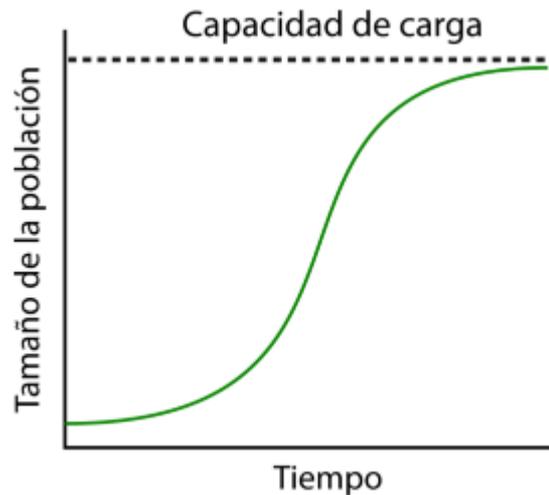


Figura 2.1. Ecuación Logística

Donde “m” es la tasa de crecimiento de la población y K la capacidad de carga del entorno, es decir, la cantidad máxima de población que es capaz de sostener el entorno de forma indefinida.

2.2. Formulación del modelo

2.2.1. El modelo de crecimiento de población de Malthus

Thomas Robert Malthus (1766–1834) fue uno de los primeros investigadores en estudiar la dinámica de poblaciones. Él propuso, alrededor de 1798, un modelo matemático de crecimiento de poblaciones basado en la idea de que (la tasa per cápita de crecimiento de una población es directamente proporcional a su tamaño). Su modelo, aunque simple, ha sido la base de muchos modelos de crecimiento de poblaciones biológicos. El modelo de Malthus se puede describir en términos del tiempo como variable continua por la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} = b - d = 0 \quad (2.3)$$

donde $x(t)$ denota la densidad o tamaño de la población de una especie al tiempo t y los parámetros $b > 0$ y $d > 0$ son las tasas per cápita de nacimiento y muerte respectivamente, las cuales suponemos que son constantes, de forma que $r \in \mathbb{R}$ es la tasa per cápita neta de crecimiento de la población.

2.2.2. El modelo de logístico de crecimiento de poblaciones

Cuarenta años más tarde, en 1838, el matemático belga Pierre Francois Verhulst (1804-1849) modificó el caso 1 al introducir un término inhibitor en la ecuación (3), el cual es proporcional al tamaño de la población $x(t)$, para así tomar en cuenta la competencia entre los miembros de la población por los recursos (agua, comida, etc.), los cuales no estarán disponibles en cantidades ilimitadas. El modelo de Verhulst se puede describir en términos del tiempo como variable continua por la ecuación diferencial.

$$\frac{x(t)}{dt} = mx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k} \right) \quad (m > 0, k > 0) \quad (2.4)$$

Donde “m” es la tasa de crecimiento de la población y K la capacidad de carga del entorno, es decir, la cantidad máxima de población que es capaz de sostener el entorno de forma indefinida.

Esta ley también ha sido utilizada para ajustar poblaciones humanas. Las siguientes suposiciones son intrínsecas al modelo logístico:

- La población está uniformemente distribuida en el hábitat. Entonces la densidad de población (i. e. el tamaño de la población por unidad de área) no varía con la posición, pero sí con el tiempo.
- No hay migración. La población cambia únicamente debido al nacimiento y muerte de los individuos.

Definición 2.1. Consideremos una ecuación diferencial autónoma, ordinaria de primer orden.

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.5)$$

1. Una solución constante $x(t) = C$ de (2.5) se llama punto de equilibrio (o estacionario). Un punto de equilibrio corresponde a $\frac{dx}{dt} = f(x) = 0$.
2. Un punto de equilibrio C es estable si $x(t) \rightarrow C$ si $t \rightarrow \infty$, para toda condición inicial $x(0)$.
3. Si un punto de equilibrio no es estable, entonces es inestable.

El sistema descrito por la ecuación diferencial (2.4) tiene dos puntos de equilibrio:

- $x = 0$ es un punto de equilibrio inestable.
- $x = K = \frac{m}{c}$ es un punto de equilibrio estable.

2.3. El modelo depredador-presa de Lotka – Volterra

Uno de los modelos más conocidos universalmente en matemáticas es el modelo para la interacción de una sola especie depredadora y una sola especie presa, desarrollado por el biofísico americano Alfred Lotka y el matemático italiano Vito Volterra. El modelo de Lotka-Volterra (L-V) describe las interacciones entre dos especies en un ecosistema: Una población que consiste en presas (ej. liebres) y una población de depredadores (ej. zorros), donde se supone las siguientes hipótesis:

1. Sea $x = x(t)$ la densidad de liebres en el tiempo t , que en ausencia de zorros tiene un crecimiento exponencial.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x, \alpha > 0$$

2. Sea $y = y(t)$ la densidad en el tiempo t de zorros que, en presencia de estos depredadores, $x(t)$ es decreciente debido al consumo de los zorros a una tasa proporcional a xy .

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - axy, \alpha > 0, a > 0$$

Aquí dx representa la densidad de especie presa consumidas por la especie depredadora en una unidad de tiempo.

3. En ausencia de liebres, la densidad de zorros $y(t)$ decrecerá exponencialmente a cero (extinción).

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y + bxy, \beta > 0, b > 0$$

Aquí $\frac{b}{a}$ es llamado factor de conversión y claramente $0 < \frac{b}{a} < 1$, de manera que $0 < b < a$. Entonces el modelo L-V, se resume así:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - axy = x(\alpha - ay) \quad (2.6)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y + bxy = y(-\beta + bx) \quad (2.7)$$

Desafortunadamente el modelo (2.6) – (2.7) no es matemáticamente sólido. Es estructuralmente inestable, es decir un cambio arbitrariamente pequeño en la naturaleza del modelo cambia fundamentalmente el comportamiento cualitativo de las soluciones.

Por ejemplo, se podría cambiar el sistema de la siguiente manera

$$\frac{dx}{dt} = ax - axy - \varepsilon x^2 \quad (2.8)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y + bxy - \varepsilon x^2 \quad (2.9)$$

donde $\varepsilon > 0$. Esta alteración corresponde a la competencia intraespecie cuando el número de presas se hace arbitrariamente grande y es llamado término de crecimiento logístico. La competencia intraespecie también se da en la población de depredadores. Este cambio en la naturaleza del modelo altera por completo la naturaleza del retrato de fase. Existen varias maneras posibles de hacer que el modelo L-V sea más aceptable matemática y biológicamente. Una opción es incluir efectos estocásticos en el modelo. Esto a menudo puede conducir a oscilaciones sostenidas debido a la constante perturbación del sistema.

Otra opción es escoger no linealidades más “fuentes” en el término depredador. Se puede escribir el término depredación como $p(x)$, donde $p(x)$ es conocido como respuesta funcional. La respuesta funcional, o tasa de consumo, expresa la acción de los depredadores en la tasa de crecimiento de la población de presas, y representa la cantidad de presas que puede consumir un depredador en una unidad de tiempo. se describen cuatro categorías de respuesta funcional encontrados en la literatura ecológica.

