UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

TESIS

PUNTO DE EQUILIBRIO DE SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

AUTOR:
Bach. Juan Alejandro Núñez Montero

ASESORA:
Dra. Gloria Ortiz Basauri

LAMBAYEQUE – PERÚ
2020

UNIVERSIDAD NACIONAL «PEDRO RUIZ GALLO»

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **«Punto de Equilibrio de Sistemas Dinámicos Discretos»**, presentada por el Bachiller en Matemática, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

M. Sc Blas Rebaza Juana Doris
Presidente Jurado de Tesis

Mg. Chiroque Baldera José Antonio
Secretario Jurado de Tesis

Mg. Mat. Chirinos Fernández Danessa Lisbeth
Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: 15 de octubre - 2020

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

«Punto de Equilibrio de Sistemas Dinámicos Discretos»

Alejandro

Bach. Núñez Montero, Juan Alejandro
Autor

Dra. Ortiz Basauri, Gloria María
Asesora

Lambayeque − Perú
Octubre-2020

Dedicatoria

A mi madre, Antonia, a mi padre, Juan.

por todo lo dado sin esperar nada a cambio.

A todos los que hemos nacido en una «caja de fósforo» , y, cada mañana nos levantamos con el dilema de seguir ahí o salir en busca de una de “espiral”

A todos lo que creemos: «Más vale el saber que el diploma»

A todos y a cada uno de las personas que por motivos del destino, del universo o de un dios, no han podido llegar a esta etapa, pero contribuyeron loablemente para no abandonar este camino.

A todos las personas que nunca me vieron como un número más y siempre sumaron a mi vida.

A los que se fueron y regresaron, y los que se marcharon sin retornar. A los que avanzan de a poco y los que terminaron en un tiempo corto.

A la chica que solía decirme: « te quiero ver en Civil» y a los que solían repetirme:« pudiste ser más, pudiste ser ingeniero»

A Claudia, una de las personas más influyentes en toda mi carrera. Y a todas las historias de vida que conocí en estos cuatro años de carrera universitaria.

En memoria a Herles H.

Y a todos los que han llegado lejos gracias a sus propios méritos.

A los que hacen su trabajo por el cual reciben un sueldo. Y sin duda para mi escuela: el Emblemático y Sesquicentenario Colegio Nacional de San José.

Juan Alejandro Núñez Montero

Agradecimiento

A mis padre: Juan y Antonia

A mis hermanos: Tracy, Sally, Sandra y Pablo por todos los momentos compartidos

A Marlon, que junto a Sandra, pusieron la primera piedra en mi vida preuniversitaria.

A Claudia Urrutia, por su tiempo, su cariño y por motivarme a retomar la carrera.

A mis maestros de colegio, en especial, a mi profesor de tercero de secundaria del área de Matemática: Wiliam Damian Valdera, unos de los primeros en creer en mí y motivarme al estudio de dicha área.

Al docente, José Carlos Rodriguez, por ser mi profesor eterno de Álgebra. A Julio Gamarra, matemático al cual admiro y pilar importante en la culminación de la carrera. A mi amigo Octavio Perez Rivadeneira, por su apoyo en todo estos años. A mis profesores de la universidad, muchos de los cuales me dieron uno lección de vida.

Y a ti (-;-), fuiste una motivación, ojalá algún día, leeas esto. Y sin duda a mi asesora Dra. Gloria Ortiz que siempre apostó por mi desde el inicio. Por sus palabras, los cuales llevaré tatuado, no en los libros que leí sino en mi corazón.

Resumen

Los puntos de equilibrio de los Sistemas Dinámicos Discretos son por lo general, imposibles de calcular de manera explicita, pero se discutirán teoremas que garanticen su existencia.

La estabilidad de los puntos de equilibrios de un Sistema Dinámico Discreto se puede abordar analizando el radio espectral de la matriz jacobiana asociada a tal punto.

Abstract

The equilibrium points of Discrete Dynamic Systems are generally impossible to calculate, but theorems that guarantee their existence will be discussed.

The stability of the equilibrium points of a Discrete Dynamic System can be addressed by analyzing the spectral radius of the Jacobian matrix associated with that point.

Introducción

Los Sistemas Dinámicos son aplicados en diversas áreas del conocimiento como en Física, Ecología y Economía, en estas dos últimas, los sistemas dinámicos discretos tienen un papel importante para la predicción de determinados sucesos: la estabilidad de una población de conejos, o la demanda monetaria en largos períodos de tiempo medido en: días, meses y porqué no; años, o incluso, décadas. En Física son vitales para el estudio de sistemas continuos, razón por la cual algunos autores señalan como sinónimo a modelos discretos (ecuaciones en diferencias) con los Sistemas Dinámicos Discretos. Una posible explicación sería que los primeros cumplen con la definición de sistema dinámico discreto (SDD) es decir ambos no tendrían una relación de sinonimia referencial, sino de hiperonimia. Finalmente, en una gran variedad de libros se definen como funciones en un mismo espacio con ciertas propiedades. Sin embargo, hay diversas formas de entender, definir y construir un SDD. Pues afirmar que una función definida en cierto espaIII

Introducción IV cio y que cumpla unas determinadas condiciones sea un SDD, es el equivalente a llamar espacio topólogico a X cuando se está hablando de (X, τ)

Contenido

Resumen I

Abstract II

Introducción IV

1. Preliminares 1

1.1. Diagonalización de Matrices 1

1.2. Forma de Jordan 11

1.3. Normas matriciales 16

1.4. Espacios métricos 19

1.5. Espacios de Banach 22

1.6. Funciones vectoriales 26

1.6.1. Funciones reales de variable real 26

1.6.2. Funciones vectoriales de variable vectorial 26

1.7. Ecuaciones en diferencias. 30

1.8. Grupos Discretos 35

2. Sistema Dinámicos Discretos 37

2.1. Punto de Equilibrio 45

2.1.1. Función real de variable real 45

2.1.2. Funciones vectoriales de variable vectorial 51

2.1.3. Aproximación Lineal 58

2.1.4. Teorema de Hartman 59

2.1.5. Estabilidad de los puntos de equilibrio 70

2.1.6. Funciones definidas en espacios de Banach o en Variedades diferenciables 72

2.1.7. Funciones definidas de un conjunto en si mismo 78

3. Punto de Equilibrio 80

3.1. Ejemplos típicos 80

3.2. Rectas discreta 83

3.2.1. Recta discreta 83

3.2.2. Recta discreta matricial 83

3.3. Ecuaciones en diferencias 86

3.4. Teoría de la Aproximación 93

3.4.1. Iteraciones como sistemas dinámicos discreto 93

3.5. Sistema *Claudia − Maritza* 99

3.6. Sistema *Susan-Nelida* 109

3.7. Sistema de *More* 117

Conclusiones **120**

Referencias 121

Referencias **121**

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se abordarán temas fundamentales para el desarrolo de este informe como: teoría de matrices, espacios métricos, funciones reales de variable real; funciones vectoriales de variable vectorial, espacios normados. Junto a los principales teoremas de cada tenor o los que los relacionan.

1.1. Diagonalización de Matrices

En lo que sigue se hará mención a las matrices de orden finito o acotadas.

DEFINICIÓN 1.1. *Multiplicación por bloques. Sean las matrices A_{11}, A_{12}, A_{21} y A_{22}; B_{11}, B_{12}, B_{21} y B_{22}. Con*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Se define la multiplicación por bloques: $AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$

EJEMPLO 1.1. .

$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$ $v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$N = 0$: matriz nula de orden 2. $A = \begin{pmatrix} A_1 & N \\ N & A_2 \end{pmatrix}$ y $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Se define la multiplicación por bloques: $AV = \begin{pmatrix} A_1 v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

DEFINICIÓN 1.2. *Valores y vectores característicos de una matriz. Sea A una matriz de orden n con componentes reales. El número* $\lambda(real\ o\ complejo)$ *se denomina valor característico de A si existe un vector no nulo v tal que:*

$$Av = \lambda v$$

Al vector v se le denomina vector característico.

TEOREMA 1.1. *Sea A una matriz cuadrada distinta de la identidad. Entonces* λ *es un valor característico de A si y solo si* $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = 0$

DEFINICIÓN 1.3. *Polinomio característico de una matriz A*

A la expresión: $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ *se le denomina polinomio característico de A.*

DEFINICIÓN 1.4. *Ecuación característica de una matriz A.*

A la expresión $det(A - \lambda I) = 0$*, le denomina ecuación característica de A.*

DEFINICIÓN 1.5. *Espacio Característico*

Sea λ *un valor característico de A. El subespacio* $E_\lambda = \{v : Av = \lambda v\}$ *se denomina espacio característico de A correspondiente al valor característico* λ*.*

DEFINICIÓN 1.6. *El radio espectral de una matriz A es el máximo de los valores absolutos de los elementos del espectro de A, y es denotado por* $\rho(A)$ *luego:*

$$\rho(A) = max\{|\lambda| : donde\ \lambda\ es\ un\ valor\ propio\ de\ A\}$$

TEOREMA 1.2. *Sea A una matriz de orden n y sea* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *valores característicos distintos de A con vectores característicos correspondientes* v_1, v_2, ..., v_n*. Entonces son* v_1, v_2, ..., v_n *linealmente independientes. Esto es, los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son linealmente independientes.*

Demostración. Se llevará a cabo la demostración por inducción matemática.

1. Sea $m = 2$, se supone que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \tag{1.1}$$

Multiplicando ambos lados de (1.1) por A se tiene

$0 = A(c_1 v_1 + c_2 v_2) = (c_1 A v_1 + c_2 A v_2)$ y como $Av_i = \lambda v_i$

Reemplazando

$$(c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2) = 0 \tag{1.2}$$

Se multiplica (1.1) por λ_1 y se resta de (1.2) para obtener:

$c_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 = 0$ como $v_2 \neq 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow c_2 \neq 0$.

Sustituyendo este último resultado en (1.1) , concluye que $c_1 = 0$

2. Ahora suponga que el teorema se cumple para $m = k$. Esto es, se supone que k vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son linealmente independientes.

   Ahora se prueba el teorema para $m = k + 1$. Así que se supone que

$$(c_1 v_1 + c_2 v_2 + ...c_k v_k + c_{k+1} v_{k+1}) = 0 \tag{1.3}$$

   Análogamente como en (1.2)

$$(c_1\lambda_1 v_1 + c_2\lambda_2 v_2 + c_k\lambda_k v_k + c_{k+1}\lambda_{k+1} v_{k+1}) = 0. \tag{1.4}$$

   Se multiplican ambos lados de (1.3) por λ_{k+1} y se resta de (1.4):

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})v_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})v_2 + ... + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})v_k = 0$$

   Pero de acuerdo con la suposición de inducción, $v_1, v_2, ..., v_k$ son linealmente independientes. Así, $c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0 \Rightarrow$ $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ $\Rightarrow c_{k+1} = 0$

■

DEFINICIÓN 1.7. *Multiplicidad algebraica*

Sea $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}(\lambda-\lambda_m)^{r_m} = 0$*, entonces los números* $r_1, r_2, ..., r_m$ *son las multiplicidades algebraicas de* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *respectivamente.*

DEFINICIÓN 1.8. *Multiplicidad geométrica*

Suponga que sea λ *un valor característico de la matriz A entonces la multiplicidad geométrica de* λ *es la dimensión del espacio característico correspondiente a* λ

DEFINICIÓN 1.9. *Matrices semejantes*

Se dice que dos matrices A *y* B *de orden* n *son semejantes si existe una matriz invertible C de* $n \times n$ *tal que:*

$$B = C^{-1}AC \Rightarrow CB = AC$$

DEFINICIÓN 1.10. *Matriz Diagonalizable*

Una matriz A *de orden* n *es diagonalizable si existe una matriz diagonal* D *tal que* D *sea semejante a* A

LEMA 1.1. *Si D es una matriz diagonal entonces sus valores de los componentes de su diagonal son sus valores propios.*

LEMA 1.2. *Si A es semejante a B entonces A y B tienen los mismos valores característicos.*

OBSERVACIÓN 1.1. Uniendo estos dos lemas se observa que si A es diagonalizable, entonces A es semejante a una matriz diagonal cuyas componentes en la diagonal son los valores característicos de A.

TEOREMA 1.3. *Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y solo si tiene n vectores característicos linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dada por*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & ... & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde λ_1, λ_2,..., λ_n son los valores característicos de A. Si C es una matriz cuyas columnas son vectores característicos linealmente independientes de A, entonces

$$D = C^{-1}AC$$

Demostración. Primero se supone que A tiene n vectores característicos linealmente independientes $v_1, v_2, ..., v_n$ que corresponden a los valores característicos (no necesariamente diferentes) λ_1,λ_2,...,λ_{n-1}, λ_n

Sea $v_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ . \\ . \\ c_{n1} \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ . \\ . \\ c_{n2} \end{pmatrix}$ $v_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ . \\ . \\ c_{nn} \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & & \dots & . \\ . & & \dots & . \\ . & & \dots & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$

Entonces C es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes. Ahora bien

$$AC = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & & \dots & . \\ . & & \dots & . \\ . & & \dots & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

y se deduce que la columna i de AC es

$A\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ . \\ . \\ c_{ni} \end{pmatrix} = Av_i = \lambda_i v_i$. De este modo AC es la matriz cuya columna i es $\lambda_i v_i$ y

$$AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & ... & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & ... & \lambda_2 c_{2n} \\ . & & ... & . \\ . & & ... & . \\ . & & ... & . \\ \lambda_n c_{n1} & \lambda_n c_{n2} & ... & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}$$

Pero

$$CD = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ . & & ... & . \\ . & & ... & . \\ . & & ... & . \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & ... & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & ... & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & ... & \lambda_2 c_{2n} \\ . & & ... & . \\ . & & ... & . \\ . & & ... & . \\ \lambda_n c_{n1} & \lambda_n c_{n2} & ... & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow AC = CD \Rightarrow D = C^{-1}AC$

Inversamente, suponga que A es diagonalizable; esto es, $D = C^{-1}AC$ se cumpla para alguna matriz invertible C. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ las columnas de C. Entonces $AC = CD$, e invirtiendo los argumentos anteriores, se ve de inmediato que $Av_i = \lambda_i v_i$ para $i = 1, 2, ..., n$. Entonces $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son los vectores característicos de A y son linealmente independientes porque C es invertible. ■

OBSERVACIÓN 1.2. Esto prueba que si A tiene n vectores característicos linealmente independientes, entonces A es diagonalizable.

OBSERVACIÓN 1.3. Cada columna de la matriz de paso C es un vector traspuesto del espacio caracteristíco de cada respectivo valor propio.

TEOREMA 1.4. *Toda matriz simétrica es diagonalizable.*

Si S es matriz simétrica se denotará con $D(S)$ a la matriz diagonal cuyo valores de la diagonal son los valores propios de S

TEOREMA 1.5. *Sean las matrices de orden n: A, B, N. Donde N es la matriz nula Se define $\lambda_X = \{\lambda : \lambda \text{ es un autovalor de } X\}$ y $V_X = \{v : v \text{ es un vector de } X\}$. Si $\lambda_i \in \lambda_A$, asociado a $v_i \in V_A$. Del mismo modo, si $\lambda_j \in \lambda_B$, asociado $v_j \in V_B$. Entonces $\lambda_C = \lambda_A \cup \lambda_B$ si $C = [A\ N; N\ B] = diag(A, B)$*

Demostración. Sea Si $\lambda_i \in \lambda_A$, asociado a $v_i \in V_A$. A continuación:

$V_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 0 \end{pmatrix}$ el ejemplo 1.1 muestra que:

$$CV = \begin{pmatrix} Av_i \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i v_i \\ \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} v_i \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Probando que λ_i es autovalor de C. Para los otros autovalores de A y los de B es afín a la primera. ■

DEFINICIÓN 1.11. *Se dira* $a > 0$ *es compatible con* $: - :$ *si existen* $s > 0$ *tal que* $a = s10^{:-:(s)}$ *donde* $: - : (s) = 2^{-mant(ln(s))}$. *En caso que* $a < 0$, *se define para* $-a > 0$.

OBSERVACIÓN 1.4. La definición anterior sugiere que $a \approx 0$, pero que $a > 0$ o $a < 0$ para cualquier valor de a

TEOREMA 1.6. *Sea*

$$A = \begin{pmatrix} x & b \\ \\ c & y \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es: $p(\lambda) = \lambda^2 - traz(A)\lambda + det(A)$ *por ello sus valores característicos son* $\lambda = \dfrac{traz(A) \pm \sqrt{traz(A)^2 - 4det(A)}}{2}$

Si c *y* bc *son compatible con* $: - :$. *Si* $|x| < 1$ *e* $|y| < 1$ *entonces* $|\lambda_1| < 1$ *y* $|\lambda_2| < 1$

Demostración. La matriz

$$A' = \begin{pmatrix} x & b \\ \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

tiene por autovalores a los elementos de su diagonal, $xy = det(A')$. esto se espera para A. Si c y bc se aproximan a 0 entonces

Si $x > y$ y ambos son menores que 1 y $\lambda = \dfrac{x+y \pm \sqrt{(x+y)^2 - 4(xy-bc)}}{2}$

Sea $\lambda(r) = \dfrac{x+y+\sqrt{(x+y)^2 - 4xy - 4r}}{2}$

$\lim\limits_{r\to 0} \lambda(r) = \dfrac{x+y+\sqrt{(x+y)^2 - 4xy}}{2} = \dfrac{x+y+|x-y|}{2} = \dfrac{x+y+(x-y)}{2}$

$\lim\limits_{r\to 0} \lambda(r) = x$, es decir

$$x = \lim_{r\to 0} \lambda(r) \leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |r| < \delta \Rightarrow |\lambda(r) - x| < \epsilon$$

$$|\lambda(r)| - |x| < \epsilon$$

$$|\lambda(r)| < \epsilon + |x|$$

Tomando $\epsilon = 1 - |x|$

$$|\lambda(r)| < 1$$

Si $x < y$ y ambos son menores que 1 es parigual a la anterior.

Sea $\lambda(r) = \dfrac{x+y-\sqrt{(x+y)^2 - 4xy - 4r}}{2}$

Semejante a las precedentes.

1.2. Forma de Jordan

A pesar de ser la Diagonalización de matrices un tema fundamental, esta presenta una dificultad: No toda matriz es diagonalizable. Lo cual lleva a extender este concepto mediante la Forma de Jordan cuyos teoremas se anunciarán a continuación. Consulte la demostración extensa en (de Burgos,2006).

DEFINICIÓN 1.12. *Bloques de Jordan*

Se llama caja o bloque elemental de Jordan de orden r asociada al autovalor λ y se denota por J_r, a la matriz de orden r definida por:

$$J(\lambda_r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \dots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

DEFINICIÓN 1.13. *Matriz de Jordan*

Es aquella matriz compuesta por bloques de Jordan respecto al autovalor λ.

DEFINICIÓN 1.14. *Forma de Jordan*

Es aquella matriz diagonal por bloques, cuyos bloques son todos las matrices de Jordan de todos sus autovalores.

TEOREMA 1.7. *Sea A una matriz cuadrada de orden n, sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ los autovalores distintos de A y si $m_1, m_2, ..., m_p$ son sus multiplicidades algebraicas $m_1 + m_2 + ... + m_p = n$ entonces A es semejante a una matriz J es decir $J = P^{-1}AP$ donde J es de la forma*

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & 0 \\ & J(\lambda_2) & \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_2) \end{pmatrix} con\ J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_i) & & 0 \\ & J_2(\lambda_i) & \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{q_i}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

$i = (1, ...p)$ *donde* $J(\lambda_i)$ *tiene tamaño* $m_i \times m_i$ *y los* $J_{ij}(para j = 1, 2, ..., q_i)$ *son bloques de Jordan que tienen, todos ellos, los elementos de la diagonal iguales al autovalor* λ_i*, es decir*

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

El número q_i *de bloques de Jordan* $J_{ij}(j = 1, 2, ..., q_i)$ *que contiene* $J(\lambda_i)$*, es igual a la multiplicidad geométrica de autovalor* λ_i *de* A.

TEOREMA 1.8. *Construcción de la matriz de paso P*

Sea $V_1,\ V_2, ..., V_{s-1}, V_s$ *los subespacios asociados al autovalor* λ *,existe una base de* $B_1\ B_2\ , ...,\ B_{s-1},\ B_s$*, sus bases respectivas . La base de* V_s *construida mediante* *el siguiente algoritmo cumple*

- ***Paso 1***. *La primera fila* V_s,*se ha construido tomando* p_s *vectores de* B_s *que sean LI,módulo* V_{s-1} *es decir* $\{v_1^s,...,v_{p_s}^s\} \cup B_{s-1}$ *sea una base de* V_s

- ***Paso 2***. *Se aplica a los vectores de la fila anterior el endomorfismo* $-(\lambda v - f)$ *y, seguidamente se amplía el conjunto así obtenido con vectores de* B_{s-1} *hasta obtener* p_{s-1} *vectores de* V_{s-1} *l.i modulo* V_{s-2}. *Es decir, de modo amplíen la base* B_{s-2} *a una base de* V_{s-2}

- $\vdots$

- ***Paso s - 1***. *Se aplica a los vectores de la fila anterior el endomorfismo* $-(\lambda V - f)$ *y, seguidamente, se amplía el conjunto así obtenido con vectores de* B_2 *hasta obtener* p_2 *vectores de* V_2 *l.i. módulo* V_1. *Es decir, de modo amplíen la base* B_1 *a una base de* V_2.

- ***Paso s***. *Aplicar a los vectores de la fila anterior el endomorfismo* $-(\lambda V - f)$ *y, seguidamente, se amplía el conjunto así obtenido con vectores de* B_1 *hasta obtener* p_1 *vectores de* V_1 *que sean l.i.*

OBSERVACIÓN 1.5.

1. Siempre existe un Forma de Jordan semejante a una matriz A

2. Si la matriz es diagonalizable entonces la matriz J y la D coinciden es decir $J = D$

3. Dado A, si se tiene que $A = P^{-1}JP$ entonces $A^n = P^{-1}J^nP$

4. Dado que A y J son semejantes entonces tendrán los mismos autovalores y por lo tanto $\rho(A) = \rho(J)$

Lema 1.3. *Sea $y = A^n x$ y $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$; $v_1, v_2, ..., v_k$ los valores y vectores propios de A y además $x = c_1v_1 + c_2v_2 + ...c_kv_k$ entonces*

$$A^n x = c_1\lambda_1^n v_1 + c_2\lambda_2^n v_2 + ...c_k\lambda_k^n v_k$$

Demostración.

$$\begin{aligned} Ax &= A(c_1v_1 + c_2v_2 + ...c_kv_k) \\ &= c_1Av_1 + c_2Av_2 + ...c_kAv_k \\ &= c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + ...c_K\lambda_kv_k \end{aligned}$$

Repetiendo el proceso se tiene que

$$A^n x = c_1\lambda_1^n v_1 + c_2\lambda_2^n v_2 + ...c_k\lambda_k^n v_k$$

■

1.3. Normas matriciales

Se dará las definiciones entorno a normas matriciales y propiedades relativas a esta.