Tipo I: Esta respuesta funcional se obtienen suponiendo que el cambio en la densidad de la población de depredadores es proporcional a la densidad de la población de presas disponibles, esto es, existe un aumento lineal de la tasa de ataque de la población de depredadores respecto a la densidad de población de presas, hasta llegar a un punto a partir del cual la tasa máxima de ataque se hace constante.

$$p(x) = \begin{cases} \gamma x, & 0 \leq x < c \\ \gamma c & c \geq x \end{cases}$$

donde γ es la tasa instantánea de presa descubierta, c representa la saturación, $x(t)$ es la densidad de la población de presas en el tiempo $t \geq 0$.

Tipo II: Es la llamada respuesta Monod.

$$p(x) = \frac{\gamma x}{a + x}$$

que es hiperbólico, γ es la tasa máxima de consumo per cápita y a es la tasa de saturación media, es decir, la cantidad de presas en el que la tasa de depredación alcanza la mitad de su valor máximo.

Tipo III: Es una respuesta sigmoideal

$$p(x) = \frac{\gamma x^2}{a^2 + x^2}$$

que incluye la característica de que los depredadores son ineficientes cuando los niveles de presas son bajos. Estos tres tipos de respuesta funcional son todas funciones en aumento de la población de presas x . Una respuesta tipo IV es utilizada para modelar comportamientos antidepredadores, como grupo de defensa o toxicidad para los depredadores.

Entonces, el modelo L-V, ecuaciones (6) y (7)

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t)) - h(x(t))y(t) \quad (2.10)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y(t) + h(x(t))y(t) \quad (2.11)$$

Otra opción para modificar el L-V es incluyendo un retardo.

2.4. Estabilidad local del modelo de Lotka – Volterra

Sabemos que el modelo de Lotka-Volterra tiene dos puntos de equilibrio, a saber

$$0 \equiv (0,0) \text{ y } P \equiv \left(\frac{r_2}{\beta_2}, \frac{r_1}{\beta_1} \right)$$

Sean

$$f_1(x(t), y(t)) = r_1 x(t) - \beta_1 x(t) \cdot y(t) \quad (2.12a)$$

$$f_2(x(t), y(t)) = r_2 x(t) - \beta_2 x(t) \cdot y(t) \quad (2.12b)$$

Donde $r_i, \beta_i > 0$ (con $i = 1,2$) son constantes positivas. Entonces

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = r_1 - \beta_1 y(t) \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\beta_1 x(t) \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \beta_2 y(t) \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} = -r_2 - \beta_2 x(t) \qquad (2.13b)$$

Analicemos ahora los puntos de equilibrio sustituyéndolos en (2.13a) y (2.13b)

I. PUNTOS DE EQUILIBRIO (0,0). En este caso tenemos.

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_{(0,0)} = r_1, \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 0, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_{(0,0)} = -r_2 \qquad (2.14)$$

Por lo tanto, la ecuación característica es:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - (r_1 - r_2)\lambda - r_1 r_2 &\Rightarrow (\lambda - r_1)(\lambda - r_2) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = r_1, -r_2 \end{aligned}$$

Observamos entonces que las raíces de la ecuación característica son reales y tienen signos opuestos, y por lo tanto el punto de equilibrio (0,0) es inestable, es un punto silla.

II. PUNTOS DE EQUILIBRIO P $\equiv \left(\frac{r_2}{\beta_2}, \frac{r_1}{\beta_1} \right)$. En este caso tenemos

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x} \right|_P = 0, \quad \left. \frac{\partial f_1}{\partial y} \right|_P = \frac{-\beta_1 r_1}{\beta_2}, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial x} \right|_P = \frac{\beta_2 r_1}{\beta_1}, \quad \left. \frac{\partial f_2}{\partial y} \right|_P = 0 \qquad (2.15)$$

Por lo tanto, la ecuación característica es:

$$\lambda^2 + r_1 r_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i \sqrt{r_1 r_2} \quad (\text{donde } i = \sqrt{-1})$$

Entonces el punto de equilibrio P es estable pero no asintóticamente estable, es un centro.

Concluimos que el punto de equilibrio ((interno)), o de coexistencia, del modelo de Lotka-Volterra, es decir $P \equiv \left(\frac{r_2}{\beta_2}, \frac{r_1}{\beta_1} \right)$, no es asintóticamente estable. La ausencia de estabilidad asintótica de un punto de equilibrio indica que el sistema de Lotka – Volterra no posee un mecanismo para mantener un estado de coexistencia estable. Desde el punto de vista ecológico, la causa detrás de esto es la ausencia del concepto de capacidad de carga del hábitat para la especie de presas (es decir, la ausencia de competencia intraespecífica dentro en el hábitat para la especie de presas). Desde el punto de vista de la teoría de la estabilidad, el estado estable no trivial $\left(\frac{r_2}{\beta_2}, \frac{r_1}{\beta_1} \right)$ es un estado de equilibrio neutral.

Capítulo 3.

Modelo depredador – presa utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo

En muchos modelos depredador-presa con EDO se ignora el tiempo de demora para la conversión de biomasa de presa consumida en biomasa del depredador, ya sea en forma de crecimiento o reproducción del tamaño corporal. Se estudia un modelo depredador-presa que incluye un retardo de tiempo discreto que modela los retrasos entre la captura de la presa y su conversión en biomasa viable, considerando algunas funciones de crecimiento de la presa.

3.1. Formulación del modelo.

Sea $\tau > 0$ el retardo descrito líneas arriba y se considera la respuesta funcional tipo I para ambos casos, entonces el sistema es de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t)) - h(x(t))y(t) \quad (3.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\beta y(t) + h(x(t-\tau))y(t-\tau) \quad (3.2)$$

Ahora, se necesita un término en la ecuación de depredadores que explique los depredadores que interactúan con la presa en el momento "t", pero que mueren antes de reproducirse (o crecer) " τ " unidades de tiempo más tarde. El término es $e^{-\delta\tau}$ se asume una tasa de muerte constante δ para los depredadores que sobreviven en periodos de gestación que significa la probabilidad de sobrevivir entre los retrasos en el tiempo de conversión de la biomasa.

Finalmente, el sistema queda de la siguiente forma:

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t)) - h(x(t))y(t) \quad (3.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{-\delta\tau}h(x(t-\tau))y(t-\tau) - \beta y(t) \quad (3.4)$$

sujeto a las siguientes condiciones iniciales:

$$x(t) = \varphi_1(t), \quad t \in [-\tau, 0], \varphi_1(0) > 0$$

$$y(t) = \varphi_2(t), \quad t \in [-\tau, 0], \varphi_2(0) > 0$$

Donde:

$x(t)$: Denota la densidad de la población de presas.

$y(t)$: Denota la densidad de la población depredadora.

$g(x(t))$: Denota la función de crecimiento de la población de presas.

$h(x(t))$: Denota la respuesta funcional de los depredadores en las presas.