DEFINICIÓN 1.15. *Sea* $(\mathbb{E}, +, ., \mathbb{K})$ *un espacio vectorial*

Una función $||.|| : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *se dirá que es una norma sobre el* $\mathbb{E}$ *si cumple que:*

- $||x|| \geq 0$
- $||x|| = 0$ *si y solo* $x = 0$
- $||cx|| = |c||x|$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

DEFINICIÓN 1.16. *Equivalencia de normas. Se dice que dos normas* $||.||_1$, $||.||_2$ *son equivalentes si existen* α, β *positivos tales que*

$\alpha||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$ *para todo* x

Se anunciará un teorema importante

TEOREMA 1.9. *Sea* $(\mathbb{E}, +, ., \mathbb{K})$ *un espacio vectorial de dimención finita entonces todos las normas son equivalentes. (Alegria y López,p.16, s.f)*

DEFINICIÓN 1.17. *Sea* A *una matriz entonces se denotará* $(\mathbb{M}.+, ., \mathbb{R})$ *con las operaciones usuales de adición y multiplicación al espacio vectorial de martrices. Por comodidad se usará solo* $\mathbb{M}$ *para referse a dicho espacio.*

DEFINICIÓN 1.18. *Una función* $||.|| : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *se dirá que es una norma sobre* $\mathbb{M}$ *si cumple con la definición 1.15, es decir:*

- $||A|| \geq 0$
- $||A|| = 0$ *si y solo* $A = 0$
- $||cA|| = |c||A|$
- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$

EJEMPLO 1.2. Norma de Frobenius

$$||A|| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

DEFINICIÓN 1.19. *Sea* $||.||_1$ *una norma matricial y* $||.||_2$ *norma sobre* $\mathbb{R}^n$ *entonces se dice que son compatibles si cumple que*

$$||Ax||_2 \leq ||A||_1 ||x||_2$$

Ahora se dará dos proposiciones que relacionen el radio espectral con las normas de una matriz.

PROPOSICIÓN 1.1. *Para cualquier norma* $||.||$ *sobre* $\mathbb{M}$ *se tiene que*

$$\rho(A) \leq ||A||$$

Demostración. Considere una norma matricial cualquiera $||.||$ compatible con una norma, $|.|$, de $\mathbb{R}^n$

Sea $|x| = 1$ y x un autovector de A

$\rho(A) = \rho(A)|x| = |\rho(A)x| = |Ax| \leq ||A|||x| \leq ||A||$

Sacando extremos

$$\rho(A) \leq ||A||$$

■

PROPOSICIÓN 1.2. *Dado $\epsilon > 0$, existe una norma matricial $||.||$ tal que*

$$\rho(A) \leq ||A|| \leq \rho(A) + \epsilon$$

(Hons y Johnson, 2013, p.347-348)

TEOREMA 1.10. LA NORMA Y RADIO ESPECTRAL *Dada una matriz A, existe una norma $||.||$ tal que si*

- $\rho(A) \leq 1$, *entonces* $||A|| \leq 1$
- $\rho(A) > 1$, *entonces* $||A|| > 1$

Demostración.

- Si $\rho(A) < 1$ Tomano ϵ tal que: $0 < \epsilon < 1 - \rho(A)$

  existe una norma matricial $||.||$ tal que

$$\rho(A) \leq ||A|| \leq \rho(A) + \epsilon < 1$$

- Si $\rho(A) > 1$. Es evidente.

$$1 < \rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$$

- Si $\rho(A) = 1$. Dado $\epsilon > 0$, existe una norma matricial $\|.\|$ tal que

$$1 \leq \|A\| \leq 1 + \epsilon$$

Tomando $\epsilon = \dfrac{1}{n}$

$$1 \leq \|A\| \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 \leq \lim_{n\to\infty} \|A\| \leq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Luego existe una norma $\|A\|_q = 1$

■

NOTACIÓN A dicha norma se le denotará con $\|.\|_\epsilon$

TEOREMA 1.11. *Sea A una matriz inversible de orden n. Existe $c > 0$ tal que, para toda matriz de orden n con $\|V\| \leq c$, $A + V$ es inversible y $\|(A+V)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{c}$ (Lages, 1999, p.254)*

1.4. Espacios métricos

DEFINICIÓN 1.20. *Sea X un conjunto. Se dice que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ define una métrica en X si se cumplen las propiedades*

1. $d(x, y) \geq 0$ *con igualdad si y solo si* $x = y$

2. $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$

3. $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$ *para todo* $x, y, \in X$

En estas condiciones, se dice que el par (X, d) es un espacio métrico.

Observación 1.6. Muchas veces, cuando no haya posibilidad de confusión se habla simplemente de un espacio métrico X, sin hacer referencia a la función métrica, la que genéricamente será denotada con d.

Definición 1.21. *La bola abierta y la bola cerrada con centro en un punto* x *de un espacio métrico* X *y radio* $r > 0$ *son los conjuntos*

$$B_r(x) = \{y \in X : d(y, x) < r\}$$

$$B_r(x) = \{y \in X : d(y, x) \leqslant r\}$$

Definición 1.22. *Sea* $A \subset X$, *A es abierto en X, si existe* $r_x > 0$ *tal que para todo* $x \in A$ *se cumple que* $B_{r_x}(x) \subset A$

Definición 1.23. *Una sucesión de puntos de un conjunto X es una función*

$$x : \mathbb{N} \to X$$

$$n \mapsto x(n)$$

Observación 1.7. Se denotara x_n en lugar de $x(n)$

DEFINICIÓN 1.24. *Una función $f : X \to Y$ es continua en un punto $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\epsilon(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$, es continua en un subconjunto A de X si lo es en cada punto de A, y es continua si es continua en X.*

DEFINICIÓN 1.25. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de un espacio métrico X es convergente si hay un punto $x \in X$ con la siguiente propiedad: dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n > n_0$.*

En este caso se dice también que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

DEFINICIÓN 1.26. *Un espacio métrico (X, d). Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy cuando $\epsilon > 0$, $\exists N > 0 : d(x_m, x_n) < \epsilon$, $\forall m, n > N$*

DEFINICIÓN 1.27. *(X, d) es completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

DEFINICIÓN 1.28. *Una función $f : X \to X$ es una contracción si existe un número real K con $0 < K < 1$ tal que para todo x e y en X, cumple: $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$*

EJEMPLO 1.3. En el espacio

$$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una sucesión acotada}\} \text{ y } d(x, y) = sup|x_n - x_y|$$

(X, d) es un espacio métrico. A dicho espacio se le denotara por l^∞

EJEMPLO 1.4.

$$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\} \text{ y } d_p(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$(X, d_p(x,y))$ es un espacio métrico. A dicho espacio se le denotará l^p

EJEMPLO 1.5. $X = C[a,b]$ al espacio de las funciones continuas en $[a,b]$, y la aplicación $d(f,g) = max_{x\in[a,b]} = |f(x) - g(x)|$; (X,d) es un espacio métrico.

EJEMPLO 1.6. $X = C[a,b]$ al espacio de las funciones acotadas $[a,b]$, y la aplicación $d(f,g) = sup_{x\in[a,b]} = |f(x) - g(x)|$; (X,d) es un espacio métrico.

1.5. Espacios de Banach

Sea un espacio vectorial $(\mathbb{E}.+,.,\mathbb{K})$, se definirá un espacio normado $(\mathbb{E}, ||.||)$ y luego se inducirá una métrica: $d(x,y) = ||x - y||$, para definir el espacio métrico $(\mathbb{E}, d)$.

DEFINICIÓN 1.29. *El espacio métrico* $(\mathbb{E}, d)$ *es de Banach, si es completo.*

EJEMPLO 1.7. $(\mathbb{R}^n, d)$ con las métricas usuales es de Banach

EJEMPLO 1.8. l^∞ l^py son completos.

EJEMPLO 1.9. $X = C[a,b]$ al espacio de las funciones continuas en $[a,b]$, y la aplicación $||f|| = max_{x\in[a,b]} = |f(x)|$; es de Banach

EJEMPLO 1.10. $X = B(A)$ al espacio de las funciones acotadas en A, y la aplicación $||f|| = sup_{x\in A} = |f(x)|$; es de Banach

EJEMPLO 1.11. Todo espacio vectorial normado de dimensión finita es completo, por ello, es de Banach. Todo subespacio de un espacio de dimensión finita, también lo es.

DEFINICIÓN 1.30. *Un operador lineal entre Espacios normados $A : X \to Y$. Decimos que A es acotado si existe $k > 0 : ||Ax|| \leq k||x||$, $\forall x \in X$*

DEFINICIÓN 1.31. *Dado un operador $A : X \to Y$ lineal y acotado, se llama norma de A, a $||A|| = sup_{||x||\neq 0}\dfrac{||Ax||}{||x||}$*

TEOREMA 1.12. *Si $A : X \to Y$, es lineal y X es de dimensión finita, entonces A es acotado. (Alegría y López,p.59,s.f)*

DEFINICIÓN 1.32. *Sean X e Y de Banach.*

$L(X,Y) = \{A : X \to Y es\ lineal\ y\ acotada\}$, en particular: $L(X) = \{A : X \to X\ es\ lineal\ y\ acotada\}$, que es un espacio vectorial con los operaciones usuales y es normado si se define : $||A||$ como en la Definición 1.31

EJEMPLO 1.12. Sea

$L(X,Y) = \{f : X \to Y$ es lineal y acotada$\}$. El espacio $(L(X,Y), ||A||)$, es de Banach, si Y es un espacio de Banach

DEFINICIÓN 1.33. *Sea $f : X \to Y$. El punto p es punto fijo de f, si $p = f(p)$*

TEOREMA 1.13. PUNTO FIJO DE BANACH *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo y sea* $f : X \to X$ *una aplicación contracctiva. Entonces existe un único punto fijo de f. (Banach,1922)*

DEFINICIÓN 1.34. *Diferenciabilidad de funciones continuas Sea* $f : A \to F$ *una función continua,* A *un subconjunto abierto de* $E; E$ *y* F *espacios vectoriales normados.* f *es diferenciable en* $S \subset A$ *si existe una función* D *tal que:*

- $D : S \times E \to F$
- $D(s, ax + by) = \alpha D(s, x) + \beta D(s, y)$
- *Para cada* $s \in S$ *cumple*
  $\lim_{s \to v} \frac{||f(s) - f(v) - D(s, s - v)||}{||v||} = 0$

DEFINICIÓN 1.35. *Sea el conjunto abierto* $A \subset X$ *y* $a \in A$*. La derivada de* f *en* a*, denotada por* $Df(a)$*, es una transformación lineal* $Df(a) : X \to X$ *caracterizada por*

- $f(a + v) - f(a) = Df(a)v + r(v)$*, con* $a + v \in A$
- $\lim_{v \to 0} \frac{||f(a + v) - f(a) - Df(a)v||}{||v||} = 0$ *con* $a + v \in A$

TEOREMA 1.14. *La* $Df(a)$ *si exite es única*

TEOREMA 1.15. $D(fog)(a) = D(f(g(a))D(g(a))$

EJEMPLO 1.13. Sea $U = \{A : A$ es una matriz inversible de orden n$\}$ y $\mathbb{M} = \{M : M$ es una matriz de orden n$\}$

- U es abierto en $\mathbb{M}$. Del Teorema 1.2 que en lo literal señala: «Sea M una matriz inversible de orden n. Existe $c > 0$ tal que, para toda matriz de orden n con $||V|| \leq c$, $M + V$ es inversible y $||(M + V)^{-1}|| \leq \frac{1}{c}$».

  Ahora bien considere $A \in U$ y W una matriz de orden n. Existe $c > 0$ de tal modo que si $||W-A|| < c$, se concluye: $A+(W-A) = W$ es inversible. Dicho de otra forma: si $W \in B_C(A)$ entonces $W \in U$. Por lo tanto $B_C(A) \subset U$

- $f : U \to \mathbb{M}$ con $f(X) = X^{-1}$. Como en la mayoría de los casos se propone una «candidata» a la derivada. Valga $A \in U$ $T(A) : \mathbb{M} \to \mathbb{M}$

  $T(A).V = -A^{-1}VA^{-1}$

  - Es lineal

    $T(A)(V + kU) = -A^{-1}VA^{-1} - A^{-1}kVA^{-1} = T(A).V + kT(A).U$

  - Se supone que existe $r(V)$ tal que

    $f(A + V) - f(A) = (A + V)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}.V.A^{-1} + r(V).$

    Al realizar operaciones se llega que

    $r(V) = (A + V)^{-1}(VA^{-1})^2$

    $||r(V)|| \leq ||(A + V)^{-1}||||A^{-1}||^2||V||^2$

    Se aplica el Teorema 1.11. de ahí se desprende que

    $\lim\limits_{v \to 0} \dfrac{||r(V)||}{||V||} = 0$

- Por la unicidad: $T(A) = Df(A)$

1.6. Funciones vectoriales

En esta sección se dará algunos teoremas conocidos respecto a las funciones reales de variable real y las vectoriales de variable vectorial.

1.6.1. Funciones reales de variable real

TEOREMA 1.16. TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Sea $f : [a\ \ b] \to [M\ \ N]$. *Entonces existe* $\theta \in (a, b)$ *tal que:* $|f(a) - f(b)| = |f'(\theta)||a - b|$

1.6.2. Funciones vectoriales de variable vectorial

DEFINICIÓN 1.36. $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto. Considere la función* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. *Se dice que* f *es Lipschitziana, si existe un número real* k *con* $k > 0$ *tal que para todo* x *e* y *en* $\mathbb{A}$, *cumple:* $d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$

DEFINICIÓN 1.37. $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto. Considere la función* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *, esta es una contracción, si existe un número real* k *con* $0 \leq k < 1$ *tal que para todo* x *e* y *en* $\mathbb{A}$, *cumple:* $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$

EJEMPLO 1.14. $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y convexo considere la función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^n$

es una función diferenciable tal que $\|f'(x)\| \leq \lambda < 1$, para una cierta constante λ y $x \in \mathbb{A}$, f es una contracción *(Lages, 2010, p.278).*

DEFINICIÓN 1.38. *$\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Considere la función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Se dice que f es fuertemente diferenciable, en el punto $a \in \mathbb{A}$ cuando existe una transformación lienal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{A}^n$ tal que, para x, $y \in \mathbb{A}$ cumple: $f(x) - f(y) = T(x-y) + r_a(x,y)$ con $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{r_a(x,y)}{\|x-y\|}$*

DEFINICIÓN 1.39. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Considere la función $f : U \to \mathbb{R}^n$. Dicha función es un difeomorfismo local si*

- *Para cada $x \in U$, existe un abierto V_x con $x \in V_x \subset U$ tal que:*
- *La restricción de f a V_x es un difiomorfismo sobre un abierto $W_x \subset \mathbb{R}^n$*

OBSERVACIÓN 1.8.

- Si $f \in C^k$ entonces se dirá que es un difeomorfismo local de clase C^k
- En este caso en particular, para cada $x \in U$ la aplicación inversa $(f\big|V_x)^{-1} : W_x \to V_x$ también es de clase C^k

EJEMPLO 1.15. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Un difeomorfismo local $f : U \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo (global) sobre $V = f(U)$ si y solo si es inyectiva.

DEFINICIÓN 1.40. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. La función $f : X \to \mathbb{R}^n$. El punto p es punto fijo de f, si $p = f(p)$*

TEOREMA 1.17. TEOREMA DEL PUNTO FIJO PARA CONTRACCIONES

Sea $F \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado, la función $f : F \to F$ una contracción. Dado cualquier $x_0 \in F$, sea la secuencia $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$,...,$x_{k+1} = f(x_k)$, converge para un p, que es el único punto fijo de f (Lages, 1999, p.279).

TEOREMA 1.18. TEOREMA DEL DIFEOMORFISMO LOCAL *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Considere la función $f : U \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo local de clase C^k si y solo si, para todo $x \in U$, la derivada $f' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo $(det(Jf(x)) \neq 0)$ (Lages, 1999, p.284).*

EJEMPLO 1.16. Valga $P(J) = \{p : f(p) = p\}$, de modo tal que sea un conjunto finito de cardinal n. Tome $P_i(J) = \{p_i : f(p_i) = p_i, 1 < i < n\}$. Para p_i con $det(J_{p_i}) \neq 0$ es necesaria la existencia de un abierto que contenga a p_i: $U_{pi} \subset \mathbb{R}^n$ $f : U_{pi} \to \mathbb{R}^n$, es difeomorfismo local.

EJEMPLO 1.17.

$$f(x, y) = \left(x^2 + 0{,}5x, y^2 + 0{,}5y\right)$$

Dado que $f(0, 0) = (0, 0)$. Note que:

$$J(f(a, b)) = \begin{pmatrix} 2a + 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2b + 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Es la matriz jacobiana de f evaluada en (a, b). El estudio se enfocará a $J(f(x^*, y^*))$ donde (x^*, y^*) es un punto de equilibrio. Seguidamente

$$J(f(0,0)) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

En las lineas punteadas verdes de la gráfica (Figura 1.1), están situados todos los puntos donde la derivada no es un isomorfismo. Por ello, se puede generar un abierto V_x centrado en 0, como en la imagen antes citada. Además, para todo $x \in V_x$ cumple que J_x es un isomorfismo. Luego, $f : V_x \to \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo

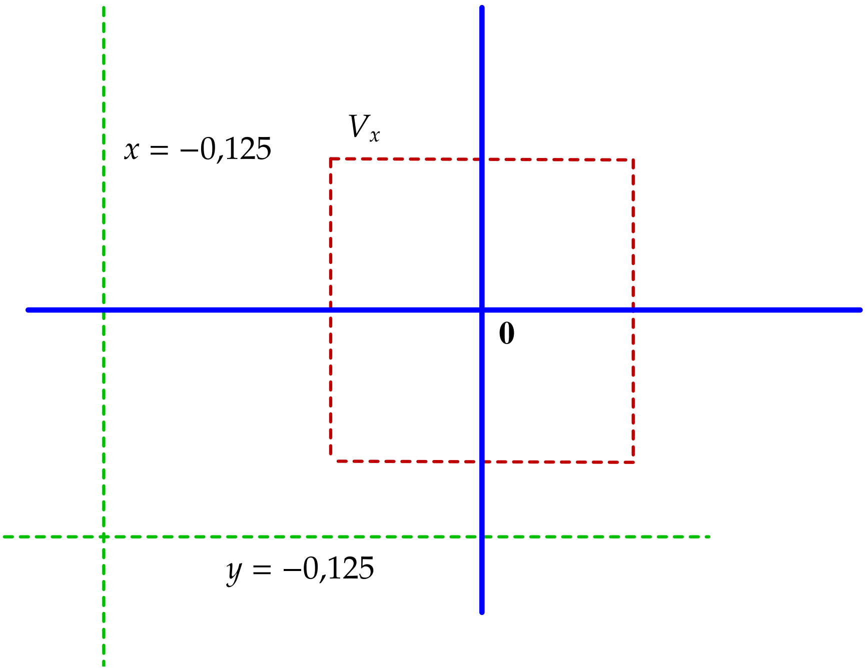

Figura 1.1: V_x

local.

1.7. Ecuaciones en diferencias.

Se darán algunas definiciones referentes al tema de Ecuaciones en Diferencias *e.d*

DEFINICIÓN 1.41. *Dada una función f y una constante h tal que $x+h$ pertenece al dominio de dicha función, se denomina primera diferencia hacia adelante de f a aquella función cuyo valor en x viene dado por: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$ Se denomina n diferencia a $\Delta^n f(x) = \Delta\Delta^{n-1} f(x)$ y convencionalmente operador identico a $\Delta^0 f(x) = f(x)$*

DEFINICIÓN 1.42. *Sea una función f se define el operador E*

$$E[f(x)] = f(x+h)$$

tal que: $\Delta f(x) = E[f(x)] - f(x)$

PROPOSICIÓN 1.3. *El operador E tiene las siguientes propiedades*

- $E^0[f(x)] = f(x)$
- $E^n[f(x+nh)] = E[E^{n-1}[f(x)]]$ *para* $n = 1, 2, 3, ...$
- $E^n[f(x+nh)] = f(x+nh)$ *para* $n = 1, 2, 3, ...$

(Golberg, 1964, p.24).

PROPOSICIÓN 1.4. *Si n es entero positivo, es*

$$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k f(x) \tag{1.5}$$

(Golberg, 1964, p.59).

PROPOSICIÓN 1.5. *Si n es entero positivo, es*

$$E^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(x) \tag{1.6}$$

(Golberg, 1964, p.60).

DEFINICIÓN 1.43. *Se denomina ecuación en diferencias (E.d), relativa a un conjunto S de valores de la variable independiente x, a una ecuación que relacione valores de una función $f(x)$ y una o más de sus diferencias $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$,..., para cada valor x perteneciente a S*

Para fijar ideas, se considera la ecuación en diferencias $\Delta f(x) + 6\Delta^2 f(x) - x = 0$. Y $S_{x_0} = \{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, x_0 + 3h, ...\}$. El conjunto se puede transformar en un conjunto $S = \{a, a+1, a+2, a+3, ...\}$. Haciendo $x = (x_0 - ah) + kh$. Seguidamente se define $y(k) = f(x_0 + kh)$.

Un ejemplo de ello es $\Delta y(k) + 3y(k) = 0$. Y a su vez dada una *e.d.* escrita de esa forma debe entenderse definida para un subconjunto S de números enteros.

De la proposición 1.5, se puede expresar el ejemplo dado como $y(k+1)+2y(k) = 0$

Finalmente se darán las definiciones de ecuación en diferencia de orden n y discución de sus soluciones.