β : Tasa de mortalidad.

Se asume que la tasa de crecimiento de los depredadores dependen solo de la población de presas.

La función de crecimiento para la población de presas es de la forma:

$$g(x(t)) = mx(t), \quad m > 0 \quad (3.5)$$

$$g(x(t)) = mx(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k}\right), \quad m > 0, \quad k > 0 \quad (3.6)$$

Donde “ k ” es la capacidad de carga del medio ambiente.

considerando la ecuación (3.5) y la respuesta funcional Holling tipo I, el modelo (3.3) – (3.4) es de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = mx - \gamma xy \quad (3.7)$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma e^{-\delta\tau} x(t-\tau)y(t-\tau) - \beta y \quad (3.8)$$

3.2. Análisis del modelo

3.2.1. Soluciones positivas

Es de importancia mostrar positividad del sistema (3.7) – (3.8) ya que representan las poblaciones depredador-presa. Biológicamente, la positividad implica que las poblaciones sobreviven.

Lema 1

Sea $(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) \in ([-\tau, 0], \mathbb{R}_+^2)$ y $(x(t), y(t))$ cualquier solución del sistema (3.7) – (3.8) con las condiciones dadas. Entonces se tiene: $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ para $t > 0$.

Demostración:

La ecuación (3.7) se escribe así:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= x(t)(m - \gamma y(t)) \\ \Rightarrow \frac{dx(t)}{x(t)} &= (m - \gamma y(t))dt \\ \Rightarrow x(t) &= x(0) \underbrace{e^{\int_0^t (m - \gamma y(t))dt}}_{>0}, \forall t > 0 \\ \Rightarrow x(t) &> 0\end{aligned}$$

Para $y(t) > 0$ en $t \in [0; \infty >$

Supongamos que existe un $t^* > 0$ tal que $y(t^*) = 0$ y $y(t) > 0$ para $t \in [0; t^* >$

Entonces:

$$\frac{dy(t^*)}{dt^*} \leq 0$$

La ecuación (3.8) se escribe así:

$$\begin{aligned}\frac{dy(t^*)}{dt^*} &= \gamma e^{-\delta\tau} x(t^* - \tau)y(t^* - \tau) - \beta y(t^*) \\ \Rightarrow \frac{dy(t^*)}{dt^*} &= \underbrace{\gamma e^{-\delta\tau} x(t^* - \tau)y(t^* - \tau)}_{>0} - \beta y(t^*)\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, por tanto $y(t) > 0 \forall t \in [0; \infty >$

3.2.2. Análisis de estabilidad de los equilibrios

Buscamos las soluciones de equilibrio.

Se hace:

$$\varphi(x, y) = mx - \gamma xy$$

$$\phi(x, y) = \gamma e^{-\delta\tau} x(t - \tau)y(t - \tau) - \beta y$$

(x^*, y^*) es una solución de equilibrio si:

$$mx^* - \gamma x^* y^* = 0 \quad (3.9)$$

$$\gamma e^{-\delta\tau} x^* y^* - \beta y^* = 0 \quad (3.10)$$

De (3.10): $y^*(\gamma e^{-\delta\tau} x^* - \beta) = 0$

$\Rightarrow y^* = 0$ y $y^* \neq 0$

- Si $y^* = 0 \Rightarrow$ en (3.9):

$$mx^* = 0 \Rightarrow x^* = 0.$$

Se tiene el equilibrio trivial $E_1 = (0,0)$ que biológicamente no tiene ningún sentido.

- Ahora sí $y^* \neq 0 \Rightarrow$ en (3.10):

$$\gamma e^{-\delta\tau} x^* y^* = \beta y^*$$

$$x^* = \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}$$

Reemplazando en (3.9): $y^* = \frac{m}{\gamma} \Rightarrow$ se tiene el equilibrio $E_2 = \left(\frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}, \frac{m}{\gamma}\right)$ que es un equilibrio de coexistencia y biológicamente es significativo.

Solo se analizará E_2 . Para ello se haya la matriz jacobiana del sistema.

$$J = A_1 + A_2 e^{-\lambda\tau} \quad (3.11)$$

Donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ para las variables sin retardo}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ para las variables con retardo}$$

Se encuentra A_1 y A_2 luego se pone el equilibrio (x^*, y^*) y se reemplaza en (3.11) donde se obtiene:

$$J = \begin{bmatrix} m - \gamma y^* & -\gamma x^* \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma e^{-\delta\tau} y^* & e^{-\lambda\tau} \gamma x^* \end{bmatrix} e^{-\lambda\tau}$$

$$J = \begin{bmatrix} m - \gamma y^* & -\gamma x^* \\ \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* & e^{-\lambda\tau} \gamma x^* - \beta \end{bmatrix}$$

Para hallar los valores propios λ , se usa $\det(J - \lambda I) = 0$.

$$\det = \begin{vmatrix} m - \gamma y^* - \lambda & -\gamma x^* \\ \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* & e^{-\lambda\tau} \gamma x^* - \beta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (m - \gamma y^* - \lambda)(e^{-\lambda\tau} \gamma x^* - \beta - \lambda) + \gamma^2 e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* x^* = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (m - \gamma y^* - \beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} x^*)\lambda + \gamma^2 e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* x^* + (m - \gamma y^*)(-\beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} x^*) = 0$$

Ahora definimos:

$$F(\lambda) = \lambda^2 - (m - \gamma y^* - \beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} x^*)\lambda + \gamma^2 e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* x^* + (m - \gamma y^*)(-\beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} x^*)$$

Remplazando el punto de equilibrio $E_2 = (x^*, y^*) = \left(\frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}, \frac{m}{\gamma}\right)$

$$F(\lambda) = \lambda^2 - \left(m - \gamma \frac{m}{\gamma} - \beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right)\lambda + \gamma^2 e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} \frac{m}{\gamma} \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau} + \left(m - \gamma \frac{m}{\gamma}\right)\left(-\beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right) = 0$$

$$\Rightarrow F(\lambda) = \lambda^2 + (\beta - \beta e^{-\lambda\tau})\lambda + m\beta e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.12)$$

Ahora, si $\tau = 0$, la ecuación (3.12) se convierte:

$$\lambda^2 + (\beta - \beta)\lambda + m\beta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + m\beta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-m\beta} = \pm i\sqrt{m\beta} > 0$$

Cuando $\tau = 0$, no hay raíces reales, se tiene dos raíces imaginarias puras, por lo tanto, es un centro.

Veamos si ocurre o no bifurcaciones de Hopf.

Hagamos:

$$\begin{aligned}
 F(m, \lambda) &= \lambda^2 + m\beta \\
 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 2\lambda \\
 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \lambda}(m, \pm i\sqrt{m\beta}) &= \pm 2i\sqrt{m\beta} \neq 0 \\
 \Rightarrow \frac{d\lambda}{dm} &= \frac{-\frac{\partial F}{\partial m}}{\frac{\partial F}{\partial \lambda}} = -\frac{\beta}{2\lambda} \\
 \Rightarrow \frac{d\lambda}{dm}\Big|_{\pm i\sqrt{m\beta}} &= \mp \frac{\beta}{2i\sqrt{m\beta}} = 0 \pm \frac{i\beta}{2\sqrt{m\beta}}
 \end{aligned}$$

Por tanto: $Re\left(\frac{d\lambda}{dm}\Big|_{\pm i\sqrt{m\beta}}\right) = 0$

La condición de transversidad no satisface, por lo tanto, la bifurcación de Hoff no se da.