DEFINICIÓN 1.44. *Una ecuación en diferencia es lineal en un conjunto S si se puede escibir como* $g_0(k)y(k+n) + g_1(k)y(k+n-1) + ... + g_{n-1}(k)y(k+1) + g_n(k)y(k) = G(k)$ *Donde g_i y G son funciones de k pero no de $y(k)$*

DEFINICIÓN 1.45. *Una ecuación lineal relativa a S es de orden n cuando, escrita bajo la forma de la definición 1.45, tanto los valores de $g_0, g_1, ...g_n$ son distintos de cero en cada punto de S*

Se afirma que: $y(k+1)+2y(k) = 0$ es lineal de orden 1 y $y(k+2)+2y(k+1) = 0$ también, pero $y(k + 3) + 4y(k + 2) + 2y(k + 1) + y(k) = 0$ es de orden 3, pues la definición 1.45 se puede interpretar:« Una E.d es de orden n cuando relaciona valores de y, correspondiente a valores de k (incluidos en S), que se diferencian en n »,

- Para $y(k + 1) + 2y(k) = 0$ se tiene $g_0(k) = 1$ $g_1(k) = 2$. Entonces se puede escribir como $g_0y(k+1)+g_1y(k) = 0$, esto si $n = 1$: $g_{n-1}y(k+n)+g_ny(k) = 0$. De ahí que su orden es 1

- Para $y(k + 2) + 2y(k + 1) = 0$ se tiene $g_0(k) = 1$ $g_1(k) = 2$. Entonces se puede escribir como $g_0y(k+2)+g_1y(k+1) = 0$. Si $(k) = y(k+1)$. Se tiene que $g_0(k+n)+g_1(k) = 0$, es decir, $g_{n-1}(k+n)+g_n(k) = 0$. O sea, su orden es 1

- Si $y(k+3)+y(k+2)+y(k+1)+y(k) = 0$. Haciendo $g_0 = g_1 = g_2 = g_3 = 1$. Se tiene que $g_0y(k + 3) + g_1y(k + 2) + g_2y(k + 1) + g_3y(k) = 0$. En otras palabras: $g_{n-3}y(k+n)+g_{n-2}y(k+n-1)+g_{n-1}y(k+n-2)+g_ny(k+n-3) = 0$, para $n = 3$. Finalmente su orden es 3

«En la Teoría Ecuaciones en diferencias el problema se centra en, dada una $e.d$ relativa a un conjunto S, hallar todas aquellas funciones $f(x)$ para las cuales se cumple la relación establecida». Este informe centrará su analisis en las ecuaciones en diferencias donde S son los números naturales o enteros.

DEFINICIÓN 1.46. *Se dice que y es una solución de una ecuación en diferencias, relativa a un conjunto S, si los valores de y reducen a la e.d a una identidad en S en cada punto del mismo.*

EJEMPLO 1.18. Recta discreta $x(n+1) = mx(n) + b$

EJEMPLO 1.19. Ecuación Logística

$$x(n+1) = \mu x(n)(1 - x(n))$$

EJEMPLO 1.20. $4x(n+2) - 5x(n+1) - 3x(n) = 0$

Se dará un teorema de existencia y unicidad para las soluciones.

TEOREMA 1.19. *Sea la ecuación lineal en diferencias de orden n $g_0(k)y(k+n) + g_1(k)y(k+n-1) + ... + g_{n-1}(k)y(k+1) + g_n(k)y(k) = G(k)$, relativa al conjunto S de valores enteros consecutivos de k, tiene solamente una solución y, cuyos valores correspondientes a n valores consecutivos de k sean iguales a unos previamente fijados.*

(Golberg, 1964, p.88).

OBSERVACIÓN 1.9. .

- El teorema 1.19, señala que $x(n+2) = mx(n+1) - x(n) + b$ sujeta a $x_0 = 1,\ x_1 = 1$, tiene solución única. O si se da $x_5 = 1$ y $x_6 = 10$, también pues no importa los indices, solo que sean consecutivos y que sean igual al orden de la ecuación en diferencias.

- Las soluciones (o solución) de una E.D se pueden interpretar como sucesiones, cuya convergencia o divergencia se discute (en algunos casos) con solo tener las condiciones iniciales.

EJEMPLO 1.21. La ecuación en diferencias $y(k+2) - y(k+1) + 4y(k) = 0$ tiene por solución general $y(k) = 2^k(A + Bk)$ y la solución particular $y(k) = 2^k(1 + 2k)$ es la única solución que además de sastifacer *ed* verifica que $y(0) = 1$ y $y(1) = 6$

DEFINICIÓN 1.47. *Si una ecuación tiene como solución una solución constante, $y(n) = y^*$, a dicho valor se le denomina valor de equilibrio o estacional.*

DEFINICIÓN 1.48. *Se dice que el valor de equilibrio ($y = y_*$) es estable (o que la ecuación en diferencias es estable) si $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = y_*$*

DEFINICIÓN 1.49. *Un Sistema de ecuaciones en diferencias homógeno cuadrado de grado p es*

$X(n+1) = [a_{ij}(n)]_{p\times p}X(n)$ con $[a_{ij}(n)]_{p\times p}$ dependiente de n y no de $x(n)$, con $x(n) = (x_1(n), x_2(n), x_3(n), ..., x_p(n))$

EJEMPLO 1.22.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n \quad \text{con } x_0 = (1,1)$$

EJEMPLO 1.23. Sea $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, sujeto a $x_0 = 1$, $x_1 = 1$

Este último ejemplo se puede expresar de manera matricial si se considera $y_{n+1} = x_n$, es decir

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

1.8. Grupos Discretos

Se darán definiciones para que relacionen a los grupos y a los espacios topologicos.

DEFINICIÓN 1.50. *Sea G un conjunto. Si se define una ley de opreración interna $*$ tal que es un grupo $(G, *)$, y una topología τ sobre el mismo conjunto. $(G, \tau, *)$ es un un grupo tólogico si*

- $g : (G \times G, \tau \times \tau) \to (G, \tau)$ *con* $g(a, b) = a * b^{-1}$, *si g es continua.*

DEFINICIÓN 1.51. *Grupo discreto. Sea G un conjunto. Si se define una ley de opreación interna $*$ tal que es un grupo $(G, *)$, y la topología $P(G)$ sobre el mismo* *conjunto. A* $(G, P(G), *)$ *se le denomina grupo discreto*

DEFINICIÓN 1.52. *Sean los conjuntos* G *y* H *tales que* $H \subset G$*. Además, los espacio tolólogico* (G, τ) *y* $(H, i * \tau)$ *donde* $i * \tau_i$ *es la topología de subespacio, y* $(H, *)$ *es subgrupo de* $(G, *)$*. El espacio topólogico* $(H, i*\tau)$ *se denomina subgrupo discreto de un grupo topológico* $(G, \tau, *)$ *si* $i * \tau = P(H)$

OBSERVACIÓN GENERAL En algunos casos se dirá que M es un espacio [...], solo por comodida, dicha afirmación hace referancia que M cumple tales condiciones, por ejemplo: « Sea M un espacio topológico», se entiende que existe una tología sobre M: τ, tal que (M, τ) es el espacio topológico en cuestión.

Capítulo 2

Sistema Dinámicos Discretos

En este capítulo se abordará los Sistema Dinámicos Discretos, dando una definición general alternativa, y se discute la existencia de puntos de equilibrio con la estabilidad de los mismos.

DEFINICIÓN 2.1. *Un sistema dinámico es una terna* $((X, \tau), (\mathbb{G}, *), f)$ *donde* $(\mathbb{G}, *)$ *es un semigrupo y* (X, τ) *es un espacio tológico, tal que*

- *La función* $f : \mathbb{G} \times X \to X$ *satisface* $f(g, f(h, x)) = f(g * h, x)$
- *Existe un único* e *en* $\mathbb{G}$*, tal que para todo* x *en* X *cumple,* $F(e, x) = x$
- *Para todo* m *arbitrario,* $f_m : (X, \tau) \to (X, \tau)$ *es continua*

DEFINICIÓN 2.2. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico y* $(\mathbb{G}, *)$ *es un semigrupo. Un sistema dinámico discreto es la terna* $((X, \tau), F, (\mathbb{G}, *))$ *con una función* $F : \mathbb{N} \times X \to X$ *tal que*

1. *Sea* $(\mathbb{G},*)$ *y* $(\mathbb{T},*)$ *semigrupos con la misma operación. Y* $(\mathbb{T},d_{\mathbb{T}})$ *un espacio métrico.*

    a) $(\mathbb{G},*)$ *es grupo cíclico y visto como espacio métrico* $(\mathbb{G},d)$*,* d *es equivalente a la métrica discreta o,*

    b) $(\mathbb{G},*)$ *es enumerable y es generado por un conjunto enumerable y visto como espacio métrico* $(\mathbb{G},d)$*,* d *es equivalente a la métrica discreta o,*

    c) *como espacio topológico* $(\mathbb{G},\tau)$ *es isomorfo a* $(\mathbb{T},\tau_{\mathbb{T}})$ *con* $\tau_{\mathbb{T}}$ *la topología inducida por* $d_{\mathbb{T}}$*. Sujeto a que* $(\mathbb{T},*)$ *y* $(\mathbb{T},d_{\mathbb{T}})$ *cumplan con* (b)*, respectivamente.*

2. *Existe un único* e *en* $\mathbb{G}$*, tal que para todo* x *en* X *cumple,* $F(e,x)=x$

3. $F(n,F(m,x)) = F(n*m,x), \forall\ n;m \in \mathbb{G}\ , \forall x \in X$

4. *Tal que para todo* m *fijado,* $F_m : (X,\tau) \to (X,\tau)$ *es continua.*

En este trabajo se estudiarán los sistemas dinámicos para el semigrupo $(\mathbb{N},+)$ o el grupo $(\mathbb{Z},+)$.

EJEMPLO 2.1.

Considere $(\mathbb{E},+,.,\mathbb{R})$, el espacio vectorial de matrices con las operaciones usuales. Sea una norma: $||M||$, definida en el espacio mencionado. Y $d(M,N)=||M-N||$ la métrica generado por la norma. Al considerar, $(\mathbb{E},\tau_d)$ donde τ_d es la topología generada por la métrica d

Se define

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$$

$$F(n, A) = \begin{cases} A & \text{si } n = 0 \\ \\ 2^{-n}AQ & \text{si } n \neq 0 \text{ y } Q = Q^2 \end{cases}$$

Se verificará las condiciones

- $F(0, A) = A$, por definición de F

- Ahora, para probar: $F(n, F(m, A)) = F(n + m, A)$

  - Si $n = m = 0$. $F(0, F(0, A)) = F(0, A) = F(0 + 0, A)$

  - Si $n = 0$ y $m \neq 0$. $F(0, F(m, A)) = F(m, A) = F(0 + m, A)$

  - Si $n \neq 0$ y $m = 0$. $F(n, F(0, A)) = F(n, A) = F(n + 0, A)$

  - Si $n \neq 0$ y $m \neq 0$.

    $F(n, F(m, A)) = 2^{-n}F(m, A)Q = 2^{-n}(2^{-m}AQ)Q = 2^{-n-m}(AQ^2) = 2^{-(n+m)}(AQ) = F(n + m, A)$

- Para comprobar que es continua se hará

  Sea $\epsilon > 0$

  $||F(n, A) - F(n, B)|| \leq ||2^{-n}AQ - 2^{-n}BQ|| \leq ||v(AQ - BQ)|| \leq$

  $||v(A - B)Q)|| \leq v||(A - B)||||Q|| < ||(A - B)||||Q||$

$\nu = 2^{-n} < 1$ para todo $n > 1$

Tomando : $\delta = \dfrac{\epsilon}{||Q||}$

OBSERVACIÓN 2.1. En un espacio métrico, una función es continua si dado $\epsilon > 0$, exite $\delta > 0$ tal que : $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon$

EJEMPLO 2.2.

Considere $(\mathbb{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, ., \mathbb{R})$, el espacio vectorial de funciones derivables infinitamente, lipschitziana y cuyas derivadas n- ésimas son también lipschitziana definidas de $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ con las operaciones usuales. Sea una norma: $||f||$, definida en el espacio mencionado. Ahora, la métrica generada, por la norma $d(f, g) = ||f - g||$. Al considerar, $(\mathbb{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \tau_d)$ donde τ_d es la topología inducida por la métrica d

$$F : \mathbb{N} \times \mathbb{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{E}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$F(n, f) = \begin{cases} f & \text{si } n = 0 \\ f^{(n)} & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$f^{(n)}$: derivada n-ésima

Se verificarán las condiciones

- $F(0, f) = f$, por definición de F
- Ahora, para probar: $F(n, F(m, A)) = F(n + m, A)$
  - Si $n = m = 0$. $F(0, F(0, f)) = F(0, f) = F(0 + 0, f)$

- Si $n = 0$ y $m \neq 0$. $F(0, F(m, f)) = F(m, f) = F(0 + m, f)$

- Si $n \neq 0$ y $m = 0$. $F(n, F(0, f)) = F(n, f) = F(n + 0, f)$

- Si $n \neq 0$ y $m \neq 0$.

  $F(n, F(m, f)) = (F(m, f))^{(n)} = (f^{(m)})^{(n)} = f^{(m+n)} = F(n + m, f)$

- Para demostrar que es continua se hará

  $\|F(n, f) - F(n, g)\| \leq \|f^{(n)} - g^{(n)}\| \leq \|(f - g)^{(n)}\| \leq L\|(f - g)\|$

EJEMPLO 2.3. Considere un espacio topológico (U, τ) donde $U \subset \mathbb{R}$ y f una función biyectiva definida en U sobre si mismo. Se define

$$F : \mathbb{N} \times U \to U$$

$$F(n, x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ f^{(n)}(x) & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$f^{(n)} = fofofof..f$, n-veces

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $f^{(k)}$ es una contracción, para todo k

- $F(0, x) = x$, por definición de F

- Ahora, para probar: $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x)$

  - Si $n = m = 0$. $F(0, F(0, x)) = F(0, x) = F(0 + 0, x)$

  - Si $n = 0$ y $m \neq 0$. $F(0, F(m, x)) = F(m, x) = F(0 + m, x)$

  - Si $n \neq 0$ y $m = 0$. $F(n, F(0, x)) = F(n, x) = F(n + 0, x)$

- Si $n \neq 0$ y $m \neq 0$.

  $F(n, F(m, x)) = F(n, f^{(m)}(x)) = (f^{(n)})^{(m)}(x) = f^{m+n}(x)$

- Comprobar la continuidad de $F(n, x)$ es inmediata, por se $f^{(n)}$ una contracción.

(King y Mendes, 2015). Para determinar un sistema dinámico se deben dar un un espacio métrico (X, d) y una función continua, tal que para cada $x \in X$, se define: $o(x, f) = \{x, f(x), f^{(2)}(x), f^{(3)})(x), ...\}$, donde: $f^{(n)} = fofofo...f$, n-veces.
La función $f^{(n)} : X \to X$, se le llama n-iteración de f y sea $f^{(0)} : X \to X$ como la función identidad.

Se precisa en la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.3. *Sean X un espacio métrico, una función continua del espacio X en sı mismo, $f : X \to X$ y la órbita $o(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}$. La terna $(X, f, o(x, f))$ es un sistema dinámico discreto.*

OBSERVACIÓN 2.2.

«La interpretación que le damos a la $o(x, f)$ es la siguiente: En el tiempo $n = 0$ un objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $n = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en $f(x)$; en el tiempo $n = 2$ el objeto vuelve a cambiar de posición y ahora se encuentra en $f(f(x)) = f^{(2)}(x)$; etcetera» *(King y Mendes, 2014, p.10).*

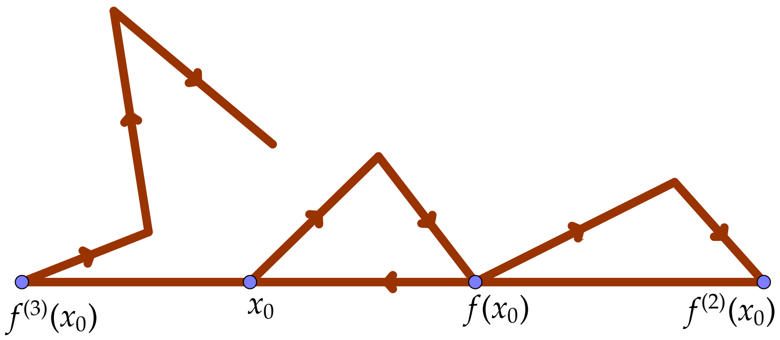

Figura 2.1: Primeros elementos de la órbita de x_0

OBSERVACIÓN 2.3. La meta es estudiar todas las posibles sucesiones $o(x, f)$. Y estudiar su comportamiento cuando n tiende al infinito.

Si $x \neq y$, pero $f(x) = f(y)$, las órbitas coinciden. Esto se puede «evitar» si se exige la inyectivad de f. Ahora sea $\overline{f} : Y \to Y$ donde $Y = img(f)$, se ha construido una función biyectiva. En tal caso, si $\overline{f}$ tiene una inversa continua se pude inducir un sistema dinámico discreto, partiendo de (Y, τ) y

$$F : \mathbb{N} \times Y \to Y$$
$$F(n,x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ \overline{f}^{(n)}(x) & \text{si } n > 0 \\ (\overline{f}^{-1})^{(n)}(x) & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

$g^{(n)} = gog...og$ n-veces

OBSERVACIÓN 2.4. «Si se define para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n : X \to X$ por $F_n(x) = F(n, x)$, se tiene que $F_n(x) o F_m(x) = F_{n+m}(x)$ para todo n, m naturales.

En particular, si $f = F_1$ es un homeomorfismo y se cumple que $F_n = f^n$.

Por esto, un sistema dinámico discreto se puede inducir por un homeomorfismo:

$f : X \to X$» *(Sambarino, 2005, p.4).*

DEFINICIÓN 2.4. *Sean X un espacio métrico, y un homeomorfismo del espacio X en sı mismo, $f : X \to X$ y la órbita*

$o(x, f) = \{..., (f^{-1})^{(3)}(x), (f^{-1})^{(2)}(x), (f^{-1})^{(1)}(x), x, f(x), f^2(x), f^3(x), ...\}$.

La terna $(X, f, o(x, f))$ es un sistema dinámico discreto.

Definidos X y f, se construye para cada punto x en X, una sucesión de puntos conocida como la órbita de x bajo f, denotada por $o(x, f)$. Fijado un x_0 según Def.2.4 se desprende que: $x_n = f^{(n)}(x_0)$ si y solo si $x_{n+1} = f(x_n)$.

Entonces se podrá determinar a un sistema dinámico discreto si se tiene:

$x_{n+1} = f(x_n)$ sujeto a x_0

Esto motiva a la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.5. *Sean X un espacio métrico, una función continua del espacio X en sı mismo, $f : X \to X$ y la órbita $o(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), ...\}$. La terna $(X, f, o(x_0, f))$ es un sistema dinámico discreto y se denotará $x_{n+1} = f(x_n)$ sujeto a x_0*

2.1. Punto de Equilibrio

«La noción de punto de equilibrio es central en el estudio de la dinámica de algún sistema físico. Las soluciones de un sistema dado tienden a sus puntos de equilibrio asintóticamente estables. Este es el objeto de estudio de la teoría de la estabilidad» *(Ruiz, 2015).*

DEFINICIÓN 2.6. *Familia de sistemas dinámicos. Sea* $\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ *Se dirá que* $\{(X, \Phi, o(x, \Phi))\}_{x \in \mathbb{A}}$ *es una familia de SDD.*

La definición de punto fijo es la misma para cualquier SDD, ya sea los dados por las definiciones 2.3, a la 2.6. Primero se dará las nociones de punto fijo y estabilidad para una función real de variable real, luego se generalizará.

2.1.1. Función real de variable real

Sea $\mathbb{A} = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y considere la función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

DEFINICIÓN 2.7. *Un punto* x^* *en el dominio de f es un punto de equilibrio del sistema dinámico dados por def* $2.3 - 2.6$ *si este es un punto fijo de* f*, es decir* $f(x^*) = x^*$

OBSERVACIÓN 2.5. Gráficamente un punto de equilibrio es la x-coordenada de el punto donde la gráfica de f intersecta la linea diagonal y = x.

EJEMPLO 2.4. Calcule los puntos de equilibrio .

$$x_{n+1} = mx_n + b \text{ sujeto } x_0 = 1$$

Sea $f(x) = mx + b$. Luego, $f(x) = x$. Al despejar se llega que

$$x^* = \frac{b}{1-m}$$

Estabilidad de un punto de equilibrio según defi 2.4

DEFINICIÓN 2.8. *Sea $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Considere la función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ Dado el $(X, f, o(x_0, f))$. El punto de equilibrio x^* es denominado atractor de $(X, f, o(x_0, f))$ si: existe un intervalo abierto (a, b); x^*, $x_0 \in (a, b)$, tal que $f((a, b) \cap \mathbb{A}) \subset (a, b) \cap \mathbb{A}$ y para todo $x \in (a, b) \cap \mathbb{A}$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x^*$*

DEFINICIÓN 2.9. *Sea $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Considere la función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ Dado el $(X, f, o(x_0, f))$. El punto fijo x^* es denominado repulsor si: existe un intervalo abierto (a, b); x_0, $x^* \in (a, b)$, tal que para todo $x \in (a, b) \cap \mathbb{A}$, $x \neq x^*$, existe un número natural n, $n = n(x)$; tal que: $f^n(x) \notin (a, b) \cap \mathbb{A}$*

DEFINICIÓN 2.10. *Sea $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Considere la función $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ Dado el $(X, f, o(x_0, f))$. El punto fijo x^* es estable si para todo ϵ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B(x^*; \delta)$, y para todo $n \geq 0$ se tiene que $d(f^n(x), x^*) < \epsilon$*

«La presencia de un punto fijo atractor, o repulsor, x^* nos da información sobre la dinámica inducida por las iteraciones de la función f en un intervalo abierto que contiene al punto, es decir en una vecindad de x^*. Si estamos ante un atractor, entonces los puntos cercanos tienen, todos ellos, órbitas que convergen al punto fijo. Por otro lado, si estamos ante un repulsor, entonces al menos sabemos que las órbitas de puntos cercanos escapan en un tiempo finito (que depende de cada punto) de una vecindad del punto fijo» *(King y Mendes, 2014).*

TEOREMA 2.1. *Sea x^* un punto fijo de f y f es derivable en x^**

1. $|f'(x^*)| < 1$, *entonces existe un abierto I, tal que para cada elemento de la familia de sistemas* $\{(X, f, o(x, f))\}_{x\in I}$, x^* *es un punto fijo atractor*

2. $|f'(x^*)| > 1$, *entonces existe un abierto I, tal que para cada elemento de la familia de sistemas* $\{(X, f, o(x, f))\}_{x\in I}$, x^* *es un punto fijo repulsor.*

Demostración. Basada en *(King y Mendes, 2014).*

1. Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces

$$\left|\lim_{x\to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}\right| < 1$$
$$\lim_{x\to x^*} \left|\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}\right| < 1$$
$$\lim_{x\to x^*} \left|\frac{f(x) - x^*}{x - x^*}\right| < 1$$

Aplicando propiedades del *limite* y la continuidad. Por la completitud de $\mathbb{R}$, existe un $K < 1$ tal que

$$\lim_{x\to x^*} \left|\frac{f(x) - x^*}{x - x^*}\right| < K < 1$$

Sea

$$L = \lim_{x \to x^*} \left| \frac{f(x) - x^*}{x - x^*} \right| \leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - x^*| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - x^*}{x - x^*} - L \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{f(x) - x^*}{x - x^*} \right| - |L| < \epsilon$$

$$\left| \frac{f(x) - x^*}{x - x^*} \right| < \epsilon + L$$

Tomando $\epsilon = K - L$

$$\left| \frac{f(x) - x^*}{x - x^*} \right| < K$$

Y así, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap A$, entonces,

$$\left| \frac{f(x) - x^*}{x - x^*} \right| < K \tag{2.1}$$

y así, $|f(x) - x^*| < K|x - x^*| < |x - x^*| < \delta$

$f((x^* - \delta, x^* + \delta)) \subset (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap A$

Ahora, $f(x) \in f((x^* - \delta, x^* + \delta))$ entonces $f(x) \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \cap A$, luego aplicando (2.1)

$$\left| \frac{f(f(x)) - x^*}{f(x) - x^*} \right| < K \tag{2.2}$$

y así, $|f(f(x)) - x^*| < K|f(x) - x^*| < K^2|x - x^*| < |x - x^*| < \delta$

$fof((x^* - \delta, x^* + \delta)) \subset (x^* - \delta, x^* + \delta)$

Esta cadena de desigualdades sugiere que es cierto para todo n en general

$$|f^{(n)}(x) - x^*| < K^n|x - x^*| < \delta \tag{2.3}$$

$$f^{(n)}((x^* - \delta, x^* + \delta)) \subset (x^* - \delta, x^* + \delta) \tag{2.4}$$

Se aplicará inducción sobre n, para probar dicha afirmación. En efecto, para $n = 1$, es verdadero (2.2). Ahora se supone que para $n = p$ es cierto, esto es

$$|f^{(p)}(x) - x^*| < K^p|x - x^*| < \delta \tag{2.5}$$

$$f^{(p)}((x^* - \delta, x^* + \delta)) \subset (x^* - \delta, x^* + \delta) \tag{2.6}$$

Sea $f^{(p)}(x) \in f^{(p)}((x^*-\delta, x^*+\delta))$ entonces $f^{(p)}(x) \in ((x^*-\delta, x^*+\delta))$. Aplicando (2.2)

$$\left|\frac{f(f^{(p)})(x) - x^*}{f^{(p)}(x) - x^*}\right| < K \tag{2.7}$$

$|f(f^{(p)})(x) - x^*| < K|f^{(p)}(x) - x^*| < K^{p+1}|x - x^*| < \delta$

$fo(f^{(p)})((x^* - \delta, x^* + \delta)) \subset (x^* - \delta, x^* + \delta)$

$|f^{(p+1)}(x) - x^*| < K^{p+1}|x - x^*| < \delta$

$f^{(p+1)}((x^* - \delta, x^* + \delta)) \subset (x^* - \delta, x^* + \delta)$

Así para todo punto x del conjunto $(x^* - \delta, x^* + \delta) \cap A$ se tiene que $f^{(n)}(x)$ converge a x^* cuando n tiende a infinito ((2.4)). Como consecuencia, x^* es un punto fijo atractor bajo f.