En el caso de el retardo sea positivo es decir $\tau > 0$ la ecuación característica de la alrededor del punto $E_2(x^*, y^*)$ es dado por:

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0$$

Donde:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \beta\lambda$$

$$Q(\lambda) = -\beta\lambda + m\beta$$

Si $\tau > 0$, sea $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$ una raíz imaginaria pura de (3.12)

Ahora sustituyendo $\lambda = i\omega$, en la ecuación (3.12)

$$\begin{aligned}
 F(i\omega) &= (i\omega)^2 + (\beta - \beta e^{-i\omega\tau})i\omega + m\beta e^{-i\omega\tau} = 0 \\
 \Rightarrow -\omega^2 + \beta i\omega - \beta i\omega(\cos \omega\tau - i\sin \omega\tau) + m\beta(\cos \omega\tau - i\sin \omega\tau) &= 0 \\
 \Rightarrow (-\omega^2 - \beta\omega\sin \omega\tau + m\beta\cos \omega\tau) + i(\omega\beta - \beta\omega\cos \omega\tau - m\beta\sin \omega\tau) &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora separando las partes reales e imaginarias obtenemos un sistema de ecuaciones trascendentales.

$$R(\omega) = -\omega^2 - \beta\omega \text{Sen } \omega\tau + m\beta \text{Cos } \omega\tau = 0 \quad (3.13)$$

$$S(\omega) = \omega\beta - \beta\omega \text{Cos } \omega\tau - m\beta \text{Sen } \omega\tau = 0 \quad (3.14)$$

Elevando al cuadrado (3.13) obtenemos:

$$\begin{aligned} m\beta \text{Cos } \omega\tau - \beta\omega \text{Sen } \omega\tau &= \omega^2 \\ (m\beta \text{Cos } \omega\tau - \beta\omega \text{Sen } \omega\tau)^2 &= (\omega^2)^2 \\ m^2\beta^2 \text{Cos}^2 \omega\tau - 2m\beta^2 \omega \text{Cos } \omega\tau \text{Sen } \omega\tau + \beta^2 \omega^2 \text{Sen}^2 \omega\tau &= \omega^4 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Elevando al cuadrado (3.14) obtenemos:

$$\begin{aligned} \omega\beta &= \beta\omega \text{Cos } \omega\tau + m\beta \text{Sen } \omega\tau \\ (\omega\beta)^2 &= (\beta\omega \text{Cos } \omega\tau + m\beta \text{Sen } \omega\tau)^2 \\ \omega^2\beta^2 &= \beta^2 \omega^2 \text{Cos}^2 \omega\tau + \beta^2 \omega m \text{Cos } \omega\tau \cdot \text{Sen } \omega\tau + m^2\beta^2 \text{Sen}^2 \omega\tau \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sumando (3.15) y (3.16) obtenemos:

$$\begin{aligned} m^2\beta^2 \text{Cos}^2 \omega\tau - 2m\beta^2 \omega \text{Cos } \omega\tau \text{Sen } \omega\tau + \beta^2 \omega^2 \text{Sen}^2 \omega\tau &= \omega^4 \\ \beta^2 \omega^2 \text{Cos}^2 \omega\tau + 2\beta^2 \omega m \text{Cos } \omega\tau \cdot \text{Sen } \omega\tau + m^2\beta^2 \text{Sen}^2 \omega\tau &= \omega^2\beta^2 \\ \hline m^2\beta^2 \text{Cos}^2 \omega\tau + m^2\beta^2 \text{Sen}^2 \omega\tau + \beta^2 \omega^2 \text{Sen}^2 \omega\tau + \beta^2 \omega^2 \text{Cos}^2 \omega\tau &= \omega^4 + \omega^2\beta^2 \\ m^2\beta^2 \underbrace{(\text{Sen}^2 \omega\tau + \text{Cos}^2 \omega\tau)}_{=1} + \beta^2 \omega^2 \underbrace{(\text{Sen}^2 \omega\tau + \text{Cos}^2 \omega\tau)}_{=1} &= \omega^4 + \omega^2\beta^2 \\ m^2\beta^2 + \cancel{\omega^2\beta^2} &= \omega^4 + \cancel{\omega^2\beta^2} \\ m^2\beta^2 &= \omega^4 \\ \omega^4 - m^2\beta^2 &= 0 \\ \Rightarrow (\omega^2 + m\beta)(\omega^2 - m\beta) &= 0 \end{aligned}$$

Pero $(\omega^2 + m\beta) \neq 0$, como $\omega > 0$, $\beta > 0$, $m > 0$.

$$\Rightarrow \omega^2 - m\beta = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{m\beta} \quad \text{como } \omega > 0$$

Por lo tanto, tenemos que $\omega > 0$ es positivo tal que la ecuación (3.12) tiene raíces imaginarias puras.

Eliminando $\text{Sen}(\omega\tau)$ de (3.13) y (3.14), sumando y despejando obtenemos:

$$\text{Cos } \omega\tau = \frac{\omega^2 m + \omega^2 \beta}{\omega^2 \beta + m^2 \beta}$$

Entonces τ esta dado por:

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arccos \frac{\omega^2(m + \beta)}{(\omega^2 + m^2)\beta}$$

3.2.3. Bifurcación de Hoff

Aquí demostraremos que:

$$\left[\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right]_{\tau} > 0$$

Notamos que las raíces de (3.12) dependen continuamente de τ y como τ incrementa una raíz de (3.12) puede pasar por semiplano derecho solo pasando por el eje imaginario. Por tanto, a medida que $\tau > 0$ aumenta las raíces de (3.12) y puede cruzar el eje imaginario solo a través de raíces imaginarias que no son cero. Para ver si hay algún cambio de estabilidad.

Primero buscamos raíces imaginarias puras, donde $\lambda = i\omega$; $\omega > 0$ de (3.12)

$$|P(i\omega)| = |Q(i\omega)|$$

Y esto determina un conjunto de valores posibles de ω

Nuestro objetivo es determinar la dirección del movimiento de λ a medida que τ varia.