2. Si $|f'(x^*)| > 1$, entonces

$$\left|\lim_{x\to x^*} \frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}\right| > 1$$

$$\lim_{x\to x^*} \left|\frac{f(x) - f(x^*)}{x - x^*}\right| > 1$$

$$\lim_{x\to x^*} \left|\frac{f(x) - x^*}{x - x^*}\right| > 1$$

$$\lim_{x\to x^*}\left|\frac{x-x^*}{f(x)-x^*}\right|<1$$

Aplicando propiedades de *limite* y la continuidad. Ahora (2.2). Por la completitud de $\mathbb{R}$, existe un $s<1$ tal que

$$\lim_{x\to x^*}\left|\frac{x-x^*}{f(x)-x^*}\right|<s<1$$

Sea

$$L=\lim_{x\to x^*}\left|\frac{x-x^*}{f(x)-x^*}\right| \leftrightarrow \forall\epsilon>0,\exists\delta>0,|x-x^*|<\delta\Rightarrow\left|\frac{x-x^*}{f(x)-x^*}-L\right|<\epsilon$$

Teniendo un razonamiento parecido al anterior se llega que:

$$\left|\frac{x-x^*}{f(x)-x^*}\right|<s$$

$$|x-x^*|<s|f(x)-x^*|$$

Si sucede que para cada i, $0\le i\le n$, las imagenes $f^{(i)}(x)$ se mantiene en el conjunto $(x^*-\delta,x^*+\delta)\cap A$ entonces

$$|f^{(n)}(x)-x^*|>\frac{1}{s^n}|x-x^*| \tag{2.8}$$

Pero como $\dfrac{1}{s}>1$, esta situación solo se puede sostener para algunos valores de n. Es decir, debe existir $N\in\mathbb{N}$ que depende de x, tal que $f^{(N)}(x)$ no pertenece al conjunto $(x^*-\delta,x^*+\delta)\cap A$ ∎

2.1.2. Funciones vectoriales de variable vectorial

En esta sección se tratará de generalizar las nociones de punto de equilibrio y estabilidad dadas en el apartado anterior. Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, y la familia de sistemas dinámicos discretos $\{(\mathbb{R}^n, f, o(x, f))\}_{x\in\mathbb{R}^n}$ se identificará a dicha famila con la siguiente recurrencia.

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{2.9}$$

Al sistema dinámico discreto $(\mathbb{R}^n, f, o(x_0, f)$, se le identificara con

$$x_n = f^{(n)}(x_0) \tag{2.10}$$

o con

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ sujeto } \text{ a } x_0 \tag{2.11}$$

según sea el caso

DEFINICIÓN 2.11. *x^* es punto de equilibrio de* (2.9) *si x^* es punto fijo de f, esto es: $f(x) = x$*

DEFINICIÓN 2.12. *Considere el sistema dinámico* (2.9)*, entonces*

1. *El punto de equilibrio x^* de* (2.9) *es estable si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x_0 - x^*\| < \delta$ implica $\|f^{(n)}(x_0) - x^*\| < \epsilon$ para todo $n > 0$. Si x^* no es estable entonces es llamado inestable.*

2. *El punto x^* es llamado atrayente si existe $\eta > 0$ tal que $\|x_0 - x^*\| < \eta$ implica $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.*

3. *El punto x^* es un punto de equilibrio asintóticamente estable (ams) si este es estable y atrayente.*

Se estudiará las funciones f cuando es una transformación lineal inversible. Esto es, $x_{n+1} = Ax_n$ con A una matriz inversible. Se denorán por $x(n+1) = Ax(n)$

Estabilidad

Se estudiara la estabilidad de

$$x_{n+1} = Ax_n \text{ sujeto } \text{ a } x_0 \tag{2.12}$$

- Se determina la forma general: $x_n = A^n x_0$
- Dado que $A.0 = 0$, de ahí que $x^* = 0$ es punto de equilibrio. En lo que sigue, se le denominará al punto de equilibrio $x^* = 0$ como «solución nula»

TEOREMA 2.2. *Sea A una matriz con vectores propios $v_1, v_2, ..., v_k$ con los valores propios correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, con $\rho(A) = \lambda_1$ de modo que $x = c_1v_1 + c_2v_2 + ...c_kv_k$ con $c_1 \neq 0$ entonces*

$$\frac{A^n x}{\lambda_1^n} \to c_1v_1$$

Demostración. .

Sea $A^n x = c_1\lambda_1^n v_1 + c_2\lambda_2^n v_2 + ...c_k\lambda_k^n v_k$

Dado que $\lambda_1 \neq 0$

$$\frac{A^n x}{\lambda_1^n} = c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n v_2 + ...c_k \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^n v_k$$

Además, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^n = 0$ porqué $\lambda_1 = \rho(A)$

Luego: $\frac{A^n x}{\lambda_1^n} \to c_1 v_1$ cuando $n \to \infty$

■

TEOREMA 2.3. .

Sea el sistema $x(n+1) = Ax(n)$ con $x(0) = x_0$ entonces:

1. *La solución nula de $x(n+1) = Ax(n)$ es estable si $\rho(A) \leq 1$*
2. *La solución nula es atrayente si $\rho(A) < 1$*
3. *La solución nula de $x(n+1) = Ax(n)$ es asintóticamente estable (ams) si $\rho(A) < 1$*

Demostración. Sea $A = PJP^{-1}$, donde $J = diag(J_1; ...; J_r)$ es la forma de Jordan de A y

$$J_{\lambda_r} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

- La solución nula de $x(n+1) = Ax(n)$ es estable si $\rho(A) \leq 1$

1. $||A^n x_0 - x^*|| = ||A^n x_0 - 0|| = ||P^{-1}J^n P x_0|| \leq ||P^{-1}||||J^n||||P||||x_0||$. Por propiedades de la norma.

   Sea $\epsilon = \rho(J)^n = \rho(J^n)$ (J es matriz de Jordan). Al aplicar el teorema del ínfimo y norma y la equivalecia de norma de $||.||$ y $||.||_\varepsilon$

2. $\leq ||P^{-1}||(\alpha||J^n||_\varepsilon)||P||||x_0|| \leq ||P^{-1}||\ \alpha(\rho(J^n) + \varepsilon)||P||||x_0||$

3. $\leq \alpha(\rho(J)^n + \varepsilon)||P||||P^{-1}||||x_0|| \leq 2\alpha\rho(J)^n||P||\ ||P^{-1}||||x_0||$.

Luego

$$||P^{-1}||||J^n||||P||||x_0|| \leq 2\alpha\rho(J)^n||P||||P^{-1}||||x_0||$$

$$||A^n x_0 - 0|| \leq 2\alpha\rho(J)^n||P||||P^{-1}||||x_0|| \leq \alpha 2||P||||P^{-1}||||x_0||$$

$$||A^n x_0 - 0|| \leq 2\alpha||P||||P^{-1}||||x_0||$$

para todo n

Finalmente, tomando

$\delta = \dfrac{\epsilon}{3\alpha||P||||P^{-1}||}$

- La solución nula de $x(n+1) = Ax(n)$ es atrayente si $\rho(A) < 1$

  De la proposicón anterior.

  $$||A^n x_0 - 0|| \leq 2\alpha\rho(J)^n||P||||P^{-1}||||x_0||$$

  Como $\rho(J) < 1$

  $\lim\limits_{n\to\infty} ||A^n x_0 - 0|| \leq \lim\limits_{n\to\infty} 2\alpha\rho(J)^n||P||||P^{-1}||||x_0||$

  $\lim\limits_{n\to\infty} ||A^n x_0 - 0|| = 0$

- La solución nula de $x(n+1) = Ax(n)$ es asintóticamente estable si $\rho(A) < 1$

  De las dos afirmaciones anteriores y definición de punto asintóticamente estable .

■

Se sigue el

COROLARIO 2.1. *Sea el sistema $x(n+1) = Ax(n)$ con $x(0) = x_0$ entonces la solución nula de $x(n+1) = Ax(n)$ es inestable si $\rho(A) > 1$*

Demostración. Por redución al absurdo

Si es estable, entonces: $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $||x_0 - x^*|| < \delta$ implica $||f^{(n)}(x_0) - x^*|| < \epsilon$ para todo $n > 0$.

De la propsición anterior, cumple que para todo n

$$||A^n x_0 - 0|| \leq \alpha\rho(J)^n ||P||||P^{-1}||||x_0||$$

$$\alpha\rho(J)^n ||P||||P^{-1}||||x_0|| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \rho(J)^n < \lim_{n\to\infty} \frac{\epsilon}{\alpha||P||||P^{-1}||||x_0||} &= \\ < \frac{\epsilon}{\alpha||P||||P^{-1}||||x_0||}\end{aligned}$$

Por hipótesis $\rho(J) > 1$. Luego, es inestable. ■

En general, el interés es estudiar la estabilidad de un punto de equilibrio en una familia de sistemas dinámicos, esto es $\{(\mathbb{R}^n, f, O(x, f))\}_{x\in\mathbb{R}^n}$. En el primer caso estudiado, cuando f tiene asociada una matriz inversible A, la estabilidad de la solución nula depende de los autovalores de la matriz A. Si el máximo valor de sus eigevalores (en valor absoluto), es menor que uno entonces para cualquier valor inicial la solución nula es asintóticamente estable, lo que significa que $x^* = 0$ tiene esta condición para todo los elementos de la familia de sistemas dinámicos definidos por f.

EJEMPLO 2.5.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}16 & 0{,}12 \end{pmatrix} X_n$$

Se entiende como la familia de sistemas dinámicos discretos generados por

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}16 & 0{,}12 \end{pmatrix} x$$

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}16 & 0{,}12 \end{pmatrix}$$

con $\rho(A) = \dfrac{7}{25}$.

Entonces la solución nula es asintóticamente estable para cada uno de los elementos de la familia de sistemas dinámicos discretos. $\{(\mathbb{R}^2, f, O(x, f))\}_{x\in\mathbb{R}^2}$

Estas familias de sistemas dinámicos son de suma importancia. Pues se usarán para el estudio de los sistemas generados por funciones f distintas ese tipo.

EJEMPLO 2.6.

$$f(x,y) = \left(x^2 + 0{,}5x, y^2 + 0{,}5y\right)$$

Dado que $f(0,0) = (0,0)$, el interés es entonces estudiar si existe al menos una familia de sistemas dinámicos determinados por f, donde el punto de equilibrio $x = 0$ es estable (o asintoticamente estable). Del mismo modo para el otro punto de equilibrio: (x^*, y^*) . Para ellos se analizará

$$F(x,y) \;=\begin{pmatrix} 2x + 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2y + 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Note que:

$$J(f(a,b)) = \begin{pmatrix} 2a + 0{,}5 & 0 \\ 0 & 2b + 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Es la matriz jacobiana de f evaluada en (a,b). El estudio se enfocará a $J(f(x^*, y^*))$ donde (x^*, y^*) es un punto de equilibrio. Luego

$$F(x,y) \;=\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

En la sección anterior, se analizó la estabilidad para la solución nula, solo falta asegurar que para alguna vecindad V las funciones f y F son «iguales». Y por lo tanto, el punto de equilibrio sería asintoticamente estable. Esta afirmación es posible debido a un teorema muy importante, el cual se analizará en el posterior apartado . Con respecto a (x^*, y^*), se presenta una situación similar, su estabilidad será intimamente relacionada con $J(x^*, y^*)$ (sus autovalores y la solución nula de $f(x) = J(x^*, y^*)x$). Dicha cuestión también será abordada en la siguiente sección.

2.1.3. Aproximación Lineal

«Una equivalencia preserva ciertas propiedades de las soluciones. En particular se preservan las soluciones periódicas y los puntos de equilibrio, así como la estabilidad. En consecuencia, el estudio de un campo conjugado más sencillo nos dará una idea del retrato de fases de un sistema, así como de su comportamiento asintótico. En el caso hiperbólico, el teorema de Hartman-Grobman permite tal equivalencia.» *(Lluque, 2004, p.118).*

DEFINICIÓN 2.13. *Conjugación Topológica. Sean f y g diremos que son topologicamente conjugados si existe un h tal que*

$$h(f(x)) = g(h(x))$$

Finalmente, h recibe el nombre de conjugación o equivalencia según el caso.

LEMA 2.1. *Sea f, g topológicamente conjugados. Si x^* es punto fijo de f entonces $h(x^*)$ es punto fijo de g*

Demostración. Si f, g topológicamente conjugados entonces existe un h tal que

$$h(f(x)) = g(h(x))$$

Evaluando para x^*

$$h(f(x^*)) = g(h(x^*))$$

Dado que x^* es punto fijo de f, esto es, $f(x^*) = x^*$. Se tiene que

$$h(x^*) = g(h(x^*))$$

Este último resultado muestra que $h(x^*)$ es punto fijo de g

■

EJEMPLO 2.7. Considere $A = [0, 0.5)$, $B = [0.5, 1]$ y $X = [0, 1]$. Se define para todo a en X: $\Lambda_C(a) = 1$ si $a \in C$, 0 en otro caso, con C subconjunto de X. Para todo x en X se define: $T(x) = 2x\Lambda_A(x) + 2(1-x)\Lambda_B(x)$ (función tienda).
Para x en X $Q_4(x) = 4x(1-x)$ (función logística con $\mu = 4$)
La función $H(x) = \dfrac{1 - cos(\pi x)}{2}$, conjuga a T y Q_4

DEFINICIÓN 2.14. *Sea f una función de un subconjunto A, de un espacio vectorial normado $\mathbb{E}$ y de un espacio vectorial normado $\mathbb{F}$*

Se dice que f es lipschitziana en A si

$$sup\left\{\frac{||f(x) - f(y)||}{||x - y||} : x, y \in A\right\} < \infty$$

2.1.4. Teorema de Hartman

En este apartado se demostrá el teorema más importante de este trabajo, pues conectará los conceptos trabajados hasta ahora. Debido por las limitaciones del informe se procede a estudiar la demostración en el caso $\mathbb{R}^n$, y dando un análisis para su generalización.

Para su demostración se darán lemas auxiliares, cuyos demostraciones están basadas en *(De Oliveira, 2009).* Se trabaja con operadores acotados.

Lemas auxiliares para el teorema de Hartman

LEMA 2.2. *Sea $f : V \to \mathbb{R}^n$, una aplicación C^k: $k \geq 1$ definida en el abierto V que contiene al elemento a con $f(0) = 0$ y sea $A = Df(0)$. Dado $\epsilon > 0$, existe una vecindad $U \subset V$ tal que: $f\big|_U$ es de la forma $A + \psi$, donde ψ es una aplicación continua, acotada y Lipschitziana en $\mathbb{R}^n$ con constante de Lipschitz limitada por ϵ*

Demostración.

- Se probara que existe una función acotada ψ

  - Considere la función

$$\beta : \mathbb{R} \to [0, 1]$$

$$\beta(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } t \geq 1, \\ 1 & \text{si } t \leq \dfrac{1}{2} \\ |\beta'(t)| \leq K & \forall t \in \mathbb{R}\ K > 2 \end{cases}$$

Ahora se supone que: $f = A + \phi$. Se tiene que

$\phi(0) = 0$, $D\phi(0) = 0$, pues $f(0) = A(0) + \phi(0)$ y $Df(0) = DA(0) + D\phi(0)$

- Sea una bola centrada en el origen de radio r: $B_r(0)$ tal que: $||D\phi(x)|| < \dfrac{\epsilon}{2K}$, $\forall\ x \in B_r(0)$, dicha bola existe pues $D\phi(0)$ es al menos C^1 (es la diferencia de dos funciones que por lo menos lo son)

  Se define
  $$\psi(x) = \beta\left(\frac{||x||}{r}\right)\phi(x)$$
  $\psi(x) = 0$, si $||x|| \geq r$, ahora por definición β, pues $img(\beta) \in [0, 1]$ se colige:

  $||\psi|| \leq ||\phi||$

- Aplicando el teorema del valor medio y la el acotamiento de la derivada

  $||\psi(x) - \psi(0)|| \leq \dfrac{\epsilon}{2K}||x - 0||$

  $||\psi(x)|| \leq \dfrac{\epsilon}{2K}||x|| \leq \dfrac{\epsilon}{2K}r \quad \forall x \in B_r$

- Se afirma que es una extensión. En efecto, $\psi(x) = \phi(x)$, si $||x|| \leq \dfrac{r}{2}$, se sigue $A + \psi$ es una extensión $f\big|_{B_{\frac{r}{2}}}$

- Se probará que es ψ es Lipschitziana

-Sea x_1 y $x_2 \in B_r$

$$\|\psi(x_1) - \psi(x_2)\| = \left\|\beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)\phi(x_1) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\phi(x_2)\right\| \leq$$

$$\left\|\left[\beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\right]\phi(x_1)\right\| + \left\|\beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\left[\phi(x_2) - \phi(x_1)\right]\right\| \tag{2.13}$$

El primer término se acotara, usando el teorema del valor medio, tanto para β y ϕ. El segundo término se limitará, atendiendo a la $img(\beta)$ y aplicando el teorema del valor medio para ϕ

$$\leq K\left|\frac{\|x_1\|}{r} - \frac{\|x_2\|}{r}\right|\frac{\epsilon}{2K}\|x_1\| + \frac{\epsilon}{2K}\|x_1 - x_2\| \tag{2.14}$$

Al aplicar propiedades de la norma y la definición de $B_r(0)$

$$\leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{r}\frac{\epsilon}{2}r + \|x_1 - x_2\|\frac{\epsilon}{2} = \epsilon\|x_1 - x_2\| \tag{2.15}$$

-Sea $x_1 \in B_r$ y $x_2 \notin B_r$

De $x_2 \notin B_r$, entones $\beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) = 0$ y en (2.13) solo quedará el primer término y siguiendo el mismo proceso se concluye que 2.15 se satisface lo mismo.

Luego $\|\psi(x_1) - \psi(x_2)\| \leq \epsilon\|x_1 - x_2\|$

-Sea $x_2 \in B_r$ y $x_1 \notin B_r$

Se siguirá el mismo proceso que el anterior.

-Sea x_1 y $x_2 \notin B_r$

Es trivial: $\|\psi(x_1) - \psi(x_2)\| = 0 \leq \epsilon\|x_1 - x_2\|$

■

LEMA 2.3. *Sea $\mathbb{R}^n$ como (EVNc), $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, la identidad en $\mathbb{R}^n$. Sea ϕ : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una contracción en $\mathbb{R}^n$. Entonces es $I + \phi$ es un homeomorfismo sobre $\mathbb{R}^n$*

(Lages, 1999, p.281).

LEMA 2.4. *Teorema del punto fijo para Contracciones. Sea F un conjunto cerrado sobre $\mathbb{R}^n$, si existe un $0 \leq k < 1$, tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$. Entonces existe un único punto fijo para f (Lages, 1999, p.279).*

LEMA 2.5. *Sea $\mathbb{R}^n$ L una transformación lineal y G un isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ en si mismo, tales que $\|L\| \leq a < 1$ y $\|G^{-1}\| \leq a < 1$ entonces*

1. *$(I + L)$ es un isomorfismo con $\|(I + L)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{1-a}$*
2. *$(I + G)$ es un isomorfismo con $\|(I + G)^{-1}\| \leq \dfrac{a}{1-a}$*

Demostración. .

- Se probará que $(I + L)$ es un isomorfismo

  -Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y la función auxiliar $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\phi(x) = x_0 - L(x)$$

  $\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \|L(x_1) - L(x_2)\| \leq a\|x_1 - x_2\|$

  Por el lema 2.4, existe un único $z \in \mathbb{R}^n$ luego, $x_0 - L(z) = z$, por lo tanto $(I + L)(z) = x_0$. Se ha probado la sobreyectividad de $(I + L)$

- Sea $(I+L)(z) = (I+L)(q)$, $z+L(z) = q+L(q)$. $z-q = L(z-q)$. Se deduce por ser L una transformación lineal. Ahora, se supone que: $z \neq q$

Aplicando norma ambos miembros

$||z-q|| = ||L(z-q)||$, $||z-q|| \leq ||L||||(z-q)||$, pero por hipótesis $||L|| < 1$. De ahí que: $z = q$

Demostrándose la inyectividad de $(I+L)$

-Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ con $||x_0|| = 1$ entonces existe un $y \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$(I+L)(y) = x_0(^*)$, ($(I+L)$ es un isomorfismo) entonces $(I+L)^{-1}(x_0) = y(^{**})$, $y = x_0 - L(y)$. Aplicando norma en los dos lados y de la desigualdad triangular:

$$||y|| \leq 1 + a||y||$$

es decir:

$$||y|| \leq \frac{1}{1-a}$$

Ahora, por definición de norma de una transformación lineal:

$||y|| \leq ||(I+L)^{-1}||$ y por definición de supremo: $||(I+L)^{-1}|| \leq \dfrac{1}{1-a}$

- Sea $G^{-1} + I = R$. Componiendo a la izquierda con R, $I + G = GR$ es isomorfismos, pues G lo es por hipótesis, y haciendo $L = G^{-1}$ en el apartado anterior, $L = G^{-1}$ verifica las condiciones, luego $R = I + G^{-1}$ es un isomorfismo. Y es valida la afirmación $||R^{-1}|| \leq \dfrac{1}{1-a}$

  $I + G = GR$ es la composición de los isomorfismos mencionados, por ello lo es. Luego, $(I+G)^{-1} = R^{-1}G^{-1}$. Aplicando norma y sus propiedades.

$\|(I+G)^{-1}\| \leq \|R^{-1}\|\|G^{-1}\|$

Finalmente

$\|(I+G)^{-1}\| \leq \dfrac{a}{1-a} < 1$

■

El siguiente lema es una consecuencia del anterior.

LEMA 2.6. *Perturbación de un isomorfismo*

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un isomorfismo, y,* $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *de Lipschitz (Lipz) tal que* $Lip(\phi)\|T^{-1}\| < 1$. *Entonces,* $T+\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *es un isomorfismo*

(Lages, 1999, p.281).

LEMA 2.7. *Sea* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *isomorfismo hiperbólico entonces*

- *Dado* $\epsilon > 0$ *entonces existen* ψ_1, ψ_2 *tales que: son aplicaciones continuas, acotadas y Lipschitzianas en* $\mathbb{R}^n$ *con constante de Lipschitz limitadas por* ϵ *entonces*

- $A+\psi_1$ *y* $A+\psi_2$ *son conjugadas.*

Demostración.

- Del Lema 2.2, garantiza la existencia de ψ_1, ψ_2

- Para probar la conjugación se propondrá la siguiente función: $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

  $h = I + w$. Debe de cumplir

  $h \circ (A + \psi_1) = (A + \psi_2) \circ h$, es decir: $(I + w) \circ (A + \psi_1) = (A + \psi_2) \circ (I + w)$.

  Al despejar se obtiene

  $$A \circ w - w \circ (A + \psi_1) = \psi_1 - \psi_2 \circ (I + w)$$

  Para resolver esta ecuación se procederá de la siguiente manera

  - Por el lema 2.5 existe $(A + \psi_1)$ satisfaciendo las condiciones dadas en dicho enunciado, y por el lema 2.6 se podrá eligir ψ_1 tal que sea una contracción y por lo tanto $(A + \psi_1)^{-1}$ sea un isomorfismo.

  - Se definen los operadores G, S, L; Q de $X = B(\mathbb{R}^n)$ en si mismo definidos tales como se muestran a continuación.

  - Sea $G(y) = A^{-1} \circ y \circ (A + \psi_1)$. Tal operador es un isomorfismo. En efecto, sea $m(y) = A \circ y \circ (A + \psi_1)^{-1}$. Es inmediato verificar que $Id_X = m \circ G = G \circ m$

  - $G^{-1}(y) = A \circ y \circ (A + \psi_1)^{-1}$. Se acotará la norma:

    $||G^{-1}|| \leq ||A||||(A + \psi)^{-1}||$

    Se elige $||(A + \psi)^{-1}|| << ||A||$. De ahí que $||G^{-1}|| \leq ||A|| < 1$

  - Sea $S(y) = y - A^{-1} \circ y \circ (A + \psi_1)$. Del lema 2.5. $||S^{-1}|| \leq \dfrac{||A||}{1 - ||A||}$

    Ahora dado que $||S(y) - S(z)|| \geq (1 - ||A^{-1}||)||y - z||$

$||S^{-1}(a) - S^{-1}(b)|| \leq \dfrac{1}{1 - ||A^{-1}||}||a - b||$

- Sea $L(y) = A \circ y - y \circ (A + \psi_1)$, $L = A \circ S$. Entonces $L^{-1} = S^{-1} \circ A^{-1}$

  cuya norma es

  $||L^{-1}|| \leq ||S^{-1}||||A^{-1}|| \leq \dfrac{||A^{-1}||||A||}{1 - ||A||} \leq \dfrac{||A^{-1}||}{1 - ||A||}$

  L^{-1} es Lipz, pues S y A los son. Dada una condición adicional, esta será contracción, y así se asegura la existencia de un único punto fijo.

  Por otro lado;

- $Q(y) = L^{-1}(\psi_1 - \psi_2 \circ (I + y))$

  Se probará que es Lizp

  $||Q(y) - Q(z)|| \leq ||L^{-1} \circ (\psi_1 - \psi_2 \circ (I + y)) - L^{-1}(\psi_1 - \psi_2 \circ (I + z))||$

  $||L^{-1}||||(\psi_1 - \psi_2 \circ (I + y)) - (\psi_1 - \psi_2 \circ (I + z))|| \leq \dfrac{||A^{-1}||}{1 - ||A||}\epsilon||y - z|$

  Eligiendo ϵ, tal que $a\epsilon << 1$, para $a > 0$

  En estas condiciones se ha probado que Q es una contracción por lo tanto tiene único punto fijo.

- Retomando los últimos dos pasos

  (**) $Q(y) = L^{-1} \circ (\psi_1 - \psi_2 \circ (I + y))$. Si w es el único punto fijo entonces

  $w = L^{-1}(\psi_1 - \psi_2 \circ (I + w))$

  (*) Evaluando w en: $L(y) = A \circ y - y \circ (A + \psi_1)$

  $L(w) = A \circ w - w \circ (A + \psi_1)$

$L \circ (L^{-1}(\psi_1 - \psi_2 \circ (I + w))) = A \circ w - w \circ (A + \psi_1)$

Finalmente. $A \circ w - w \circ (A + \psi_1) = \psi_1 - \psi_2 \circ (I + w)$

- Ahora siguiendo el mismo proceso se puede construir:

  $(I + v) \circ (A + \psi_2) = (A + \psi_1) \circ (I + v)$.

  Se probará que: $(I + v) \circ (I + w) = (I + w) \circ (I + v) = I$

  En efecto:

$$(I + v) \circ (A + \psi_2) = (A + \psi_1) \circ (I + v) \tag{2.16}$$

$$(I + w) \circ (A + \psi_1) = (A + \psi_2) \circ (I + w) \tag{2.17}$$

  Aplicando $(I + v)$ en (2.17). Y remplazando 2.16 en 2.18

$$(I + v) \circ (I + w) \circ (A + \psi_1) = (I + v) \circ (A + \psi_2) \circ (I + w) \tag{2.18}$$

$$(I + v) \circ (I + w) \circ (A + \psi_1) = (A + \psi_1) \circ (I + v) \circ (I + w) \tag{2.19}$$

  Luego, $(I + v) \circ (I + w) = I$, pues tanto v y w son únicas. Y $S = A + \psi_1$ es isomorfismo e I conjuga a S.

  Para probar $(I + v) \circ (I + w) = I$, se sigue una secuencia similar a la primera.

■

TEOREMA 2.4. *Teorema de Hartman*

Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo C^1, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, y $0 \in U$ un punto hiperbólico de f. Si $A = Df(0)$ es la derivada evaluada en 0. Existe una vecindad

U_0 de 0 *en U, una vecindad V_0 de 0 en $\mathbb{R}^n$, y un homeomorfismo $h : U_0 \to V_0$ tal que*

$$h \circ A = f \circ h$$

Teniendo todas estas construcciones se probará el teorema anunciado anteriormente.

Demostración. Por el teorema de difeomorfismo local (teorema 1.18), existen W, N que contienen a 0 de modo que f restringuida a W es un difeomorfismo, con $f(0) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$, $A + \phi$ es conjugada por A, para toda A acotada con constante de Lipschitz limitada por ϵ conforme el lema 2.7. Para tal ϵ, se puede tomar una vecindad $B_r \subset J \cap N$ tal que $(A+\phi)\big|_{B_{\frac{r}{2}}} = f\big|_{B_{\frac{r}{2}}}$, $(A+\phi)\big|_{C_{\frac{r}{2}}} = A$ $(C_{\frac{r}{2}} = (B_{\frac{r}{2}})')$, ϕ es limitada y tiene constante de Lipschitz menor o igual a ϵ. Por el lema 2.7, existe $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$h = I + w$. Tal que $h \circ A = (A + \phi) \circ h$

A es isomorfismo hiperbólico, no posee otro punto fijo excepto cero (pues otro punto diferente de cero sería un autovetor de autovalor 1). Tal implica que $(A+\phi)$ posee un único punto fijo $p = 0$

Por el lema de conjugación: $h(0) = 0$

De esa forma, se restringira h a una vecindad $R_0 \subset B_r$ tal que $V_0 = h(R_0) \subset B_r$.

Entonces para $x \in U_0 = R_0 \cap A^{-1}(R_0)$

$$h \circ A(x) = f \circ h(x)$$

■

2.1.5. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y la familia de SDD $\{(\mathbb{R}^n, f, O(x, f))\}_{x\in\mathbb{R}^n}$. Si f es una transformación lineal, se ha podido estudiar la estabilidad de sus puntos de equilibrio. Ahora se estudiará aquellas funciones distintas a ellas. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset \mathbb{R}^n$, y la familia de sistemas dinámicos discretos $\{(U, f, o(x, f))\}_{x\in U}$. Vale interrogarse sobre los puntos de equilibrio y su estabilidad. Sea p punto fijo de f. Si se tiene que la jacobiana $J(f(p))$ es inversible, entonces por el teorema 1.18, es un diofeomorfismo local para alguna vecindad que contega a p: U_p. Por ello se puede restringuir f a dicha vecindad, lo cual genera a la FSDM $\left\{(U_p, f, o(x, f))\right\}_{x\in U_p}$. Si p es asintónticamente estable, lo será para toda esa famiia. Por otro lado, la familia $\{B, Jf(p), o(x, Jf(p))\}_{x\in B}$, está íntimamente ligada a la anterior. La jacobiana $Jf(p)$ es la herramienta que las relacionará, pues dependiendo de sus autovalores, analizará la estabilidad. En especial, las que tiene autovalores menores que uno (en norma). Se usará entonces el Teorema de Harmant. Finalmente solo se trabajará con f, pues los sistemas generados por ella, $\{(U, f, o(x, f))\}_{x\in U}$, son predecibles si f cumple con las condiciones anteriormente mencionadas. Es decir, al afirmar que p es un punto de equilibrio estable de f, significa que existe al menos un sistema dinámico donde p es estable. Así se puede generar (en su mayoría) una familia.

Esta idea se puede extender para $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, y la familia de sistemas dinámicos discretos $\{(\mathbb{E}, f, o(x, f))\}_{x\in\mathbb{E}}$. Para citar ejemplos:

1. $\mathbb{E}$ es un espacio de Banach y f diferenciable

2. $\mathbb{E}$ es una variedad diferenciable y f diferenciable.

TEOREMA 2.5.

Sea $f : U_1 \to U_2$, con $U_1,\ U_2 \subset \mathbb{R}^n$ y U_1 abierto en $\mathbb{R}^n$ y considere $A = f'(0)$ derivada de f evaluada en 0

Si $\rho(A) < 1$, entonces 0 es asintóticamente estable.

Si $\rho(Df(p)) < 1$, entonces p es asintóticamente estable.

Demostración.

- Del teorema 2.4, se construye $R_0 \subset B_r$ tal que $V_0 = h(R_0) \subset B_r$. Entonces para $x \in U_0 = R_0 \cap A^{-1}(R_0)$

$$h \circ A(x) = f \circ h(x)$$

Por construción de h es acotada y es inversible.

$$f^{(1)}(x) = hoAoh^{-1}(x)$$

$f^{(2)}(x) = hoA^2oh^{-1}(x)$; $f^{(3)}(x) = hoA^3oh^{-1}(x)$. Aplicando inducción se llega que:

$f^{(n)}(x) = hoA^noh^{-1}(x)$

$||f^{(n)}(x) - 0|| = ||hoA^noh^{-1}(x) - 0|| = ||hoA^noh^{-1}(x)||$

$\leq ||h||||A||^n||h^{-1}||||x|| \leq ||h||||h^{-1}||||x||$

Tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{2||h||||h^{-1}||}$

- Se define $f(x) = g(x-p)+p$. Se tiene que $f(x)-p = g(x-p)$ y $f(f(x))-p = g(f(x) - p) = g(g(x - p))$. Análogamente se tiene que

  $f^{(n)}(x) - p = g^{(n)}(x - p) = hoA^noh^{-1}(x - p) = hoD^nf(p)oh^{-1}(x - p)$.

  Finalmente se acota $||f^{(n)}(x) - p|| \leq ||h||||h^{-1}||||x - p||$

  Tomando $\delta = \dfrac{\epsilon}{2||h||||h^{-1}||}$

■

2.1.6. Funciones definidas en espacios de Banach o en Variedades diferenciables

Avanzando en el tema, sea pues $\mathbb{E}$ un espacio de Banach, El teorema de *Hartman* puede generalizarse, denominándose $Hartman - Grobman$, para espacios de Banach. Los lemas auxiliares son homólogos al caso $\mathbb{R}^n$, donde las funciones (operadores) son definidas de $\mathbb{E}$. Se hará un preámbulo para la entender la demostración *(De Oliveira,2009).* y *(Gonzáles, 2010).*

En el capítulo I se sitó:

-**Teorema del Punto Fijo de Banach** que a la letra señala

Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Entonces existe un único punto fijo de f.

-$L(X, Y) = \{f : X \to Y$ es lineal y acotada$\}$. Sea la norma $||.||$ según definición 1.31

- El espacio $(L(X, Y), ||A||)$ es de Banach, si Y es un espacio de Banach. Se inicia para $X = Y$. En seguida se define $L(X) = \{f : X \to X$ es lineal, lipschitziana, acotada$\}$, definiendo la misma norma, sigue siendo EB. Inmendiatamente se aplicará el teorema dado en este exordio para este último espacio. Se afirma:

$f : L(X) \to L(X)$ una aplicación contractiva. Entonces existe un único punto fijo de f. Adicionalmente, h es punto fijo de f, como en lo anterior, sería un operador en X.

- Se denorará a $L(T_h\mathbb{E} \to \mathbb{E})$ con $\mathbb{B}(T_h\mathbb{E},\ \mathbb{E})$. Es un espacio de Banach, pues, $\mathbb{E}$ lo es. Sea $X = \mathbb{B}(T_h\mathbb{E},\ \mathbb{E})$. Es un caso especial para el segundo apartado, Se afirma:

$f : \mathbb{B}(T_h\mathbb{E},\ \mathbb{E}) \to \mathbb{B}(T_h\mathbb{E},\ \mathbb{E})$ una aplicación contractiva. Entonces existe un único punto fijo de f. Adicionalmente, h es punto fijo de f, sería un operador en $\mathbb{B}(T_h\mathbb{E},\ \mathbb{E})$. En otras palabras, $h : T_h\mathbb{E} \to \mathbb{E}$

-Para continuar se analizará f. Si es un isomorfismo, f^{-1} lo es también.

-Sea el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T_j\mathbb{E} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "A"] & \mathbb{E} \arrow[d, "f"] \\ T_j\mathbb{E} \arrow[r, "j"'] & \mathbb{E} \end{tikzcd}$$

Para hallar un j de modo que el diagrama conmute: $j \circ A = f \circ j$. Se construirá un operador f, de tal forma que f^{-1} sea una contracción. Siendo j punto fijo (único) del último operador, en conclusión: $j : T_h\mathbb{E} \to \mathbb{E}$

Todas estas ideas (de manera no tan abstracta), se han visto en el teorema en el caso anterior (lemas auxiliares). Sea T una T.L, cuando es hiperbólica, está se puede descomponer como suma directa de otras dos: - refieréndose a la transformación lineal, pero que se identifica con su matriz asociada- (T_s) y (T_u). Está idea se genraliza en las demostraciones, ya sea para un automorfismo en $\mathbb{B}(T_h\mathbb{E},\ \mathbb{E})$ o en $T_h\mathbb{E}$

Finalmente ¿qué significa?: $T_h\mathbb{E}$, el ejemplo 1.12 (teorema) advierte que si Y es espacio de Banach, entonces $L(X, Y)$ lo es. No da ninguna característica para X. Sobre la base de interpretar la notación, la cual cobrá más importancia en la siguiente sección, se entendera como - para nuestro caso $A = Df(0)$, es decir: la derivada de f en 0- aquel subespacio de $\mathbb{E}$, donde se pueda garantizar la existencia de j

TEOREMA 2.6. *Teorema de Hartman-Grobman*

Sea $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ un difeomorfismo C^k, $U \subset \mathbb{E}$ abierto, y $p \in U$ un punto hiperbólico *de f. Sea $A = Df(p) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Entonces existe una vecindad $V(p) \subset \mathbb{E}$ de p, una vecindad $U(0) \subset \mathbb{E}$ de 0, y un homeomorfismo $h : U(0) \to V(p)$ tal que*

$$h \circ A = f \circ h$$

(Gonzáles, 2010).

A guisa de repaso, se mencionara a $\mathbb{R}^n$ como una variedad diferenciable. Entendiendo el plano tangente a $x \in \mathbb{R}^n$, denotado por $\mathbb{R}^n_x$, como $\mathbb{R}^n$, empero en verdad, existe un isomorfismo de espacios vectoriales entre $\mathbb{R}^n_x$ y $\mathbb{R}^n$. Este isomorfismo, hace «indistinguibles» a los elementos de uno y del otro espacio. *(Santamría, 2018).*

Como es sabido, una variedad diferenciable no siempre puede verse como espacio vectorial, pero si como espacio tológico, pues lo es por definición. Se retomará la idea de $T_j\mathbb{E}$ en cuadro conmutativo, $T_j\mathbb{E}$ sería el espacio tangente a p, de otra forma, $T_j\mathbb{E} = T_p\mathbb{E}$. El primer diagrama se puede justificar como el cuadro anterior, pues $\mathbb{R}^n$ es una variedad, pero también puede verse como Espacio de Banach.De ahí que en el cuadro de la izquierda, se construye τ, la cual es única. y $\tau \circ A = \alpha \circ \tau$ En el segundo ubicado a la derecha, seguiendo el mismo razonamiento Φ se puede construir debido a que, de nuevo, $\mathbb{R}^n$ se ve a como E.B. por lo tanto $\Phi \circ f = \alpha \circ \Phi$ En el tercer gráfico se necesita la existencia de j, de ser válida la afirmación anterior, esta es única, pues: $\tau = \Phi \circ j$. Y como τ y Φ lo son, $j = \tau \circ \Phi^{-1}$

$$\begin{tikzcd} T_\tau\mathbb{E} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "A"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\alpha"] \\ T_\tau\mathbb{E} \arrow[r, "\tau"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \quad y \quad \begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbb{E} \arrow[r, "\Phi"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T_j\mathbb{E} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "A"] & \mathbb{E} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\alpha"] \\ T_j\mathbb{E} \arrow[r, "j"'] & \mathbb{E} \arrow[r, "\Phi"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Luego, se prueba que el lado izquierdo del tercer cuadro, también conmuta, pues

- $\tau \circ A = \alpha \circ \tau$ y $\Phi \circ f = \alpha \circ \Phi$ inmendiatamente $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1} = \alpha$. Seguido de $\Phi^{-1}\tau \circ A = \Phi^{-1}\alpha \circ \tau = \Phi^{-1}\Phi \circ f \circ \Phi^{-1} \circ \tau = f \circ \Phi^{-1} \circ \tau$. Se concluye que: $j \circ A = f \circ j$

- El diagrama conmuta, lo que se estaba buscando.

Se aprovechará la variedad surgiendo el cuadro conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathbb{E} \arrow[r, "\phi"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

ϕ sería las funciones coordenadas, o sea, $\phi = (\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$, y donde $\alpha = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$. Esto es: $\alpha \circ \phi = \phi \circ f$. Teniendo las justificaciones dadas, $\phi = \Phi$, por la unicidad de ambas (las dos hacen conmutar el diagrama). Finalizando la interpretación de la demostración. Si $A = Df(p)$. Se tiene el cuadro conmutativo

$$\begin{tikzcd} T_p\mathbb{E} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "A"] & \mathbb{E} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\alpha"] \\ T_p\mathbb{E} \arrow[r, "j"'] & \mathbb{E} \arrow[r, "\phi"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

De donde $joA = foA$. Entonces, la busqueda se centra en asegurar la existencia de $\tau \in \mathbb{B}(T_p\mathbb{E},\ \mathbb{E})$

TEOREMA 2.7. *Teorema de Hartman-Grobman*

Sea $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ un difeomorfismo C^k, $U \subset \mathbb{E}$ abierto, y $p \in U$ un punto hiperbólico de f. Sea $A = Df(p) : T_p\mathbb{E} \to T_p\mathbb{E}$. Entonces existe una vecindad $V(p) \subset \mathbb{E}$ de p, una vecindad $U(0) \subset T_p\mathbb{E}$ de 0, y un homeomorfismo $h : U(0) \to V(p)$ tal que

$$h \circ A = f \circ h$$

(De Oliveira,2009).

TEOREMA 2.8. *Sea $\mathbb{E}$ como Teorema 2.6 o Teorema 2.7. Sea el operador o la función diferenciable, según sea el caso, $F : L \subset \mathbb{E} \to \subset \mathbb{E}$*

Si $\rho(F_p) < 1$, entonces p es asintóticamente estable.

Demostración. Análoga al teorema 2.5

2.1.7. Funciones definidas de un conjunto en si mismo

En las secciones anteriores, se ha estudiado espacios vectoriales normados, para inducir una métrica y así una topología. O una variedad diferenciable. Falta plantarse la idea de que sucede cuando es un espacio topólogico que no ha sido inducido por una métrica. Cual es la noción de punto fijo y de la norma asociada. Ese planteamiento está fuera del trabajo, pues implicaría construir toda una teoría, donde se pueda definir una norma.
Sin embargo, dado un espacio métrico (X un espacio vectorial) (X, d), vale la pregunta: ¿se puede definir una norma a partir de d?, pues, sí; siempre y cuando d cumpla con las condiciones $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ y $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.La dupla $(X, ||.||)$ es un EN con $||X|| = d(x, 0)$

Seguidamente, considere F un conjunto cualquiera, y la coleción $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in I\}$ formada por funciones tales que : $\phi_\alpha : \; F \to F$ la cual sea un atlas por biyecciones entonces se puede hablar $(F, \mathscr{A})$ como una variedad diferenciable. *(Santamaría, 2018).*
Para entender la estabilidad de un punto fijo en un espacio métrico (X, d), se dará las siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.15. *Sea $f : X \to X$, y sea $p \in X$ tal que $f(p) = p$ .Se dice que p es un punto fijo atractor de f si para todo conjunto abierto W, $p \in W$, existe un* *subconjunto abierto* $U \subset W$ *tal que* $p \in U$, $f(U) \subset U$, *y para todo* $x \in U$ *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$$

DEFINICIÓN 2.16. *Se dice que* p *es un punto fijo repulsor de* f *si existe un subconjunto abierto* U *de* X *tal que* $p \in U$ *y para cada* $x \in U$, $x \neq x_0$, *existe* $n \in \mathbb{N}$, n *depende de* p, *tal que* $f^n(x) \notin U$

DEFINICIÓN 2.17. *Se dice que el punto fijo* p *es estable si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in B(p, \delta)$ *y para todo* $n \geq 0$, *se tiene que* $d(f^n(x), p) < \epsilon$

Finalizando sea (X, τ) es un espacio topológico, donde X es metrizable. Se anunciará el teorema de metrización de Nagata-Sminorv *(Munkres, Topología, p.285).*

TEOREMA 2.9. *Un espacio es metrizable si y solo si es regular y tiene una base localmente finita.*

Luego, se puede estudiar como espacio métrico.

Por todo lo expuesto en este capítulo se estudiará en algunos ejemplos, solamente a f y se sobreentendera que está asociado al sistema dinámico discreto $(x, f, o(x, f))$.

Capítulo 3

Punto de Equilibrio

En este capítluo se darán ejemplos de sistemas dinámicos discretos y se analiza la estabilidad de sus puntos de equilibrio.

En los ejemplos se usa la topología usual definida en $\mathbb{R}^n$

3.1. Ejemplos típicos

Ejemplo 3.1. Sea

$x_{n+1} = x_n(cos^{x_n}(\phi) + sen^{x_n}(\phi))$ con $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$

$f(x) = x(cos^{x}(\phi) + sen^{x}(\phi))$

Sea el punto fijo x_0 es decir

$f(x_0) = x_0$

$x_0(cos^{x_0}(\phi) + sen^{x_0}(\phi)) = x_0$

$x_0(cos^{x_0}(\phi) + sen^{x_0}(\phi) - 1) = 0$

$x_0 = 0$. Para hallar los otro puntos de equilibrio se define

$F(x) = cos^x(\phi) + sen^x(\phi) - 1$. Los ceros de la función son los puntos de equilibrio.

Note que $F(2) = 0$

Ahora se probará que F es una función inyectiva. Para ello, se demostrará que es estrictamente decreciente. Esto es $F'(x) < 0$ para todo x en el dominio de f.

$F'(x) = cos^x(\phi)ln(cos(\phi)) + sen^x(\phi)ln(sen(\phi)$

Además $cos^x(\phi) > 0$, $ln(cos(\phi) < 0$, $sen^x(\phi) > 0$, $ln(sen(\phi) < 0$

$F'(x) < 0$. Es estrictamente decreciente. Implicando que es inyectiva. Lo cual muestra que el cero de la función es $x = 2$ es único.

Entonces los puntos de equilibrio son: $x_{0_1} = 0$ $x_{0_2} = 2$

Estabilidad

Se analizará la estabilidad según los valores de x_0.

- $x_{0_1} = 0$

  $|f'(0)| = 0$. Por el Teorema 2.1 $x^* = 0$ el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

- $x_{0_2} = 2$

  $f'(2) = 2 + 2((cos^2(\phi)ln(cos(\phi) + sen^2(\phi)ln(sen(\phi)))$

  Por el Teorema 2.1 se concluye:

  - El punto fijo $x^* = 2$ es inestable, pues $|f'(2)| > 1$ Figura 3.1

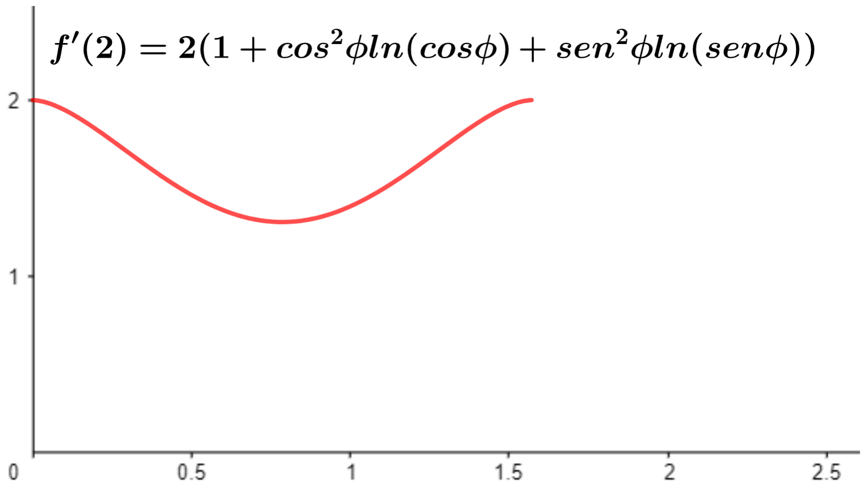

Figura 3.1: Gráfica de $f'(2)$

EJEMPLO 3.2. Sea f una función real de variable real con p punto fijo.

Si $|f'(p)| = 1$. Se analizará la estabilidad para dichos casos, estudiando la estabilidad de los siguientes

- $f(x) = x + x^3$, $x = 0$ es repulsor.
- $f(x) = x - x^3$, $x = 0$ es estable.
- $f(x) = e^x - 1$, $x = 0$. Para $x < 0$ cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = 0$

Los ejemplos son tomados de *(King y Mendes, 2014).*

Se mencionará el siguiente criterio.

CRITERIO Sea f una función real de variable real con p punto fijo. Si $|f'(p)| = 1$

1. Si $f'(p) \neq 0$, entonces p es repulsor.
2. Si $f'(p) = 0$, y $f''(p) < 0$ entonces p es estable. (*Ruiz*, 2015)

3.2. Rectas discreta

3.2.1. Recta discreta

Sea $x_{n+1} = f(x_n)$ donde $f(x) = mx + b$ es inmediato verificar que el punto de equilibrio es $x^* = \dfrac{b}{1-m}$

Proposición 3.1. *Sea* $x_{n+1} = f(x_n)$ *donde* $f(x) = mx + b$ *sujeto a* $x_0 = 2$.*Sea* $x^* = \dfrac{b}{1-m}$ *el punto de equilibrio.*

- $|m| < 1$ *entonces* x^* *es atractor.*
- $|m| > 1$ *entonces* x^* *es repelente.*

Demostración. Es inmediato pues $f'(x) = m$ para cualquier valor, en especial lo será para x^*, por teorema 2.1, se concluye lo pedido ∎

3.2.2. Recta discreta matricial

Sea A una matriz de orden 2 con radio espectral λ_1 y el sistema dinámico

$$x_{n+1} = Ax_n \text{ sujeto a } x_0$$

con A matriz hiperbólica. Por los teoremas anteriores se sabe que su único punto fijo es la solución nula. Pero esto nos da más información, que más adelante se estudiará detalladamente. Dado que A cumple las condiciones del lema 1.3 y teorema 2.2 se concluye que

$$x_n = \lambda_1^n \left(a_1 v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n a_2 v_2 \right)$$

Al hacer tender n al infinito: $x_n \to 0$, lo que se esperaba.

Ahora, suponga que A no es hiperbólica. Note que $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n$ para valores antiquiores de n la expresión es aproximadamente cero. Entonces si se desearía encontrar «$x_{1000} \approx \lambda_1^{1000}(a_1 v_1)$». Del mismo modo «$x_{1001} \approx \lambda_1^{1001}(a_1 v_1)$», esto es sencillo pues al ser una matriz cuadrada de orden dos, el único inconveniente, por así decirlo, es calcular sus autovalores. En fin, esto motiva un problema inverso, o sea, dada una matriz- es más interesante cuando es de un orden mayor a tres- ¿se puede calcular al menos un autovector de la matriz?. Y cuales deben de ser las condiciones para asegurar la convergencia de un método empleado. Este tema será tratado en una sección posterior. Se dará una sencilla aplicación de este ejemplo.

OBSERVACIÓN 3.1. Si al sistema se le impone una condición $x(0) = x_0$ entonces $\alpha_1 =< v_1^{\perp}, x_0 >$ y $\alpha_2 =< v_2^{\perp}, x_0 >$ con un v_1 y v_2 formando una base ortonormal.

Sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$$

cuya fórmula de recurrencia esta expresada en el ejemplo 1.23, además el ejemplo 1.22 es equivalente a nuestra sucesión si se considera

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \\ y_n \end{pmatrix} \text{ y } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$$

Los autovalores de A son

$\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Los autovectores de A son

$v_1 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 1\right)$ y $v_2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 1\right)$

Al imponer la condición inicial se llega que

$\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ y $\alpha_2 = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

Luego $X_n \to \lambda_1^n a_1 v_1$

Esto es

$$\begin{pmatrix} x_n \\ \\ y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

De esta última afirmación se puede concluir lo siguiente:

1. La solución nula es inestable, esto se traduce a:

2. $x_n \to \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lambda_1$. El cociente entre dos términos consecutivos, para n suficientemente grande, tiende al número aúreo o de oro, una constante muy aplicada en diversas áreas.

3.3. Ecuaciones en diferencias

En diversas bibliografías, se señalan indistintamente a los sistemas dinámicos discretos como recurrencia o inclusive como sucesiones. Entender dichas cuestión es necesaria, pues en cierta forma no está alejada de una realidad.

En los preliminares se presentaron las ecuaciones en diferencias. Se definieron Δ y al operador E con ciertas propiedades según proposición 1.4 1.5, respectivamente. Sea A un subconjunto de los números reales y $\mathbb{B}(A)$ el conjunto de todas las funciones continuas definidas en A en si mismo. Si se define $\mathbb{D} : \mathbb{N} \times \mathbb{B}(A) \to \mathbb{B}(A)$ tal que $\mathbb{D}(n, f) = \Delta^n(f)$. Del mismo modo, $\mathbb{E} : \mathbb{N} \times \mathbb{B}(A) \to \mathbb{B}(A)$ tal que $\mathbb{E}(n, f) = E^n(f)$. Las afirmaciones son válidas y pueden ser consultadas en $(Golberg, p.57)$

- $\mathbb{D}(0, f) = f$ y $\mathbb{D}(n+m, f) = \Delta^{n+m}(f) = \Delta^n\Delta^m(f) = \mathbb{D}(n, \mathbb{D}(m, f))$
- $\mathbb{E}(0, f) = f$ y $\mathbb{E}(n+m, f) = E^{n+m}(f) = E^nE^m(f) = \mathbb{E}(n, \mathbb{E}(m, f))$

Esto prueba que $(\mathbb{B}(A), \mathbb{E})$ y $(\mathbb{B}(A), \mathbb{D})$ son sistemas dinámicos discretos. Ahora bien existirá un α tal que $\Delta^n(\alpha) = \alpha$ para todo n. Pues para $n = 0$ se cumple por definición. Depende del conjunto A. Pero es interesante estudiar el caso $A = \mathbb{R}$, pues la función nula cumple que $\Delta^n(0) = 0$. Es decir la función nula sería punto fijo. Siguiendo un razonamiento análogo se prueba que toda función constante es punto fijo. Respecto a $\mathbb{E}$ se puede usar la relación en los preliminares entre los operadores, para probar que toda función constante es un punto de equilibrio para el sistema dinámico inducido por $\mathbb{E}$

Ahora bien, siguiendo la notación empleada en los preliminares, se estudiarán las ecuaciones en diferencias.

La solución de ecuación en diferencias es una familia de sucesiones que es válida para un conjunto S. A partir en adelante se centrará el estudio en los números naturales. Se empezará analizando un ejemplo parecido a uno anterior, sencillo, pero vital para entender a las ecuaciones en diferencias como sistemas dinámicos discretos.

1. Sea $x(n+1) = f(x(n))$ donde $f(x) = mx + b$. Es decir $x(n+1) - mx(n) = b$ una *ed* de primer orden.

   Se comienza calculando el valor de $x(n)$ en función de $x(0)$

   $x(1) = mx(0) + b$

   $x(2) = mx(1) + b = m^2x(0) + b(m + 1)$

   $x(3) = mx(2) + b = m(m^2x(1) + b(m + 1)) + b = m^3x(0) + b(m^2 + m + 1)$

$\vdots$

$$x(n+1) = m^{n+1}x(0) + b(m^n + ... + m^2 + m + 1) = m^{n+1}x(0) + b\sum_{j=0}^{n} m^j$$

- La solución anterior es $x(n) = m^n x(0) + b(m^{n-1} + ... + m^2 + m + 1) = m^n x(0) + b\sum_{j=0}^{n-1} m^j$. Ahora independientemente de $x(0)$ se hará
  - Si se supone que $|m| < 1$ entonces al hacer que n tienda a infinito

    $\lim\limits_{n\to\infty} m^n x_0 = 0$

    Por otro lado $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} m^j = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \dfrac{1}{1-m}$ por ser la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $|m| < 1$

    Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = \dfrac{b}{1-m}$
  - Si se supone que $|m| > 1$ se cumple

    $\lim\limits_{n\to\infty} m^{n-1}x_1 = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} m^j = \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \infty$

    Luego $\lim\limits_{n\to\infty} |x(n)| = \infty$
- En general si se quiere dejar en función de $x(a) = x_a$

  $x(n) = x_a m^{n-a} + \dfrac{1-m^{n-a}}{1-m}$.

2. Aplicando métodos para solucionar una ecuación en diferencia se tiene que $x(n) = Cm^n + b\dfrac{1-m^n}{1-m}$ con C un número real(note que una solución particular es cuando $x(0) = x_0$). Ahora se supone que exista una solución estable, esto es $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x^*$ para cualquier valor C. Se llega que

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \frac{b}{1-m} \text{ si } |m| < 1$$

No es complicado probar que $x(n+1) = f(x(n))$ y no es casualidad que el punto fijo de f sea igual a la solución estable, pues el que exista una solución estable, significa que $\lim_{n\to\infty} x(n+1) = \lim_{n\to\infty} x(n) = x^*$, es decir: $f(x^*) = x^*$ pues f es continua.

3. Finalmente f con cualquier x_0 determinan sistemas dinámicos discretos cuyo punto de equilibrio x^* es actractor o repulsor, dependiendo de $|f(x^*)| < 1$ o $|f(x^*)| > 1$

4. Se analiza ahora cuando $x(n+1) = \mu x(n)(1 - x(n))$. A pesar de su elemental apariencia, no es tan sencillo resolver, es decir encontar $x(n)$. Pero como en diversos problemas de matemática, se puede predecir ciertas características, asociando a la ecuación en diferencias a $f(x) = \mu x(1-x)$. Note que los puntos fijos de f son $x = 0$ y $x = \dfrac{u-1}{u}$. Partiendo que $x^* = 0$: ¿$\lim_{n\to\infty} x(n) = x^* = 0$?, es decir ¿$x^* = 0$ es valor de equilibrio de la *e.d*?.

   Para ello, sea $X = [-\eta, \eta]$ tal que $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in int(X)$. Se puede asegurar que para todo $x \in X$: $f(x) = f(0) + f'(0)x + r(x) = f'(0)x + r(x)$. Note que $f(x(n)) = f'(0)x(n) + r(x(n))$, esto es si $x(n)$ pertenece a X. En caso $r(x(n)) = 0$ se reduce a lo anterior. No obstante, no siempre sucede esto. Lo que fuerza a construir una función $r(x(n))$ de la forma $r(x(n)) = \alpha x(n)$ con $\alpha << 1$ o que $|f'(\eta) + \alpha| < 1$. En cualquiera se llega que $f(x(n)) = (f'(0) + \alpha)x(n)$. Todo los argumentos serían una intrepretación muy intuitiva del teorema de Hartman, pues él, nos asegura la existencia de $r(x(n))$ mediante conjugación. Bajo estás condiciones se puede afirmar que $x_* = 0$ es solución estable (local). Ahora si se supone que $0 < u < 1$ se toma $k = 1$, y se llega a que $x^* = 0$ es atractor de la familia de sistemas dinámicos discretos $(x, f, O(x, f))$.

Si se aplicará un razonamiento parecido para $x^* = \dfrac{u-1}{u}$ considerando que $1 < u < 3$, pues esto implica que $|f'(x^*)| < 1$. Se tiene: $X = [a, b]$ tal que $x^* \in X$ y $|f'(c)| < 1$ para todo c en (a, b). Luego aplicando serie de Taylor al rededor de $x^* = \dfrac{u-1}{u}$ y agrupando. $f(x(n)) = f'(x^*)x(n) + R(x(n)) + x^* - f'(x^*)x^*$. Se toma $r(x(n)) = R(x(n)) + x^* - f'(x^*)x^*$ con las propiedades antes mencionadas.

5. Si se retorna al ejemplo de la proposición 3.1, se interpretaría a $x(n) = x_n$ como la solución de $x(n+1) = mx(n) + b$ sujeta a $x(0) = 2$. Es decir $x(n) = 2m^n + b\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} m^j = x_n$. La cual es única.

6. Ahora se abordará f como una función cualquiera, para tal función puede que exista un punto fijo. Si lo hay se da la posibilidad que el valor númerico de la función derivada evaludada en dicho número sea menor que uno-en tal situación, por los argumentos anterios y llevándolo al contexto- se dirá que es atractor y de ser mayor, repulsor

7. Finalmente, se analiza los sistemas en diferencias cuadrados. Es sabido que

las *e.d* se aplican en diversos temas, como en aproximación de ecuaciones diferenciales. Los sistemas aunque son independientes, se pueden aplicar para discretación de sistemas dinámicos continuos. Los cuales se darán algunos ejemplos:

EJEMPLO 3.3. El modelo de Solow con una ecuación logística o Sistema T *(Ruiz, 2015).*

Considere $\mu \in (1, 3)$, $0 < p < 1$ y $g(n, 0) = 0$

$$(n_{t+1}, k_{t+1}) := (f(n_t), g(n_t, k_t)) \text{ con}$$

$$\begin{cases} n_{t+1} = \mu n_t(1 - n_t) = f(n_t) \\ k_{t+1} = \dfrac{1}{1+n_t}[(1-\delta)k_t + (k_t^p + 1)^{\frac{1-p}{p}}(s_w + s_r k_t^p)] = g(n_t, k_t). \end{cases}$$

Es un sistema de ecuaciones en diferencias no lineales, aplicado en Economía. Se puede estudiar su estabilidad definiendo la función $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$. En la referencia se analiza la existencia de los puntos de equilibrio, dando condiciones para establecer su estabilidad asintótica. Es sencillo encontrar el punto fijo de f, mas para g se dan condiciones necesarias para que el conjunto formado por sus puntos fijos sea no vacío.

EJEMPLO 3.4. EL modelo discreto Lotka-Volterra *(Morales, 2015).*

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n - \beta x_n y_n}{1 + \gamma x_n} \tag{3.1}$$

$$y_{n+1} = \frac{\delta y_n + \epsilon x_n y_n}{1 + \eta y_n} \tag{3.2}$$

El cual es un sistema en diferencias no lineal. Pero que puede ser abordado definiendo la función.

$(f, g) : I \times J \to I \times J$

$$f(x, y) = \frac{\alpha x - \beta xy}{1 + \gamma x} \tag{3.3}$$

$$g(x, y) = \frac{\delta y + \epsilon xy}{1 + \eta y} \tag{3.4}$$

Por lo general, estos modelos son aplicados a la ecología por eso se analiza con una condición inicial: (x_0, y_0) donde I y J son intervalos incluidos en $[0, \infty)$

En la referencia se analiza la existencia de los puntos de equilibrio, se puede encontrar de manera explicita resolviendo el sitema no lineal de ecuaciones. Para analizar la estabilidad asintótica, en función de la numeralidad de los teoremas se aplica el 2.5

3.4. Teoría de la Aproximación

En esta sección se interpretará ciertos sistemas dinámicos discretos como métodos de aproximación, en palabras distintas «la persona» y no como el «nombre» de la misma.

3.4.1. Iteraciones como sistemas dinámicos discreto

Métodos de aproximación de ceros de funciones

Se interpretará la iteración de punto fijo, el razonamiento es análogo para métodos que sirven, en lo general, para hallar ceros de funciones.

$$f : [a,b] \to [a,b]$$

Considere la iteración

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ sujeta a } x_0 \tag{3.5}$$

Note que:

$$x_1 = f(x_0) \;\; x_2 = f(x_1) = f^{(2)}(x_0) \quad , x_3 = f(x_2) = f^{(3)}(x_0),$$

Es decir, $\{f(x_n)\}_{n\geq 0}$ es una órbita de x_0 respecto a f. ¿Qué significa el punto fijo? ¿existe tal punto? ¿ cuáles son las condiciones para garantizar su unicidad? Por otro lado, sea

$$f : [a,b] \to [a,b]$$

. f tiene un punto fijo, pues cumple las condiciones del Teorema del Punto Fijo. Por ello, existe $p = f(p)$. El proceso de búsqueda de una buena aproximación de p, se interpreta como el sistema dinámico discreto generado por la iteración (3.5) esto es $([a,b], o(x_0, f), f)$

Ahora, si existe

$$f^* : [c,d] \to [c,d] \tag{3.6}$$

tal que

- $[c,d] \subset [a,b]$
- $x_0 \in [c,d]$
- $f^*(x) = f(x)$ si $x \in [c,d]$
- Si existe K: $|(f^*)'(x)| \leq K < 1$ si $x \in (c,d)$

En estas condiciones se puede garantizar que:

- $|f^*(x_n) - p| \leq K^n|x_0 - p|$, para todo n
- $\lim\limits_{n\to\infty} |f^*(x_n) - p| \leq \lim\limits_{n\to\infty} K^n|x_0 - p|$

(Burden y Fairas, 2002, p.61).

La primera afirmación es cierta, debido a $|(f^*)'(x)| \leq K < 1$ y la segunda, se desprende de la primera. Bajo estas condiciones se puede garantizar que

- Existe un único punto fijo p para f^*

- $\{f^*(x_n)\}_{n\geq 0}$ converge a p

OBSERVACIÓN 3.2. Al considerar: $([c,d], o(\beta, f^*), f^*)$, y dado que, la función f^* tiene un único punto p fijo, para cualquier valor $\beta \in [c,d]$, pues $\{f^*(x_n)\}_{n\geq 0}$ converge a p para cualquier condición inicial β entonces p es punto atractor para cada elemento de la familia $\{([c,d], o(\beta, f^*), f^*)\}_{\beta\in[c,d]}$

EJEMPLO 3.5. .

$f : [-2,4] \to [-2,4]$

$f(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$

Dado que $f'(x) = \dfrac{2x}{3}$, $x \in (-2,4)$

Para construir se tratará de acotar la derivada.

$$f'(x) = \left|\frac{2x}{3}\right| \leq 2/3 \ \text{ si } x \in (0,1)$$

Entonces

$f^* : [-1,1] \to [-1,1]$

$f^*(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$

- Existe un único punto fijo p para f^*
- $\left\{\dfrac{{x_n}^2-1}{3}\right\}_{n\geq 0}$ converge a p
- $([-1,1], o(0.3, f^*), f^*)$, es un sistema dinámico discreto, y p es su único punto atractor.

- $x_{n+1} = \dfrac{{x_n}^2 - 1}{3}$ sujeto a $x_0 = 0{,}3$ tiene un punto fijo atractor.
- $([-2, 4], o(0.9, f), f)$, es un sistema dinámico discreto, y p es su único punto atractor.
- p es punto atractor para cada elemento de la familia $\{([-2, 4], o(\beta, f), f)\}_{\beta\in[-1,1]}$

Ahora se considera a $g(x) + x = f(x)$, note que $g(p) = 0$ si y solo si $f(p) = p$. Hallando el punto fijo de f se calcula el cero de g

El método de la potencia

Retomando lo expresado en el ejemplo de recta matricial. Dada una matriz ¿se puede aproximar sus valores propios? En nuestro contexto computacional, parece innecesario, averiguar métodos para dicho fin, pues con un ordenador potente se puden hallar. Sin embargo, los algoritmos que sirven para aproximarlos están basados en esta teoría, es decir, sin estos métodos no se podrían calcular las estimaciones, probando así, que la computación «dura» no es más que una aplicación de la matemática de lápiz y papel. Sea pues $f_A(x) = \dfrac{1}{||Ax||_\infty}Ax$. Note que si $f_A(p) = p$, implica que $Ap = ||Ap||_\infty p$. Esto se traduce a que p es un autovector de A asociado al autovalor $||Ap||_\infty$.

Donde $||(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)||_\infty = max\{|x_i| : i = 1, 2, .., n\}$.

Se define un SDD $x_{n+1} = \dfrac{1}{||Ax_n||_\infty}Ax_n$ sujeto a x_0 tal que $||x_0||_\infty = 1$

Para un mejor entendimiento se debilitara las hipótesis.

- Sea A una matriz triangular de cualquier tipo e inversible y que ningún elemento de la diagonal se repita. Sea $|\lambda_1|$ su valor dominante. Es inmediato verificar dicho valor solo con analizar la diagonal principal (además de verificar su inversibilidad). Cosa no tan sencilla si se desea calcular el vector propio asociado al autovalor en cuestión. He aquí la aplicación del método. Bajo estas condiciones, se puede probar que x_n converge al único p asociado a λ_1. Es decir que todo sistema dinámico discreto inducido por f tiene un punto fijo p *ams*. Si su elemento dominate se repite, se concluye lo mismo, solo considerando que tal autovalor tiene más de un autovector asociado y p sería solo uno de ellos.

- Sea A una matriz simétrica. Este tipo de matrices son diagonalizables. Aquí se presenta el primer inconveniente: verificar que sea inversible. Si es más sencillo calcular su determinante, se opta por tal opción, en tal caso, se asume que mediante operaciones algebraicas se pruebe la existencia de su inversa. Otra recomendación es utilizar transformaciones de fila, llevándola a una matriz triangular y reduciéndose al caso anterior, superado este «percance», se lográ probar que x_n converge a un atovalor p asociado a λ_1 (λ_1 puede tener más de un autovector asociado). Y se concluye p es *ams*

- Ahora sea A una matriz de un tipo distinto a las demás. Se debe verificar que sea inversible. Aquí si se torna más complicado. Vale la pena preguntarse cuál el método más eficiente: triangulizar la matriz, encontrar la inversa, o hallar su determinate; o si es más sencillo calcular su autovector asociado. Salvo tener de antemano los autovalores de las matriz para poder asegurar que sea inversible. El problema se torna aun más complejo cuando la matriz es real pero con autovalores complejos. Además de exigir la existencia de una matriz inversa, se debe probar la unicidad del autovalor dominante.

Siguiendo este procedimiento se puede encontrar el mínimo valor de una matriz. Pues si el autovalor dominante de A^{-1} es λ, el mínimo de A sería λ^{-1}. Viéndolo como sistema dinámico discreto es sencillo determinar si su punto de equilibrio es *ams*

Cuando el problema radica en hallar el autovector de una manera aproximada el costo computacional es muy alto, sino se elige una condición inicial apropiada. Peor aún si se quisiera aplicar el método a ciegas, sin saber de antemano si tiene un vector dominante. *(Burden y Fairas, 2002, p.562)*

EJEMPLO 3.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 0 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

Sea entonces $\mathbb{R}^5_* = \mathbb{R}^5 - \{0\}$ y $s = (16, 17, 18, 19, 20)$ y como $||s||_\infty = ||(16, 17, 18, 19, 20)||_\infty = 20$. A partir de él se construye $x_0 = \frac{1}{||s||_\infty} s$ entonces el sistema dinámico discreto $(\mathbb{R}^5_*, f_A, o(x_0, f_A))$ tiene un punto de equilibrio *ams*.

En general, las familia de sistemas $\left\{(\mathbb{R}^5_*, f_A, o(\frac{1}{||s||_\infty} s, f_A))\right\}_{s \in \mathbb{R}^5_*}$ tiene un punto de equilibrio p que es *ams*.

El sistema dinámico discreto se interpreta como el proceso que conlleva al cálculo de un vector aproximado.

3.5. Sistema *Claudia – Maritza*

Se definirá $F(x, y) = (f(x), h(x, y))$, donde

$$f(x) = cos^x(\phi) + sen^x(\phi) - 1$$

$$h(x, y) = x^p(csc^y(\beta) - ctg^y(\beta))$$

con ϕ, β pertenecientes al intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Para determinar los puntos de equilibrio, se probará: f tiene un punto fijo. Geometricamente significa: una interseción entre la gráficas de f y la función identidad.

Del mismo modo para h se define $g(y) = x^{-p} h(x, y)$

Observación 3.3. Determinar los puntos de equilibrio, es equivalente a resolver el sistema de ecuaciones

$$f(x) - x = 0$$

$$h(x, y) - y = 0$$

En la figura 3.2, se observa que el esbozo de f intercepta a la función identidad. Esto es $f(x) = x$. Al valor resultante se le denotará con x_0.

Por otra parte sea $g(x) = x -$ en realidad se debería definir, dado que ya se conoce x_0, $g(y) = y$ (ver Ejemplo 3.8)$-$ que es equivalente a resolver $g(x) = x_0^{-p}x$ con $g(x) = csc^x(\beta) - ctg^x(\beta)$

Sea (x_0, y_0) un punto de equilibrio de f esto es $f(x_0) = x_0$ y $h(x_0, y_0) = y_0$

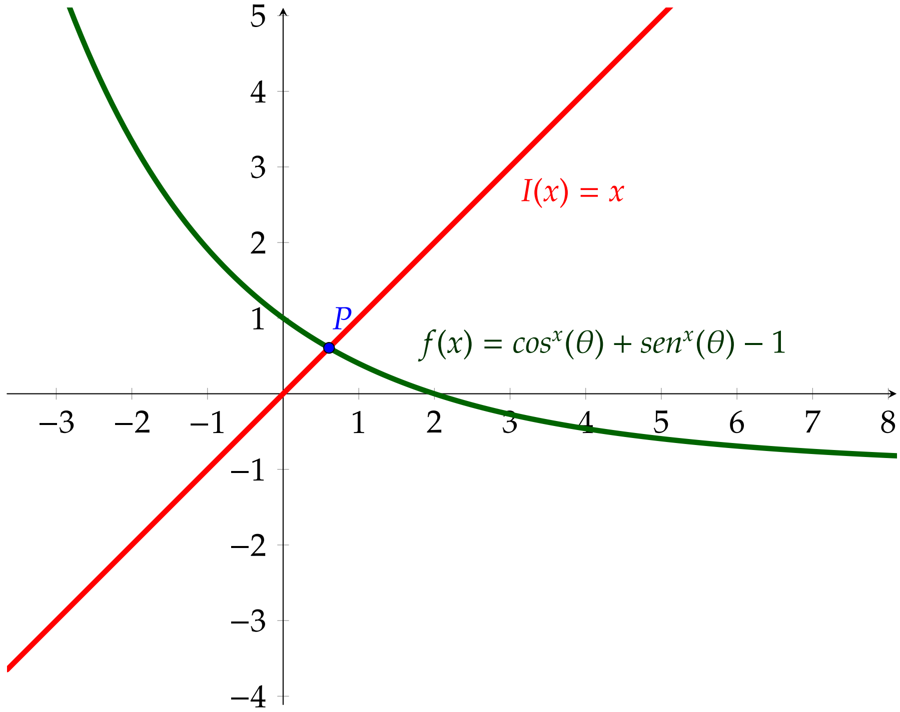

Figura 3.2: Gráfica de f y la función identidad

OBSERVACIÓN 3.4. Los autovalores de $D(F(x, y))$ son: $\lambda_1 = f'(x)$ y $\lambda_2 =$

$g'(y)x^p$

LEMA 3.1. *Sea* $d(x) = f'(x) = cos^x(\phi)ln(cos\phi) + sen^x(\phi)ln(sen\phi)$. *Existe* $\Phi \subseteq (0, \frac{\pi}{2})$ *tal que* $|d(x)| < 1$, *para todo* $\phi \in \Phi$

Demostración. Dado que $|a^x| < 1$, para todo $|a| < 1$, en particular lo será para $a = cos(\phi)$ o $a = sen(\phi)$. Ahora, sea $\beta = max\{|ln(cos\phi)|, |ln(sen\phi)|\}$ $|d(x)| \leq |ln(cos\phi)| + |ln(sen\phi)| < 2\beta$.
Se debe hallar $\beta < \dfrac{1}{2}$.
Se sabe $ln(sen\frac{\pi}{4}) = ln(cos\frac{\pi}{4})$ y $|ln(sen\frac{\pi}{4})| < \frac{1}{2}$
Para la construcción de Φ se realizará

- Las funciones $S(\phi) = ln(sen\phi)$ y $C(\phi) = ln(cos\phi)$ son biyectivas y no positivas para $\phi \in IC$.

$$x_2 > x_1 \leftrightarrow C(x_1)) > (C(x_2) \tag{3.7}$$

$$x_1 < x_2 \leftrightarrow S(x_1)) < (S(x_2) \tag{3.8}$$

  Además, para $x_0 = \frac{\pi}{4}$, se tiene $S(x_0) = C(x_0)$. Sea $y_0 = C(x_0)$

- Considerando: $ln(senx_0) > \dfrac{-1}{2}$, dado que S es biyectiva y por (3.8) existe un $z = S^{-1}(\dfrac{-1}{2})$, tal que $x_0 > z$

- Sea $\beta = \frac{-1}{4} + \frac{y_0}{2}$. Por la biyectividad de S, existe $\overline{x_0}$, tal que $\overline{x_0} = S^{-1}(\beta)$, y por 3.8: $\overline{x_0} < x_0$

- Ahora, por (3.7): $C(x_0) < C(\overline{x_0})$

  Del mismo modo, por (3.1): $S(\overline{x_0}) < S(x_0)$

  Y dado que: $C(x_0) = S(x_0)$, se concluye

  $S(\overline{x_0}) < C(\overline{x_0})$

- Sea $\alpha \in (C(\overline{x_0}), \beta)$. Existe un $\overline{\overline{x_0}}$, tal que: $\alpha = S^{-1}(\overline{\overline{x_0}})$, siguiendo una justificación análoga a la anterior:

  $S(\overline{\overline{x_0}}) < C(\overline{\overline{x_0}})$

- Finalmente, tomando $\Phi = (\overline{x_0}, x_0)$. Por construcción de Φ, si $x \in \Phi$:

  $S(x) < C(x) < 0$

  Esto es $\beta = max\{|ln(cosx)|, |ln(senx)|\} = |ln(senx)|$

  Además, por ser S no positiva, la existencia de z y 3.8 se infiere que

  $|S(x)| < |S(x_0)| < \frac{1}{2}$

  Esto es $\beta < \frac{1}{2}$

■

Lema 3.2. *Sea* $g(y) = csc^y(\beta) - ctg^y(\beta)$. *Se define* $q(y) = g'(y) = csc^y(\phi)ln(csc\phi) - ctg^y(\phi)ln(ctg\phi)$. *Para todo* $y \in (0, 1)$, *existe* $\Phi_\beta \subseteq IC$ *tal que* $|q(y)| < 1$, *para todo* $\phi \in \Phi_\beta$

Demostración. La figura 3.3 muestra la existencia de un intervalo abierto, $(\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2})$, al cual se le denotará con AB

Para la conrstrucción de Φ_β se realizará

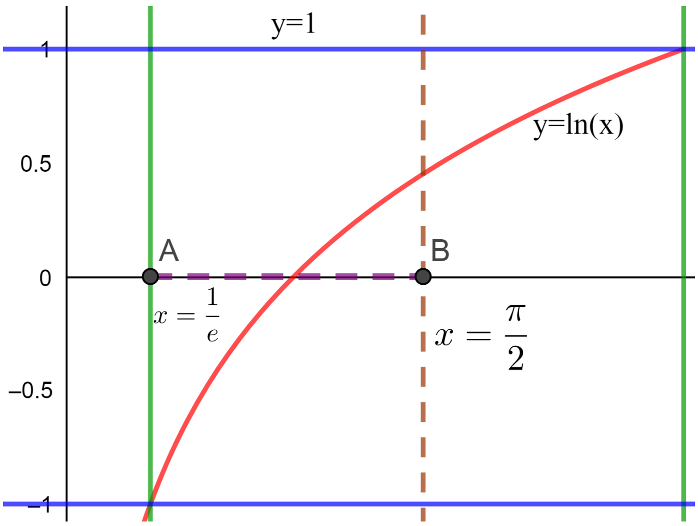

Figura 3.3: Propiedades de la función Logaritmo

- Dado que $|a^y| < \dfrac{1}{2}$, para todo $|a| < \dfrac{1}{2}$, en particular lo será para $a = \dfrac{sen(\beta)}{2}$.

- Se definen dos funciones

  - $S : AB \to (0, 1/2)$

    $S(\beta) = \dfrac{sen^y(\beta)}{2}$. Esta función es acotada, creciente, biyectiva y continua. Además, $y = \dfrac{1}{2}$ es asíntota horizontal. Y $S'(\beta) > 0$

  - $LC : AB \to (0, 1/2)$

    $LC(\beta) = ln(csc\beta)$. Esta función es acotada, decreciente, biyectiva, continua; positiva, y $LC'(\beta) < 0$

    Se concluye, la existencia del punto J (Figura 3.4)

  - Sea el punto $J = (j_1, j_2)$. Dado $t \in VB$. Ahora, $LC(J) > LC(t)$ y $S(J) <$

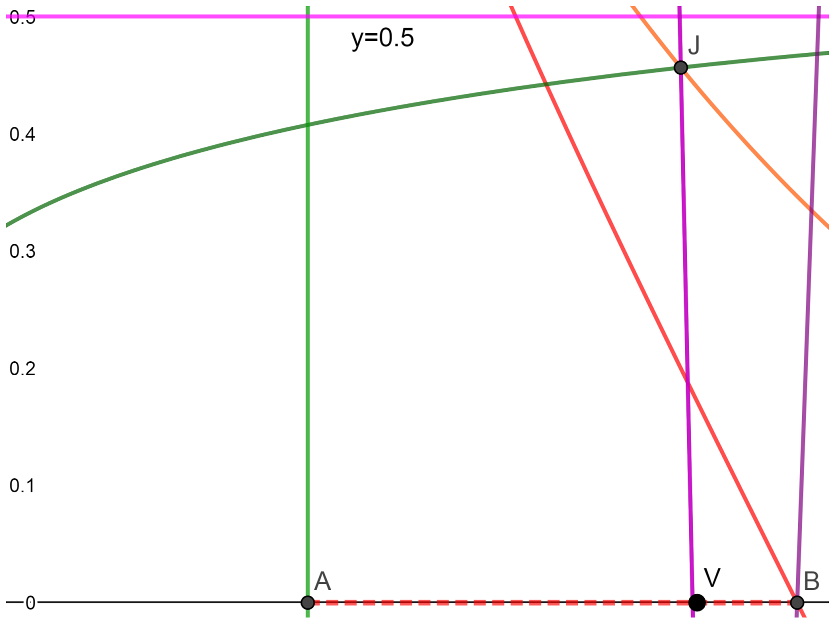

Figura 3.4: Construcción del conjunto VB

$S(t)$, debido a: $LC(J) = S(J)$, por lo tanto, $LC(t) < S(t)$

- Sea $\lambda = max\{|csc^y(\beta)|, |ctg^y(\beta)|\} = |csc^y(\beta)|$

  Esto es valido para todo β, en particular para $\beta \in VB$ (Figura 3.4)

  De lo anterior $LC(t) < S(t)$

  $\frac{sen^y(t)}{2} > ln(csct).$

  $\frac{1}{2} > csc(t)^y ln(csct)$

  $|csc^y(t)ln(csct)| < \frac{1}{2}$

- Dado que $g'(y) = csc^y(\beta)ln(csc\beta) - ctg^y(\beta)ln(ctg\beta)$

  $|q(y)| \leq |csc^y(\beta)ln(csc\beta)| + |ctg^y(\beta)ln(ctg\beta)|$

  Tomando $\Phi_\beta = VB$, para todo $t \in \Phi_\beta$ se tiene $|q(t)| < 2|csc^y(t)ln(csct)|$ por lo tanto, $|q(t)| < 1$

■

PROPOSICIÓN 3.2. *Sea*

$F(x, y) = (f(x), h(x, y))$, *donde*

$f(x) = cos^x(\phi) + sen^x(\phi) - 1$

$h(x, y) = x^p(csc^y(\beta) - ctg^y(\beta))$

- *Con* $p > 1$, $\phi \in \Phi$, $\beta \in \Phi_\beta$, *y* $|x_0| < 1$, $|y_0| < 1$. *Siendo* $P = (x_0, y_0)$ *punto fijo de* F. *Entonces* P *es punto fijo asintóticamente estable.*

- *Si* $\phi \in \Phi$, $|x_0| < 1$ *y* $|g'(y)x_0^p| < 1$ *siendo* $P = (x_0, y_0)$ *punto fijo de* F. *Entonces* P *es punto fijo asintóticamente estable*

Demostración. Los autovalores $D(F(x, y))$ son: $\lambda_1 = f'(x)$ y $\lambda_2 = g'(y)x^p$. Por el Lema 1.2 en medida a lo anterior: $\lambda_1 = f'(x) < 1$ y $g'(y) < 1$. Ahora, $|x_0^p| < 1$, por ser $p > 1$ y $|x_0| < 1$. Y por el Lema 1.3, implica que $\lambda_2 = g'(y)x^p < 1$. Esto es ambos autovalores son menores que 1. Por el teorema 2.5 se ila que (x_0, y_0) es *ams*

■

Dado que $F(x, y) = (f(x), h(x, y))$, su matriz jacobiana es de la forma

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} f'(x) & 0 \\ \dfrac{\partial h(x, y)}{\partial x} & \dfrac{\partial h(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Razón por la cual solo se considerá $f'(x)$ y $\dfrac{\partial h(x,y)}{\partial y}$

Esta idea se puede generalizar, si $F(x,y,z,w) = (f(x), g(x,y), h(z,w), j(z,w))$. Entonces la matriz jacobiana $J(F) = diag[J_{(f,g)} \;\; J_{(h,j)}]$ y basta aplicar el Teorema 1.5, para relacionar sus autovalores.

EJEMPLO 3.7. $F(x,y) = (f(x), h(x,y))$

Conidere: $\phi = 37°$ y $\beta = 16°$

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1 \\ h(x,y) = \frac{1}{x^4}\left(\left(\frac{25}{7}\right)^y - \left(\frac{24}{7}\right)^y\right) \end{cases} \tag{3.9}$$

Para determinar $F(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ se hará lo siguiente:

-El x_0 es la abscisa de A siendo A la intercepción entre $f(x)$ y $y = x$.

-El punto y_0 es la abscisa de F siendo F la intercepción entre $g(x)$ y $y = x_0^4 x$

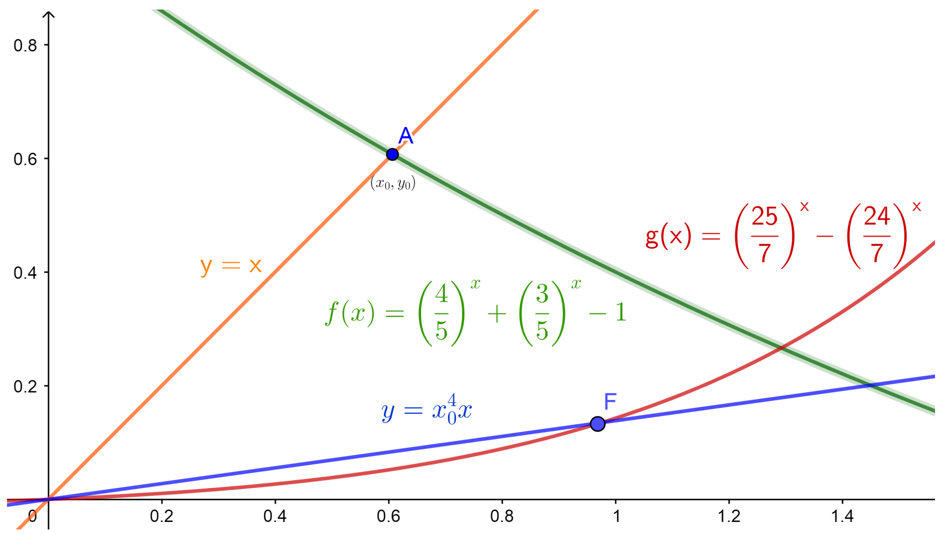

Figura 3.5: Interpretación

Tanto $x_0 < 1$ y $y_0 < 1$. Los valores explicitos son $x_0 = 0{,}61$ y $y_0 = 0{,}98$

Por otro lado: $h(x, 0) = 0$. Por ello

$x_0 = 0{,}61$ $y_0 = 0$

Se analizará la estabilidad de $(0.61, 0)$

- $|d(0{,}61)| = |cos^{0{,}61}(37°)ln(cos37°) + sen^{0{,}61}(37°)ln(sen37°)| < 1$

- $0{,}61^{-4}|q(0)| = 0{,}61^{-4}|ln(csc16°) - ln(ctg16°)| < 1$

- De los items anteriores se desprende la estabilidad asintótica.

OBSERVACIÓN 3.5.

- Para hallar x_0: $f(x_0) = x_0$. Se considera $y = f(x)$ y $y = x$. Es un sistema de ecuaciones no lineales. x_0 es la abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones antes mencionadas.

- Para hallar y_0:

  $h(x_0, y_0) = y_0$. Esto es

  $$\frac{1}{x_0^4}\left(\left(\frac{25}{7}\right)^{y_0} - \left(\frac{24}{7}\right)^{y_0}\right) = y_0 \leftrightarrow \left(\left(\frac{25}{7}\right)^{y_0} - \left(\frac{24}{7}\right)^{y_0}\right) = x_0^4 y_0$$

  Se considera

  $$g(x) = \left(\left(\frac{25}{7}\right)^{x} - \left(\frac{24}{7}\right)^{x}\right)$$

  $$y = x_0^4 x$$

  Como consecuencia, se toma $y = g(x)$ y $y = x_0^4 x$. Es un sistema de ecuaciones no lineales. y_0 es la abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones antes mencionadas.

3.6. Sistema *Susan-Nelida*

Se dará una motivación para la construcción de un sistema dinámico disceto.

Sea, con $|a_1| > |a_2|$

$$\begin{cases} S_1 : \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{b_1^2} = 1 \\ N_1 : \dfrac{x_1^2}{a_2^2} - \dfrac{x_2^2}{b_2^2} = 1 \end{cases}$$

Según figura 3.6, existen intercepciones entre S_1 y N_1. Sea A, el conjunto formado por los puntos donde ambas se cortan.

Ahora se define

$$\begin{cases} S(x, y) = \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} - 1 + x \\ N(x, y) = \dfrac{x^2}{a_2^2} - \dfrac{y^2}{b_2^2} - 1 + y \end{cases}$$

Encontrar (x_1, x_2) tales que: $N(x_1, x_2) = x_2$ y $S(x_1, x_2) = x_1$. Es equivalente a resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{b_1^2} - 1 + x_1 = x_1 \\ \dfrac{x_1^2}{a_2^2} - \dfrac{x_2^2}{b_2^2} - 1 + x_2 = x_2 \end{cases}$$

Y esto no lleva, al sistema inicial dado en esta seción. Si se da la condición $|a_1| > |a_2|$

Finalmente sea

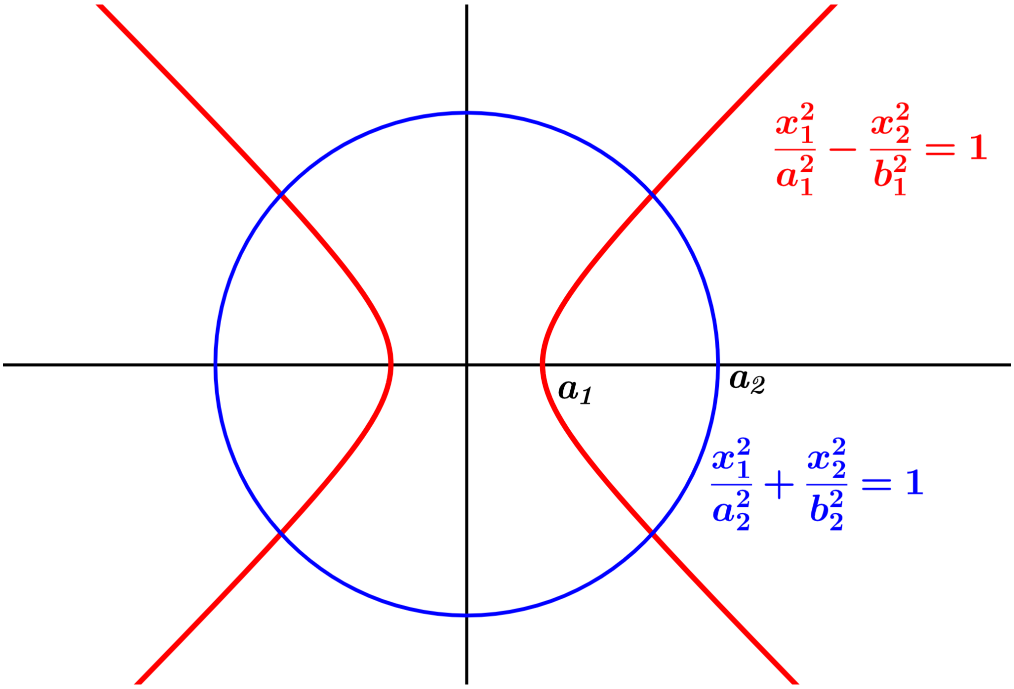

Figura 3.6: Interpretación geométrica

$SN(x, y) = (S(x, y), N(x, y))$ con $|a_1| > |a_2|$, tine 4 puntos de equilibrio, solo falta determinar si son estables o no.

Ahora, S_1, y N_1 son elipses e hipérbolas, repectivamente. Para saber estudiar las diferentes variaciones (es decir considerando S_1 elipse y N_1 elipse, etc). Se definirán

$$\tau : \{1, 2\} \times \{1, 2\} \to \{-1, 1\}$$

$$\tau(n, m) = \begin{cases} -1 \text{ si m=n=1} \\ \\ \ \ 1 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Ahora, sea el sistema con las restricciones

$$\begin{cases} S_1 : \dfrac{(-1)^n x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{(-1)^m x_2^2}{b_1^2} = \tau(n,m) \\ N_1 : \dfrac{(-1)^p x_1^2}{a_2^2} + \dfrac{(-1)^q x_2^2}{b_2^2} = \tau(p,q) \end{cases}$$

[] El siguiente sistema tiene puntos de equilibrio por los argumentos ante-

N_1: S_1	11	12	21
11	$a_1 > a_2$ y $b_1 < b_2$ o $a_1 > a_2$ y $b_1 < b_2$,	$b_2 < b_1$	$a_1 > a_2$
12	$b_1 > b_2$	$b_1 > b$ y $\dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_2}{a_2}$	$\dfrac{b_1}{a_1} < \dfrac{b_2}{a_2}$
21	$a_1 > a_2$	$\dfrac{b_1}{a_1} > \dfrac{b_2}{a_2}$	$a_1 > a_2$ y $a_1 b_2 > b_1 a_2$

Cuadro 3.1: Tabla de restricciones

riores. Se asignará en la tabla el número 11 a la combinación elipse-elipse, 12, elipse-hipérbola; y 21 hipérbola-elipse;

$$\begin{cases} S(x,y) = \dfrac{(-1)^n x^2}{a_1^2} + \dfrac{(-1)^m y^2}{b_1^2} - \tau(n,m) + x \\ N(x,y) = \dfrac{(-1)^p x^2}{a_2^2} + \dfrac{(-1)^q y^2}{b_2^2} - -\tau(p,q) + y \end{cases}$$

Del mismo modo y se puede plantear, un caso general:

$$\begin{cases} S(x,y) = \dfrac{(-1)^n(x-h)^2}{a_1^2} + \dfrac{(-1)^m(y-k)^2}{b_1^2} - \tau(n,m) + x \\ N(x,y) = \dfrac{(-1)^p(x-h)^2}{a_2^2} + \dfrac{(-1)^q(y-k)^2}{b_2^2} - \tau(p,q) + y \end{cases}$$

Una translación en ambas.

NOTACIÓN 3.1. *$uv(-;-)$**X**-**Y**: Son los vectores u y v que forman una base ortonormal y que generan al plano **X**-**Y***

NOTACIÓN 3.2. *Se denotará $\mathbf{XY}_{uv}$ a la matriz que cumple*

1. *Cuyas columnas son los vectores $uv(-;-)$**X**-**Y***

OBSERVACIÓN 3.6. La expresión en el plano **X-Y** hace referencia al plano generado por los vectores u, v

En estas condiciones se generaliza la idea

DEFINICIÓN 3.1. *Se define el modo asociado al sistema Susan $-$ Nelida o la apariencia Susan en el plano **X**-**Y** a*

$$\begin{cases} \overline{S}(X,Y) = \dfrac{(-1)^n(X-h)^2}{a_1^2} + \dfrac{(-1)^m(Y-k)^2}{b_1^2} - \tau(n,m) \\ \overline{N}(X,Y) = \dfrac{(-1)^p(X-h)^2}{a_2^2} + \dfrac{(-1)^q(Y-k)^2}{b_2^2} - \tau(p,q) \end{cases}$$

DEFINICIÓN 3.2. *Se define el sistema Susan $-$ Nelida*

$$\begin{cases} S(x,y) = \dfrac{(-1)^n(X-h)^2}{a_1^2} + \dfrac{(-1)^m(Y-k)^2}{b_1^2} - \tau(n,m) + x \\ N(x,y) = \dfrac{(-1)^p(X-h)^2}{a_2^2} + \dfrac{(-1)^q(Y-k)^2}{b_2^2} - \tau(p,q) + y \end{cases}$$

DEFINICIÓN 3.3. *Un sistema Nelida-Susan es aquel sistema Susan-Nelida- cuyo modo asociado está definido en el plano cartesiano.*

$$\begin{cases} S(x,y) = \dfrac{(-1)^n(x-h)^2}{a_1^2} + \dfrac{(-1)^m(y-k)^2}{b_1^2} - \tau(n,m) + x \\ N(x,y) = \dfrac{(-1)^p(x-h)^2}{a_2^2} + \dfrac{(-1)^q(y-k)^2}{b_2^2} - \tau(p,q) + y \end{cases}$$

NOTACIÓN 3.3. *Dada la expresión $U(X,Y)$ en el plano **X-Y** y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$. A*

$$U(X,Y) = \frac{(-1)^n(X-\lambda_1)^2}{a_1^2} + \frac{(-1)^m(Y-\lambda_2)^2}{b_1^2} - \tau(n,m)$$

Y se le denota por $\lambda_U - \boldsymbol{XY}$.

DEFINICIÓN 3.4. *Sea $uv(-;-)$**X-Y** y el conjunto de formas cuadráticas*

$$\begin{cases} \overline{S}(x,y) = A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + (D_1-1)x + E_1y + F_1 \\ \overline{N}(x,y) = A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy + D_2x + (E_2-1)y + F_2 \end{cases}$$

con

$$\overline{S_C} = \begin{pmatrix} A_1 & \frac{C_1}{2} \\ \frac{C_1}{2} & C_1 \end{pmatrix} \text{ y } \overline{N_C} = \begin{pmatrix} A_1 & \frac{C_1}{2} \\ \frac{C_1}{2} & B_2 \end{pmatrix}$$

Es denominado modo auxiliar Nelida sujeta a $uv(-;-)\boldsymbol{X}$-$\boldsymbol{Y}$ *y*

$$\begin{cases} S(x,y) = A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + D_1x + E_1y + F_1 \\ \\ N(x,y) = A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy + D_2x + E_2y + F_2 \end{cases}$$

y a este último Traza Susan-Nelida sujeta a $uv(-;-)\boldsymbol{X}$-$\boldsymbol{Y}$

DEFINICIÓN 3.5. *Dado una Traza Susan-Nelida sujeta a* $uv(-;-)\boldsymbol{X}$-$\boldsymbol{Y}$

$$\begin{cases} S(x,y) = A_1x^2 + B_1y^2 + C_1xy + D_1x + E_1y + F_1 \\ \\ N(x,y) = A_2x^2 + B_2y^2 + C_2xy + D_2x + E_2y + F_2 \end{cases}$$

es un sistema Susan − Nelida si para su modo auxiliar Nelida sujeta a $uv(-;-)\boldsymbol{X}$-$\boldsymbol{Y}$*, cumple:*

- *u y v son autovectores de $\overline{S_C}$ si y solo si lo son de $\overline{N_C}$*
- *Si existe un $n = (n_1, n_2)$ tal que: $\overline{S}(\boldsymbol{XY}_{uv}(w - n_1))$ y $\overline{N}(\boldsymbol{XY}_{uv}(w - n_2))$ son $n_{\overline{S}} - \boldsymbol{XY}$ y $n_{\overline{N}} - \boldsymbol{XY}$, respectivamente.*

DEFINICIÓN 3.6. *Sea $P = (P_1, P_2)$ un punto en el plano $\boldsymbol{XY}$. P es punto fijo de un sistema Susan − Nelida, si $P_1 = S(P_1, P_2)$ y $P_2 = N(P_1, P_2)$*

La apariencia *Susan* en el algún plano **XY**, si se sujeta a la tabla de restricciones, asegura que el conjunto formado por los puntos de equilibrio $P*$ es no nulo. En general, se necesita asegurar la existencia (en algunos casos solo son «teóricos», es decir, no se dan de manera explícita o solo es una aproximación.). Grantizada que al menos $P*$ es singleton, se necesita estudiar la estabilidad de sus elementos. Para ello, se sujetarán a ciertas restricciones a las entradas de la matriz jacobiana para algún $p^* \in P*$

PROPOSICIÓN 3.3. *Sea* (x_0, y_0) *un punto de equilibrio de un sistema Susan − Nelida*

$$J(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial S}{\partial x} & \dfrac{\partial S}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} & \dfrac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

Si $\dfrac{\partial S}{\partial x}, \dfrac{\partial N}{\partial y} < 1$. *Además:* $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ *y* $\dfrac{\partial N}{\partial x}\dfrac{\partial S}{\partial y}$ *son compatibles con* $: - :$ *Entonces el sistema es asintóticamene estable.*

Demostración. Aplicación del teorema 1.6

EJEMPLO 3.8. .

Sea la Traza *Susan-Nelida* sujeta a $uv(-;-)$**X-Y**, con $u = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} S(x, y) = 4x^2 + 11y^2 - 24xy + 57x - 58y + 76 \\ N(x, y) = \dfrac{56}{5}x^2 - \dfrac{216}{5}y^2 + \dfrac{119}{5}xy - 88x - 133y + 154 \end{cases}$$

El modo auxiliar*Nelida* sujeta a $uv(-;-)$**X-Y**,

$$\begin{cases} \overline{S}(x, y) = 4x^2 + 11y^2 - 24xy + 56x - 58y + 76 \\ \overline{N}(x, y) = \dfrac{56}{5}x^2 - \dfrac{216}{5}y^2 + \dfrac{119}{5}xy - 88x - 134y + 154 \end{cases}$$

con

$$\overline{S_C} = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{pmatrix} \text{ y } \overline{N_C} = \begin{pmatrix} \dfrac{56}{5} & -\dfrac{108}{5} \\ -\dfrac{108}{10} & \dfrac{119}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{XY}_{uv} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \text{ con } \lambda = (1,2)$$

Por **Teorema 1.5** basta probar que: $\mathbf{XY}_{uv}\, D(\overline{S_C}) = \overline{S_C}\mathbf{XY}_{uv}$ y $\mathbf{XY}_{uv}\, D(\overline{N_C}) = \overline{N_C}\mathbf{XY}_{uv}$

Lo cual se verifica, al efectuar las operaciones. Por otro lado

$$\begin{cases} \overline{S}(\mathbf{XY}_{uv}(w-\lambda)) = -\dfrac{(X-1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \dfrac{(Y-2)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}\right)^2} - 1 \\ \overline{N}(\mathbf{XY}_{uv}(w-\lambda)) = \dfrac{-(X-1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \dfrac{(Y-2)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{40}}\right)^2} - 1 \end{cases}$$

El modo asociado al sistema *Susan* − *Nelida* o la apariencia *Susan* en el plano **X-Y**

$$\begin{cases} \overline{S}(X,Y) = \dfrac{(-1)^1(X-1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \dfrac{(-1)^2(Y-2)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}\right)^2} - \tau(1,2) \\ \overline{N}(X,Y) = \dfrac{(-1)^1(X-1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \dfrac{(-1)^2(Y-2)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{40}}\right)^2} - \tau(1,2) \end{cases}$$

El sistema *Susan* − *Nelida* en el plano **X-Y**

$$\begin{cases} S(x,y) = \dfrac{(-1)^1(X-1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \dfrac{(-1)^2(Y-2)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{20}}\right)^2} - \tau(1,2) + x \\ N(x,y) = \dfrac{(-1)^1(X-1)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} + \dfrac{(-1)^2(Y-2)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{40}}\right)^2} - \tau(1,2) + y \end{cases}$$

3.7. Sistema de *More*

Un sistema de *More* está formado por la reunión de los sistemas *Claudia − Maritza* y *Susan − Nelida*

$M(x, y, z, w) = (f(x), h(x, y), S(z, w), N(z, w))$

TEOREMA 3.1. DE MORE *Existe un sistema de More tal que*

- *Tiene infinitos puntos fijos.*
- *Existen puntos fijos que son asintóticamente estables y forman un conjunto enumerable.*

Demostración. Para la construcción se tomará: el sistema *Claudia − Martiza*

$F(x, y) = (f(x), h(x, y))$

con $\phi = 37°$ y $\beta = 16°$

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1 \\ \\ h(x,y) = \frac{1}{x^4}\left(\left(\frac{25}{7}\right)^y - \left(\frac{24}{7}\right)^y\right) \end{cases} \tag{3.10}$$

Este sistema se estudió en la sección anterior. Tiene un punto de equilibrio asíntóticamente estable. Sea $\mathscr{CM} = \{(x_o, y_o\}$ el conjunto formado por su *p.e*

Se dará el sistema $Nelida - Susan$

$$\begin{cases} S(z,w) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 + z - 1 \\ N(z,w) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 + w - 1 \end{cases}$$

Dado que encontrar puntos de equilibrio equivale a resolver el sistema de ecuaciones no lineales $S(x,y) - x = 0$; $N(x,y) - y =$, esto es

$$\begin{cases} z = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 + z - 1 \\ w = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 + w - 1 \end{cases}$$

lo que implica

$$\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

En pocas palabra, sus puntos de equilibrio pertenecen a la circuferencia centrada en $(1/2, 1/2)$ y de radio 1. De tal forma su P.E son infinitos y describen un lugar geométrico. A continuación se dará la matriz Jacobiana.

$$J(z,w) = \begin{pmatrix} 2z & 2w-1 \\ \\ 2z-1 & 2w \end{pmatrix}$$

Sea: $p = (z, w)$ con $z = \dfrac{1}{2}(1-10^{-n})$ y $w = \dfrac{1}{2} - \sqrt{1-(2{,}10^{n})^{-2}}$ y $n \in \mathbb{N}$. Note que: $2z - 1 = -10^{-n}$, esto es: $2z - 1$ es compatible con : $-$:. y $2z$, $2w$ son menores que 1. A continuación, los autovalores son $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$ considerando $n > 2$. Por ende: $\mathscr{M}_i = \{(z, w) : z = \dfrac{1}{2}(1-10^{-n})$ y $w = \dfrac{1}{2} - \sqrt{1-(2{,}10^{n})^{-2}}$ con $2 < n \leq i\}$ Los elementos de tal conjunto son puntos de equilibrio *ams* y forman un conjunto enumerable. En resumen: $\mathscr{GM} = \{(x_0, y_0, z, w) : (x_0, y_0) \in \mathscr{CM}(x_0, y_0) \ \wedge \ (z, w) \in \mathscr{M}_i\}$ es un conjunto enumerable. Seguidamente, $J = diag(J_{CM},\ J_{SN})$. Los autovalores son los mismos, en conclusión, por el teorema 2,5, los puntos son asintóticamente estables. ■

Conclusiones

- Un punto de equilibrio es asintóticamente estable (para una función real de variable real) cuando el módulo de la derivada es menor que uno, es inestable en otro caso.

- Un punto de equilibrio es asintóticamente estable cuando el radio espectral de la derivada es menor que uno, para funciones vectoriales de variable vectorial.

- La estabilidad de los puntos de equilibrio de la Ecuación Logística, depende de los parámetros que esta tiene y de restriciones adicionales.

- La estabilidad de los puntos de equilibrio del Sistema T con una ecuación logística es asintónticamente estable sujetando sus puntos a restricciones.

- La estabilidad de los puntos de equilibrio del Sistema discreto Lotka-Volterra se puede analizar con el módulo de la derivada.

Referencias

Alegría, P. y Vera, A. (s.f). *Un curso de Análisis Funcional. Teoría y Problemas*. Universidad del País Vasco, España.

Arroyo, A. y Seade, J. (2006). *Sistemas dinámicos discretos.* (tesis de pregrado). Universidad Nacional Autónoma de Mexico.

Burden, R y Douglas, J. (2002). *Análisis Númerico.* (3ª ed.) Thomson Learning, lnc.

de Burgos, J. (2006). *Curso de Algebra y Geometría.* Madrid, España: S.A. McGraw-Hill.

Fernández, C. y Vásquez, J. (2003). *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos.* Cuidad de México: Thomson Editores.

Fernández, J. *Ecuaciones y Sistemas en diferencias. Aplicaciones a la dinámica de poblaciones.*.Universidad de Sivilla. https:\ \ idus.us.es\bitstream\ handle\11441\77520\Fern %E1ndez %20Rodr %EDguez %20Javier %20TFG.pdf; jsessionid=32ECB4600139654C4AB7F2D9DCDC8D43?sequence=1

Flores, J y Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal con aplicaciones.* Madrid, España: S.A. McGraw-Hill.

Flores, R (1971). *Cálculo diferencial sobre espacios vectoriales topológicos* (tesis de pregrado). Universidad de Sonora, México.

Golberg, J. (1964). *Introdución a las Ecuaciones en diferencias finitas.* Barcelona, España: Marcombo, S.A.

Gonzáles, M (2001). Conjugación topológica de difeomorfismos *PISQUIMAT,4*(1), 13-19.

Herstein, I. (1970). *Álgebra Moderna.* Cuidad de México: Editorial Trillas , S.A.

Horn, R. y Jhonson, C (2013).(2ª ed.) *Matrix Analysis.*[Análisis Matricial] Cambridge University Press.

King, J y Mendes, H. (2014). *Sistemas dinámicos discretos.* Universidad Nacional Autónoma de México. http:\ \www.mathmoo.unam.mx\ hml \libroFC.pdf

Lages, E (1999). *Curso de Análisis.* (5ª ed., Vol. 2). Brazil, Proyecto Euclides.

Llunque, A (2015). *Aplicación de la teoría de sistemas dinámicos al estudio cualitativo y cuantitativo de la evolución del ozono estratosférico y troposférico* (proyecto final de carrera). Escola Técnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona.

Morales, G (2015). *Estabilidad local para el modelo discreto Lotka-Volterra con competencia intraespecie.* (tesis de pregrado). Universidad Francisco José de Caldas, Colombia.

Munkres, G (2002). *Topología* . (2ª ed.). PEARSON EDUCACIÓN, S.A

Noni, M (2012). *Soluciones Periódicas de Sistemas Dinámicos Discretos* (tesis de pregrado). Universidad de Buenos Aires, Argentina.

de Oliveiro, M (2012). *Teoremas de Hartman-Grobman, Variedade Estável e Aplicãçoes* [Teoremas de Hartman-Grobman, Variedades Estables y aplicaciones] http:\ \www.marcusoliveira.yolasite.com\resources\Hatman-Grobman.pdf

Ruiz, I (2015). *Estabilidad de la dinámica discreta en el modelo de Solow con una ecuación logística.* (tesis de pregrado). Universidad Francisco José de Caldas, Colombia.

Sambarino, M (2005). *Tópicos de Sistemas Dinámicos.* http:\\ www.im.ufrj.br\ ~ arbieto\ ensino\2012\samba.pdf

Santamaría, O. (2018). *Variedades diferenciable, una introducción*. [Trabajo por publicar] Universidad Nacional «Pedro Ruiz Gallo», Lambayeque, Perú.

Villate, E. (2007). *Introducción a sistemas dinámicos discretos*. Universidad de Porto.