Es decir, determinamos:

$$\theta = \text{Sign} \left[\frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau} \right]_{\lambda=i\omega} = \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right]_{\lambda=i\omega}$$

Ahora consideremos la diferencial de (3.12):

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \lambda^2 + \beta\lambda + (m\beta - \beta\lambda)e^{-\lambda\tau} \\ \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} &= 2\lambda + \beta + m\beta e^{-\lambda\tau} - \beta\lambda e^{-\lambda\tau} \\ \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} &= 2\lambda + \beta - \tau m\beta e^{-\lambda\tau} - (\beta e^{-\lambda\tau} - \beta\lambda\tau e^{-\lambda\tau}) \\ \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} &= 2\lambda + \beta - \tau m\beta e^{-\lambda\tau} - \beta e^{-\lambda\tau} + \beta\lambda\tau e^{-\lambda\tau} \\ \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} &= 2\lambda + \beta - \beta e^{-\lambda\tau} - \tau e^{-\lambda\tau}(m\beta - \beta\lambda) \end{aligned}$$

Luego:

$$\frac{-\frac{dF(\lambda)}{d\tau}}{\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}} = \frac{d\lambda}{d\tau}$$

Por tanto la diferencial de (3.12) con respecto a τ , obtenemos:

$$\begin{aligned} [2\lambda + \beta - \beta e^{-\lambda\tau} - \tau e^{-\lambda\tau}(m\beta - \beta\lambda)] \frac{d\lambda}{d\tau} &= \lambda(m\beta - \beta\lambda)e^{-\lambda\tau} \\ \Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} &= \frac{2\lambda + \beta}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)e^{-\lambda\tau}} - \frac{\beta e^{-\lambda\tau}}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)e^{-\lambda\tau}} - \frac{\tau e^{-\lambda\tau}(m\beta - \beta\lambda)}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)e^{-\lambda\tau}} \\ \Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} &= \frac{2\lambda + \beta}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)e^{-\lambda\tau}} - \frac{\beta e^{-\lambda\tau}}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)e^{-\lambda\tau}} - \frac{\tau e^{-\lambda\tau}(m\beta - \beta\lambda)}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)e^{-\lambda\tau}} \\ \Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} &= \frac{2\lambda + \beta}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)e^{-\lambda\tau}} - \frac{\beta}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ \Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} &= \frac{2\lambda + \beta}{-\lambda(\lambda^2 + \beta\lambda)} - \frac{\beta}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)} - \frac{\tau}{\lambda} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{2\lambda + \beta}{-\lambda(\lambda^2 + \beta\lambda)} - \frac{\beta}{\lambda(m\beta - \beta\lambda)} - \frac{\tau}{\lambda} \right) \right]_{\lambda=i\omega} \\
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{2i\omega + \beta}{-i\omega(i^2\omega^2 + i\omega\beta)} - \frac{\beta}{i\omega(m\beta - i\omega\beta)} - \frac{\tau}{i\omega} \right) \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{2i\omega + \beta}{-i\omega(i^2\omega^2 + i\omega\beta)} - \frac{\beta}{i\omega(m\beta - i\omega\beta)} - \frac{\tau}{i\omega} \right) \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{2i\omega + \beta}{\omega^2\beta + i\omega^3} - \frac{\beta}{\omega^2\beta - i\omega m\beta} - \frac{\tau}{i\omega} \right) \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{(2i\omega + \beta)(\omega^2\beta - i\omega^3)}{(\omega^2\beta)^2 + \omega^6} - \frac{\beta(\omega^2\beta + i\omega m\beta)}{\omega^4\beta^2 + (\omega m\beta)^2} - \frac{\tau}{i\omega} \right) \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\frac{2\omega^4 + \omega^2\beta^2}{(\omega^2\beta)^2 + \omega^6} - \frac{\omega^2\beta^2}{\omega^4\beta^2 + (\omega m\beta)^2} \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\frac{2\omega^2 + \beta^2}{\beta^2\omega^2 + \omega^4} - \frac{1}{\omega^2 + m^2} \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\frac{2\omega^4 + \beta^2\omega^2 + 2\omega^2m^2 + \beta^2m^2 - \beta^2\omega^2 - \omega^4}{(\beta^2\omega^2 + \omega^4)(\omega^2 + m^2)} \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\frac{\omega^4 + 2\omega^2m^2 + \beta^2m^2}{(\beta^2\omega^2 + \omega^4)(\omega^2 + m^2)} \right] > 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\left[\frac{d(\text{Re}\lambda)}{d\tau} \right]_{\omega,\tau} > 0$$

La condición de transversidad se satisface, por lo tanto, la bifurcación de Hopf se da.

Entonces que a medida de τ incrementa ocurrirá una solución periódica que es el caso de la bifurcación de Hopf

A lo que concluimos que si $\tau = 0$, hay un par de puntos imaginarios y esto representa su centro y cuando τ aumenta esto es otro par de puntos imaginarios puros

3.3. Formulación del modelo utilizando la función de crecimiento logístico.

Consideramos la función de crecimiento logístico de la presa y el holling de tipo I, en función del depredador sobre la presa:

$$\frac{dx}{dt} = mx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \gamma xy \quad (3.17)$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma e^{-\delta\tau} x(t - \tau)y(t - \tau) - \beta y \quad (3.18)$$

3.3.1. Soluciones positivas

La positividad del sistema (3.18) se puede demostrar fácilmente como la hicimos en el sistema (3.8)

3.3.2. Análisis de estabilidad de los equilibrios

Buscamos las soluciones de equilibrio.

Se hace:

$$\varphi(x, y) = mx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \gamma xy$$

$$\phi(x, y) = \gamma e^{-\delta\tau} x(t - \tau)y(t - \tau) - \beta y$$

(x^*, y^*) es una solución de equilibrio si:

$$mx^* \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \gamma x^* y^* = 0 \quad (3.19)$$

$$\gamma e^{-\delta\tau} x^* y^* - \beta y^* = 0 \quad (3.20)$$

De (3.19): $x^* \left(m \left(1 - \frac{x^*}{k}\right) - \gamma y^*\right) = 0$

$\Rightarrow x^* = 0$ y $x^* \neq 0$

- Si $x^* = 0 \Rightarrow$ en (3.20):

$$\beta y^* = 0 \Rightarrow y^* = 0.$$

Se tiene el equilibrio trivial $E_1 = (0,0)$ que biológicamente no tiene ningún sentido.

- Ahora sí $x^* \neq 0 \Rightarrow$ en (3.20):

$$\gamma e^{-\delta\tau} x^* y^* = \beta y^*$$

$$x^* = \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}$$

Reemplazando en (3.19): $y^* = \frac{m}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right) \Rightarrow$ se tiene el equilibrio

$E_2 = \left(\frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}, \frac{m}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right)\right)$ que es un equilibrio de coexistencia y

biológicamente es significativo si $\frac{m}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right) > 0$ es decir, $\tau < \frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{\gamma k}{\beta}\right)$ para

que existan estos puntos asumimos que $\frac{\gamma k}{\beta} > 1$.

Solo se analizará E_2 . Para ello se haya la matriz jacobiana del sistema.

$$J = A_1 + A_2 e^{-\lambda\tau} \quad (3.21)$$

Donde:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ para las variables sin retardo}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ para las variables con retardo}$$

Se encuentra A_1 y A_2 luego se pone el equilibrio (x^*, y^*) y se reemplaza en (3.21)

donde se obtiene:

$$J = \begin{bmatrix} m \left(1 - \frac{2x^*}{k}\right) - \gamma y^* & -\gamma x^* \\ 0 & -\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma e^{-\delta\tau} y^* & \gamma e^{-\delta\tau} x^* \end{bmatrix} e^{-\lambda\tau}$$

$$J = \begin{bmatrix} m \left(1 - \frac{2x^*}{k}\right) - \gamma y^* & -\gamma x^* \\ \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* & e^{-\lambda\tau} \gamma e^{-\delta\tau} x^* \end{bmatrix}$$

Para hallar los valores propios λ , se usa $\det(J - \lambda I) = 0$.

$$\det = \begin{vmatrix} m\left(1 - \frac{2x^*}{k}\right) - \gamma y^* - \lambda & -\gamma x^* \\ \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* & -\beta + e^{-\lambda\tau} \gamma e^{-\delta\tau} x^* - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(m\left(1 - \frac{2x^*}{k}\right) - \gamma y^* - \lambda\right) \left(-\beta + e^{-\lambda\tau} \gamma e^{-\delta\tau} x^* - \lambda\right) + \gamma^2 e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* x^* = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \left(m - \frac{2x^*m}{k} - \gamma y^* - \beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} x^*\right) \lambda + \gamma^2 e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* x^* + \left(m - \frac{2x^*m}{k} - \beta y^*\right) \left(-\beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} x^*\right) = 0$$

Ahora definimos:

$$F(\lambda) = \lambda^2 - \left(m - \frac{2x^*m}{k} - \gamma y^* - \beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} x^*\right) \lambda + \gamma^2 e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} y^* x^* + \left(m - \frac{2x^*m}{k} - \beta y^*\right) \left(-\beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} x^*\right)$$

Remplazando el punto de equilibrio $E_2 = (x^*, y^*) = \left(\frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}, \frac{m}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right)\right)$

$$F(\lambda) = \lambda^2 - \left(m - \frac{2\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau} - \gamma \frac{m}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right) - \beta + \gamma \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau} e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau}\right) \lambda + \gamma^2 e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} \frac{m}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right) \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau} \\ + \left(m - \frac{2\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau} - \gamma \frac{m}{\gamma} \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right)\right) \left(-\beta + \gamma e^{-\delta\tau} e^{-\lambda\tau} \frac{\beta}{\gamma} e^{\delta\tau}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \left(-\beta + \beta e^{-\lambda\tau} - \frac{\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right) \lambda + \beta m e^{-\lambda\tau} - \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} e^{-\lambda\tau} + \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} + \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} e^{-\lambda\tau} = 0$$

Por tanto:

$$F(\lambda) = \lambda^2 - \left(\beta e^{-\lambda\tau} - \beta - \frac{\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right) \lambda + \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} + \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right) e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.22)$$

Ahora, si $\tau = 0$, la ecuación (3.22) se convierte:

$$\Rightarrow \lambda^2 - \left(-\frac{\beta m}{\gamma k}\right) \lambda + \frac{\beta^2 m}{\gamma k} + \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{\beta m}{\gamma k} \lambda + m\beta - \frac{\beta^2 m}{\gamma k} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1\beta m}{2\gamma k} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta m}{\gamma k}\right)^2 - 4\left(m\beta - \frac{\beta^2 m}{\gamma k}\right)}$$

Consideramos:

$$\lambda_1 = -\frac{1\beta m}{2\gamma k} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta m}{\gamma k}\right)^2 - 4\left(m\beta - \frac{\beta^2 m}{\gamma k}\right)}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1\beta m}{2\gamma k} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta m}{\gamma k}\right)^2 - 4\left(m\beta - \frac{\beta^2 m}{\gamma k}\right)}$$

Entonces la parte real por parte de λ_1 es negativa, por tanto la estabilidad depende del otro valor propio λ_2 .

Cuando $\tau = 0$ entonces E_2 es localmente asintóticamente estable si $\beta < \gamma k$ y E_2 no existe si $\beta > \gamma k$.

En el caso de el retardo sea positivo es decir $\tau > 0$ la ecuación característica de la alrededor del punto $E_2(x^*, y^*)$ es dado por:

$$\bar{P}(\lambda) + \bar{Q}(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0$$

Donde:

$$\bar{P}(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2$$

$$\bar{Q}(\lambda) = q_1\lambda + q_2$$

Aquí:

$$p_1 = \beta + \frac{\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau} > 0$$

$$p_2 = \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} > 0$$

$$q_1 = -\beta < 0$$

$$q_2 = \beta m - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}$$

Si $\tau > 0$, sea $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$ una raíz imaginaria pura de (3.22)

Ahora sustituyendo $\lambda = i\omega$, en la ecuación (3.22)

$$F(i\omega) = (i\omega)^2 - \left(\beta e^{-i\omega\tau} - \beta - \frac{\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right) i\omega + \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} + \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right) e^{-i\omega\tau} = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -\omega^2 - \beta i\omega(\cos \omega\tau - i\sin \omega\tau) + \beta i\omega + \frac{i\omega\beta m}{\gamma k}e^{\delta\tau} + \frac{\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau} + \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)(\cos \omega\tau - i\sin \omega\tau) \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \left(-\omega^2 - \beta\omega\sin \omega\tau + \frac{\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau} + m\beta\cos \omega\tau - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\cos \omega\tau\right) + i\left(-\beta\omega\cos \omega\tau + \beta\omega + \frac{\omega\beta m}{\gamma k}e^{\delta\tau} - m\beta\sin \omega\tau + \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\sin \omega\tau\right) = 0 \end{aligned}$$

Ahora separando las partes reales e imaginarias obtenemos un sistema de ecuaciones trascendentales.

$$T(\omega) = -\omega^2 - \beta\omega\sin \omega\tau + \frac{\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau} + m\beta\cos \omega\tau - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\cos \omega\tau = 0 \quad (3.23)$$

$$U(\omega) = -\beta\omega\cos \omega\tau + \beta\omega + \frac{\omega\beta m}{\gamma k}e^{\delta\tau} - m\beta\sin \omega\tau + \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\sin \omega\tau = 0 \quad (3.24)$$

Elevando al cuadrado (3.23) obtenemos:

$$\begin{aligned} &\left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)\cos \omega\tau - \beta\omega\sin \omega\tau = \omega^2 - \frac{\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau} \\ &\left(\left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)\cos \omega\tau - \beta\omega\sin \omega\tau\right)^2 = \left(\omega^2 - \frac{\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)^2 \\ &\left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)^2 \cos^2 \omega\tau - 2\beta\omega\left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)\sin \omega\tau\cos \omega\tau + \beta^2\omega^2\sin^2 \omega\tau = \left(\omega^2 - \frac{\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Elevando al cuadrado (3.24) obtenemos:

$$\begin{aligned} &\left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)\sin \omega\tau + \beta\omega\cos \omega\tau = \beta\omega + \frac{\omega\beta m}{\gamma k}e^{\delta\tau} \\ &\left(\left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)\sin \omega\tau + \beta\omega\cos \omega\tau\right)^2 = \left(\beta\omega + \frac{\omega\beta m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)^2 \\ &\left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)^2 \sin^2 \omega\tau + 2\beta\omega\left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)\sin \omega\tau\cos \omega\tau + \beta^2\omega^2\cos^2 \omega\tau = \left(\beta\omega + \frac{\omega\beta m}{\gamma k}e^{\delta\tau}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sumando (3.25) y (3.26) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 \cos^2 \omega\tau - 2\beta\omega \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right) \text{Sen } \omega\tau \cos \omega\tau + \beta^2 \omega^2 \text{Sen}^2 \omega\tau = \left(\omega^2 - \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 \\
& \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 \text{Sen}^2 \omega\tau + 2\beta\omega \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right) \text{Sen } \omega\tau \cos \omega\tau + \beta^2 \omega^2 \cos^2 \omega\tau = \left(\beta\omega + \frac{\omega\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 \\
\hline
& \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 \underbrace{(\text{Sen}^2 \omega\tau + \cos^2 \omega\tau)}_{=1} + \beta^2 \omega^2 \underbrace{(\text{Sen}^2 \omega\tau + \cos^2 \omega\tau)}_{=1} = \left(\omega^2 - \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 + \left(\beta\omega + \frac{\omega\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 \\
& \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 + \omega^2 \beta^2 = \left(\omega^2 - \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 + \left(\beta\omega + \frac{\omega\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 \\
& \Rightarrow \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 + \omega^2 \beta^2 = \omega^4 - \frac{2\omega^2 \beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} + \frac{m^2 \beta^4}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} + \omega^2 \left(\beta + \frac{\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 \\
& \Rightarrow \omega^4 - \left(\frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} - \left(\beta + \frac{\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 + \beta^2\right) \omega^2 + \frac{m^2 \beta^4}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} - \left(m\beta - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}\right)^2 = 0 \\
& \Rightarrow \omega^4 - \left(\frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} - \beta^2 - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} - \frac{\beta^2 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} + \beta^2\right) \omega^2 + \frac{m^2 \beta^4}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} - m^2 \beta^2 + \frac{2\beta^3 m^2}{\gamma k} e^{\delta\tau} - \frac{4\beta^4 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} = 0 \\
& \Rightarrow \omega^4 + \frac{\beta^2 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} \omega^2 - m^2 \beta^2 + \frac{2\beta^3 m^2}{\gamma k} e^{\delta\tau} - \frac{3\beta^4 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} = 0 \\
& \Rightarrow \omega^2 = -\frac{1\beta^2 m^2}{2\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta^2 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)^2 - 4\left(\frac{2\beta^3 m^2}{\gamma k} e^{\delta\tau} - m^2 \beta^2 - \frac{3\beta^4 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)}
\end{aligned}$$

Ya que $\omega^2 > 0$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1\beta^2 m^2}{2\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta^2 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)^2 - 4\left(\frac{2\beta^3 m^2}{\gamma k} e^{\delta\tau} - m^2 \beta^2 - \frac{3\beta^4 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)} > 0 \\
& -\frac{1\beta^2 m^2}{2\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} > -\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\beta^2 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)^2 - 4\left(\frac{2\beta^3 m^2}{\gamma k} e^{\delta\tau} - m^2 \beta^2 - \frac{3\beta^4 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)} \\
& \Rightarrow \frac{\beta^2 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} < \sqrt{\left(\frac{\beta^2 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)^2 - 4\left(\frac{2\beta^3 m^2}{\gamma k} e^{\delta\tau} - m^2 \beta^2 - \frac{3\beta^4 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)} \\
& \Rightarrow \left(\frac{\beta^2 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)^2 < \left(\frac{\beta^2 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)^2 - 4\left(\frac{2\beta^3 m^2}{\gamma k} e^{\delta\tau} - m^2 \beta^2 - \frac{3\beta^4 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 0 < -\left(\frac{2\beta^3 m^2}{\gamma k} e^{\delta\tau} - m^2 \beta^2 - \frac{3\beta^4 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau}\right) \\
&\Rightarrow \frac{2\beta^3 m^2}{\gamma k} e^{\delta\tau} < m^2 \beta^2 + \frac{3\beta^4 m^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} \\
&\Rightarrow \frac{3\beta^2}{\gamma^2 k^2} e^{2\delta\tau} - \frac{2\beta}{\gamma k} e^{\delta\tau} + 1 > 0 \\
&\Rightarrow e^{2\delta\tau} - \frac{2\gamma k}{3\beta} e^{\delta\tau} + \frac{\gamma^2 k^2}{3\beta^2} > 0 \\
&\Rightarrow \left(e^{\delta\tau} - \frac{\gamma k}{3\beta}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\gamma k}{3\beta}\right)^2 > 0 \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Esta expresión (3.25) siempre es verdadera ya que aquí todos los parámetros son positivos.

Por lo tanto, tenemos que $\omega > 0$ es positivo tal que la ecuación (3.22) tiene raíces imaginarias puras.

3.3.3. Bifurcación de Hoff

Aquí demostraremos que:

$$\left[\frac{d(Re\lambda)}{d\tau}\right]_{\tau} > 0$$

Esto significa que existe al menos un valor propio con parte real positiva para τ .

Además, si las condiciones de la bifurcación de Hoff satisfacen entonces produce la solución periódica requerida. Para ver si hay algún cambio de estabilidad.

Primero buscamos raíces imaginarias puras, donde $\lambda = i\omega$; $\omega > 0$ de (3.22)

$$|P(i\omega)| = |Q(i\omega)|$$

Y esto determina un conjunto de valores posibles de ω

Nuestro objetivo es determinar la dirección del movimiento de λ a medida que τ varía.

Es decir, determinamos:

$$\theta = \text{Sign} \left[\frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \right]_{\lambda=i\omega} = \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right]_{\lambda=i\omega}$$

Por tanto la diferencial de (3.22) con respecto a τ , obtenemos:

$$\begin{aligned}
& [(2\lambda + p_1) + e^{-\lambda\tau}q_1 - \tau e^{-\lambda\tau}(q_1\lambda + q_2)] \frac{d\lambda}{d\tau} = \lambda(q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau} \\
\Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{(2\lambda + p_1)}{\lambda(q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau}} + \frac{q_1 e^{-\lambda\tau}}{\lambda(q_1\lambda + q_2)e^{-\lambda\tau}} - \frac{\tau}{\lambda} \\
\Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{(2\lambda + p_1)}{\lambda\left(-d\lambda + \beta m - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}\right)e^{-\lambda\tau}} + \frac{q_1}{\lambda(q_1\lambda + q_2)} - \frac{\tau}{\lambda} \\
\Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{(2\lambda + p_1)}{\lambda\left(-d\lambda - \lambda^2 - \frac{\beta m}{\gamma k}\lambda + \frac{\beta^2 m}{\gamma k} - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k}\right)e^{-\lambda\tau}} + \frac{q_1}{\lambda(q_1\lambda + q_2)} - \frac{\tau}{\lambda} \\
\Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{(2\lambda + p_1)}{\lambda\left(-\lambda^2 - \lambda\left(\frac{\beta m}{\gamma k} + d\right) - \frac{\beta^2 m}{\gamma k}\right)} + \frac{q_1}{\lambda(q_1\lambda + q_2)} - \frac{\tau}{\lambda} \\
\Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{2\lambda + p_1}{-\lambda(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)} + \frac{q_1}{\lambda(q_1\lambda + q_2)} - \frac{\tau}{\lambda}
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{2\lambda + p_1}{-\lambda(\lambda^2 + p_1\lambda + p_2)} + \frac{q_1}{\lambda(q_1\lambda + q_2)} - \frac{\tau}{\lambda} \right) \right]_{\lambda=i\omega} \\
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{2i\omega + p_1}{-i\omega((i\omega)^2 + p_1i\omega + p_2)} + \frac{q_1}{i\omega(q_1i\omega + q_2)} - \frac{\tau}{i\omega} \right) \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{2i\omega + p_1}{-i\omega(i^2\omega^2 + p_1i\omega + p_2)} + \frac{q_1}{i\omega(q_1i\omega + q_2)} - \frac{\tau}{i\omega} \right) \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{2i\omega + \beta}{\omega^2 p_1 + i(\omega^3 - p_2\omega)} + \frac{q_1}{-\omega^2 q_1 + iq_2\omega} - \frac{\tau}{i\omega} \right) \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\text{Re} \left(\frac{(2i\omega + p_1)(\omega^2 p_1 - i\omega^3 + ip_2\omega)}{(\omega^2 p_1)^2 + (\omega^3 - p_2\omega)^2} + \frac{q_1(-\omega^2 q_1 - iq_2\omega)}{\omega^4 q_1^2 + \omega^2 q_2^2} + \frac{i\tau}{\omega} \right) \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\frac{2\omega(\omega^3 - p_2\omega) + \omega^2 p_1^2}{\omega^4 p_1^2 + (\omega^3 - p_2\omega)^2} - \frac{\omega^2 q_1^2}{\omega^4 q_1^2 + \omega^2 q_2^2} \right] \\
\theta &= \text{Sign} \left[\frac{\omega^6 q_1^2 + 2\omega^4 q_2^2 - 2p_2 q_2^2 \omega^2 + \omega^2 p_1^2 q_2^2 - \omega^2 q_1^2 p_2^2}{(\omega^4 p_1^2 + (\omega^3 - p_2\omega)^2)(\omega^4 q_1^2 + \omega^2 q_2^2)} \right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, La condición de transversidad se satisface entonces la bifurcación de Hoff se da.

i.e.

$$\left[\frac{d(Re\lambda)}{d\tau} \right]_{\omega, \tau} > 0$$

Si y solo si:

$$\omega^2 - p_2 > 0 \Rightarrow \omega^2 > \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau}$$

Y

$$p_1^2 q_2^2 - q_1^2 p_2^2 > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau} \right)^2 \left(\beta m - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} \right)^2 - \beta^2 \left(\frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta\tau} \right)^2 > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\beta m}{\gamma k} e^{\delta\tau} \right)^2 \left[\left(\beta m - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} \right)^2 - \beta^4 \right] > 0$$

$$\Rightarrow \left(\beta m - \frac{2\beta^2 m}{\gamma k} \right)^2 > \beta^4$$

$$\Rightarrow m^2 \left(1 - \frac{2\beta}{\gamma k} \right)^2 > \beta^2$$

Discusión de resultados

De los resultados obtenidos de la función de crecimiento monótona es que a medida de τ incrementa ocurrirá una solución periódica que es el caso de la bifurcación de Hoff, A lo que concluimos que si $\tau = 0$, hay un par de puntos imaginarios y esto representa su centro y cuando τ aumenta esto es otro par de puntos imaginarios puros es decir en la función de crecimiento monótona es una bifurcación de hoff bajo ninguna condición pero si observamos los resultados de la función de crecimiento logística la bifurcación de hoff se va dar pero bajo ciertas condiciones que son las siguientes:

$$\omega^2 > \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta \tau} \quad \text{y} \quad m^2 \left(1 - \frac{2\beta}{\gamma k}\right)^2 > \beta^2$$

Conclusiones

En la presente investigación se llega a las siguientes conclusiones:

- La tasa de crecimiento de las especies depredadoras depende únicamente de la cantidad de biomasa añadida (densidad de población depredadora) debido a la muerte de la presa, la presencia del retraso de gestación en el crecimiento del depredador afecta la abundancia de depredadores ya que hay algunas posibilidades de muerte del depredador durante este periodo de gestación antes de ir a la reproducción o crecimiento.
- El análisis de estabilidad lineal nos revela el hecho de que para la tasa de crecimiento monotonica de la presa, en ausencia de retraso, el equilibrio de coexistencia es un centro.
- La función de crecimiento logístico de la presa es localmente asintóticamente estable si $\beta < \gamma k$ y esto no existe si $\beta > \gamma k$.
- La tasa de crecimiento monótono de la presa en ausencia de retraso, la bifurcación de Hoff no es posible sin ninguna condición y en caso el retardo sea positivo hay una solución periódica que es el caso de la bifurcación de Hoff bajo ciertas condiciones.
- El retraso de gestación es crucial para un sistema de interacción depredador – presa. En el caso de la función de crecimiento logístico de la presa, la bifurcación de Hoff es posible bajo estas ciertas condiciones:

$$\omega^2 > \frac{\beta^2 m}{\gamma k} e^{\delta \tau} \quad \text{y} \quad m^2 \left(1 - \frac{2\beta}{\gamma k}\right)^2 > \beta^2$$

Sugerencias

Al finalizar el trabajo, se llegó a las siguientes sugerencias:

1. Para futuras investigaciones sería interesante estimar los parámetros q que aparecen en el modelo con retardo con datos reales.
2. El tiempo de retardo en este trabajo es de tipo discreto, para futuras investigaciones sería interesante hacer uso de un tiempo de retardo de tipo continuo.

Bibliografía

- Amster, P. (2017). Ecuaciones diferenciales con retardo. Universidad de Buenos Aires. Argentina.
- Banerjee, S. (2014). Mathematical modeling. models, analysis and applications. Indian Institute of Technology Roorkee.
- Driver, R. (1977). Ordinary and Delay Differential Equations. New York Inc.
- Ellermeyer, S. (2002). A theoretical and empirical investigation of delayed growth response in the continuous culture of bacteria. Journal theoretical biology.
- Estrella, A, & Garcia, G, & Ávila, E. Estabilidad local de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con retardo y aplicaciones. Universidad Autónoma de Yucatán. Mexico.
- Forde, J. (2005). Models in mathematics biology. A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements of the degree of Doctor of Philosophy. University of Michigan.
- Kelley, W, & Peterson, A. (2004). The theory of differential equations classical and qualitative.
- Kong, Q. (2014). A short course in ordinary differential equations.
- Leah, E. (2004). Mathematical models in biology. Society for industrial and applied mathematics.
- Smith, H. (2011). An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences.