



UNIVERSIDAD NACIONAL  
“PEDRO RUIZ GALLO”  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



Tesis

# “Existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones de Brinkman, aplicando el teorema de Lax-Milgram, a nivel continuo y discreto”

para obtener el Título Profesional de  
Licenciado en Matemáticas

AUTOR:

Bach. Mat. Alex Yonel Altamirano Fernández

Asesor

M.Sc. Oscar Santamaría Santisteban

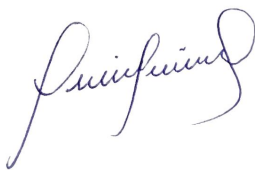
Lambayeque — Perú

Enero del 2020

# Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

## Escuela Profesional De Matemática

Los rubricantes, por la presente garantizan que han revisado y sugiere a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aprobación de la tesis titulada “Existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones de Brinkman, aplicando el teorema de Lax-Milgram, a nivel continuo y discreto”, presentado por el Bach. Mat. Alex Y. Altamirano Fernández la finalización de los requerimiento esenciales para obtener el título profesional de Licenciado en Matemáticas.



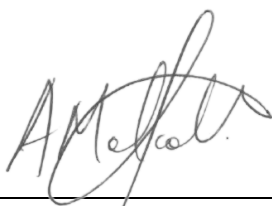
---

Dr. Gonzalo Paredes Tirado  
Presidente del Jurado



---

Mg. Marco Antonio Martín Peralta Lui  
Secretario del Jurado



---

Mg. Amado Malca Villalobos  
Vocal del Jurado

Enero de 2020

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Escuela Profesional de Matemática

**“Existencia y unicidad de soluciones para  
las ecuaciones de Brinkman, aplicando el  
teorema de Lax-Milgram, a nivel continuo  
y discreto”**



---

Bach. Mat. Alex Y. Altamirano Fernández

Autor



---

M.Sc. Oscar Santamaria Santisteban

Asesor

Lambayeque — Perú  
Enero del 2020

# AGRADECIMIENTOS

*Agradezco a Dios por prestarnos la vida y la salud. A mi asesor, por su apoyo incondicional y tiempo brindado, para hacer de esta tesis una realidad.*

*A mis padres, por darme la vida, ser el motor incondicional, y así mis sueños se cumpla a ser un gran profesional.*

*A mis profesores, hermanos, primos, tios, amigos y demas colaboradores que me brindaron su apoyo tanto académico como moral.*

# DEDICATORIA

Esta tesis está dedicada a mis queridos padres Adriano Altamirano y Efigenia Fernández. Por ser el motor, para cumplir mis sueños.

# Presentación

En esta investigación cuyo objetivo general es analizar que el problema este bien definido y unicidad de solución para el problema Brinkman, a nivel continuo y discreto, aplicando la teoría clásica de Lax-Milgram.

Como objetivo secundario, se hace una discretización tipo Galerkin mediante elementos finitos Nédélec de grado  $k \geq 1$  para la vorticidad y polinomios continuos a trozos para la presión y luego la velocidad se obtiene con un simple post-procesamiento. Espero que este trabajo sea de ayuda a futuro, para Estudiantes y Docentes. Presento esta tesis titulada **“Existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones de Brinkman, aplicando el teorema de Lax-Milgram, a nivel continuo y discreto”**.

## Resumen

En el presente estudio se analiza un método de elementos finitos para el problema modelo Brinkman en tres dimensiones gobernado por vorticidad, velocidad y presión. Utilizando esta estrategia tiene una gran ventaja a nivel continuo, haciendo un desacoplamiento completo de la velocidad. Gracias al teorema de Lax-Milgram el problema modelo tiene existencia y unicidad de solución tanto a nivel continuo como discreto. Se propone una discretización tipo Galerkin mediante Nédélec de grado  $k \geq 1$  para la vorticidad y polinomios continuos a trozos para la presión. Se determina el análisis de error para la vorticidad y presión. Luego campo de velocidad se obtiene con un simple post-procesamiento. Así mismo se obtienen las tasas de convergencia para la presión y la velocidad con las normas naturales independientes de la viscosidad, en cambio para la vorticidad una norma con peso, es decir que depende de la viscosidad del fluido. Finalmente se ilustran resultados numéricos, confirmando la base teórica.

# Abstract

In the present study a finite element method is analyzed for the Brinkman model problem in three dimensions governed by vorticity, velocity and pressure. Using this strategy has a great advantage at continuous level, doing a complete decoupling of the speed. Thanks to the Lax-Milgram theorem, the model problem has existence and uniqueness of solution at both continuous and discrete levels. A Galerkin-type discretization is proposed using Nédélec of degree  $k = 1$  for the vorticity and continuous piecewise polynomials for the pressure. Determine the error analysis for vorticity and pressure. Then the velocity field is obtained with simple post-processing. Likewise, the convergence rates for pressure and velocity are obtained with natural norms independent of viscosity, whereas for vorticity a norm with weight, that is, it depends on the viscosity of the fluid. Finally numerical results are illustrated, confirming the theoretical basis



---

# *Índice general*

---

<b>Introducción</b>	<b>II</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Fluidos . . . . .	1
1.2. Teoría de elementos finitos . . . . .	5
1.2.1. Análisis de la formulación variacional . . . . .	11
1.2.2. El Método de Galerkin . . . . .	14
1.2.3. Espacio de elementos finitos conformes . . . . .	16
<b>2. Análisis del error a priori para el problema modelo Brinkman</b>	<b>18</b>
2.1. Análisis del problema Continuo . . . . .	18
2.1.1. Problema Modelo . . . . .	18
2.1.2. Formulación Variacional . . . . .	19
2.1.3. Existencia y Unicidad de Solución . . . . .	21
2.2. Esquema de Galerkin . . . . .	24
2.2.1. Problema discreto . . . . .	24
2.2.2. Existencia unicidad de solución . . . . .	25
2.3. Análisis de error . . . . .	26
2.4. Recuperando el campo de velocidad . . . . .	29
<b>3. Resultados Numéricos</b>	<b>31</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>Sugerencias</b>	<b>36</b>

---

# *Introducción*

---

El estudio de los problemas de fluidos ha adquirido gran interés durante las últimas décadas por su gran variedad de aplicaciones en diferentes ciencias, tales como: ingeniería, oceanografía, aerodinámica, yacimientos petroleros y biomédicas. Dependiendo el tipo de fenómeno producido en el fluido, diferentes modelos matemáticos como: Stokes, Navier Stokes, Oseen, Brinkman, se pueden utilizar para obtener resultados precisos y adecuados para aproximar la dinámica del fluido en términos de velocidad, vorticidad y presión.

En particular en este trabajo nos enfocamos en hacer un análisis matemático y numérico de las ecuaciones de Brinkman de un fluido incompresible en términos de vorticidad y presión. Estas ecuaciones pueden considerarse como una extensión de la ley de Darcy para describir el comportamiento de las corrientes laminares del fluido viscoso dentro en un material poroso de permeabilidad posiblemente heterogénea, de modo que el flujo está dominado por el régimen de Darcy en algunas regiones y por Stokes en otras partes [2, 3]. Otra instancia en la que se encuentra el problema de Brinkman, que es una generalización de las ecuaciones de Stoke que modelan el movimiento de un fluido incompresible [17]. En cualquier caso, la aproximación exacta y eficiente del flujo viscoso gobernado por las ecuaciones de Brinkman es de gran importancia práctica y ha sido un foco principal de investigación en varias aplicaciones industriales y ambientales, incluyendo el estudio de espumas, la filtración de capas porosas, depósitos de petróleo o tubos de calor [9, 10, 8]. Además de la velocidad y la presión, normalmente se requieren otros campos intrínsecos para examinar patrones de flujo, tales como vorticidad. Ya que el problema Brinkman, siendo uno de los campos más estudiados en las últimas décadas (ver [7, 4, 5, 6, 14, 11]).

Esta tesis contiene tres capítulos. En el primer capítulo, comenzamos dando algunas definiciones y resultados básicos sobre la teoría de elementos finitos, también se enuncia el Teorema Lax-Milgram que se utiliza en el desarrollo de este trabajo.

En el segundo capítulo, tratamos el tema central de esta tesis, es analizar detalladamente los capítulos 2 y 3 del artículo [6]: en primer lugar se escribe el problema modelo Brinkman, se estudia su formulación variacional continua y analizamos la existencia y unicidad a través del Teorema de Lax-Milgram. Luego se analiza la discretización de Galerkin mediante los elementos conformes Nédélec para  $k \geq 1$ , además los polinomios continuos a trozos para la vorticidad y presión, respectivamente, gracias al teorema del Lax-Milgram el problema discreto también tiene solución única. Además estudiamos estimaciones de error a priori. Finalmente se recupera el campo de velocidad mediante la técnica de post proceso.

En el tercer y último capítulo, se muestran ejemplos numéricos confirmando el buen funcionamiento del método mediante el software Freefem.

---

---

# Capítulo 1

---

## *Preliminares*

---

---

---

---

### 1.1 Fluidos

---

---

Los fluidos es estudiado en dos partes, la hidráulica y la matemática. En la parte de la hidráulica se estudia desde un punto de vista empírico y en la matemática su análisis. De su hábil experimento de la primera parte originó novedades de comunicación con un valor incalculable; sin embargo, adecuado a la falta de los utilidades de la generalización de su propia teoría, estos logros eran de un beneficio acotado. Además, en la matemática por el hecho de no usar la comunicación experimental, se vieron obligados a plantear hipótesis simples que conduce a logros a veces completamente adversos a problemas reales. Unos de las investigadores dedicados a este estudio como Reynolds, Froude, Prandtl y Von Kármán, que los fluidos debe ser una combinación de teoría y problemas reales. Hoy en día los centros de investigación y ensayos emplean se trabaja en conjunto para la investigación como los: matemáticos, físicos, ingenieros y también técnicos.

Los fluidos se observa en distintas áreas de trabajo como por ejemplo en diseñar sistemas actualizados en el área de la ingeniería, desde aspiradoras hasta aviones modernos.

A un rango mas extensa de los fluidos que hoy en día es estudiando en el diseño y análisis como: aviones, barcos submarinos, cohetes, instrumentos en la medicina, red de enfriamiento de componentes electrónicos y tubos que transportan agua, el petróleo y gas natural, también se puede ver en efectos adverso de la naturales como el ciclo

de lluvias, las mareas del océano y las corrientes en las inmensas masas de agua. A continuación presentamos una imagen en la que se muestra el comportamiento de un fluido.



Figura 1.1: El huracán Epsilon se originó en el océano Atlántico Norte.

*Fluido:* Los fluidos es una sustancia que sufre una deformación continua al momento de aplicar una fuerza. Los fluidos se distinguen en dos grupos en líquidos y gases. Las fuerzas intermoleculares son mayores en los gases, lo que hace variar la presión de los gases que cambian fácilmente su volumen. La compresibilidad puede usarse para distinguir los líquidos de los gases; los gases son mucho más compresibles que los líquidos. Desde el punto de vista de la dinámica, no importa si el fluido es líquido o gas. Las leyes que se aplican son las mismas, pero en ocasiones, dependiendo del fluido que se trate, es posible despreciar algunos efectos y acortar su estudio. Es decir, los líquidos tal como el agua puede considerarse fluido incompresible.

*Velocidad:* Es una magnitud física vectorial.

*Vorticidad:* La vorticidad se define como la velocidad rotada.

*Presión:* Es una fuerza normal ejercida por el fluido por unidad de área. Se habla de presión cuando se trata de una gas o un liquido lo contrario de la presión en los sólidos

---

es la fuerza normal. Puesto que la presión se define como unidad de área.

*Viscosidad:* La viscosidad es el rozamiento interno que existe entre las capas de fluido. A causa de la viscosidad, es necesario ejecutar una fuerza para obligar a una capa de fluido a deslizar sobre otra.

Sean los campos vectoriales  $\mathbf{v} = (v_d)_{d=1,2,3}$ ,  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_d)_{d=1,2,3}$  y cualquier campo escalar  $q$ . A continuación, se definen los siguientes operadores diferenciales:

Para  $d = 2$ :

$$\mathbf{curl} q = (\partial_2 q, -\partial_1 q),$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{v} = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1,$$

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2.$$

Para  $d = 3$ :

$$\mathbf{div} \mathbf{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3, \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \theta_2 v_3 - \theta_3 v_2 \\ \theta_3 v_1 - \theta_1 v_3 \\ \theta_1 v_2 - \theta_2 v_1 \end{pmatrix}, \nabla q = \begin{pmatrix} \partial_1 q \\ \partial_2 q \\ \partial_3 q \end{pmatrix},$$

$$\Delta q = (\partial_{11}^2 q + \partial_{22}^2 q + \partial_{33}^2 q),$$

y

$$\mathbf{curl} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Se cumple las siguientes identidades:

Para  $d = 2$ :

$$\mathbf{curl} (\mathbf{curl} q) = -\Delta q,$$

y

$$\mathbf{curl} (\mathbf{curl} \mathbf{v}) = -\Delta \mathbf{v} + \nabla (\mathbf{div} \mathbf{v}).$$

Para  $d = 3$ :

$$\mathbf{curl} (\mathbf{curl} \mathbf{v}) = -\Delta \mathbf{v} + \nabla (\mathbf{div} \mathbf{v}).$$

### Generalización para las ecuaciones de Navier-Stokes

Veamos como se originó estas ecuaciones. El movimiento de un medio continuo, que se rige por las reglas principales de la mecánica clásica y la termodinámica para la ley de

la conservación de la masa, momento y energía. Así mismo, en particular la aplicación para estos principios en un marco de referencia que conducen a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{f},\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  son la densidad, velocidad y tensor de stress del medio continuo respectivamente, y  $\mathbf{f}$  es la fuerza (por unidad de volumen) las ecuaciones determinadas están en forma de divergencia. Luego representadas en su forma de no divergencia de la manera siguiente.

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{f},\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde la derivada material se define por:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$

Estas ecuaciones se basan en el enfoque euleriano para la descripción del movimiento continuo; es decir, las propiedades características del medio  $(\rho, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  son tratadas como funciones de tiempo y espacio en un marco de referencia. Una descripción alternativa es a través del enfoque lagrangiano donde las variables dependientes son las propiedades características de las partículas del material que siguen el movimiento; es decir, estas propiedades son las funciones de tiempo y parámetros para identificar las partículas tal como las coordenadas de la partícula en un tiempo inicial fijo. La aproximación mixta lagrangiano-euleriano, es interesante para problemas con diferentes medios con interface. Las incógnitas básicas de las ecuaciones (1.1) y (1.2) son  $(\rho, \mathbf{u})$ , para ello consideramos la siguiente relación para el tensor de stress:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I},\tag{1.3}$$

donde  $p$  y  $\boldsymbol{\tau}$  son la presión y el tensor de stress de la viscosidad, y los parámetros  $\mu$  y  $\lambda$  son los coeficientes de la viscosidad.

Así, un fluido es newtoniano si su tensor de stress es una función lineal del gradiente de velocidad. Para este tipo de fluidos, mediante la **ley de Newton** (o ley de Navier-Stokes):

Luego reemplazando (1.3) en la ecuación de momento (1.2), se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p = & \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f} \\ & + \nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \lambda + \nabla \mu \cdot (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \end{aligned} \quad (1.4)$$

En general, los coeficientes de viscosidad dependen de la temperatura; en el caso que la temperatura es fija, los coeficientes de viscosidad son constantes. Así, bajo estas condiciones (1.4), se convierte en

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f}. \quad (1.5)$$

Un flujo incompresible se caracteriza por la condición

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.6)$$

Utilizando la ecuación (1.6) y reemplazando en (1.2), se tiene

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (1.7)$$

Esta ecuación implica que la densidad es constante a lo largo de la trayectoria de una partícula del fluido. En la mayoría de los casos, podemos suponer que  $\rho$  es constante, de modo que (1.7) se cumple en todas partes.

Bajo la condición (1.6), reemplazando en la ecuación (1.5) se tiene:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (1.8)$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de **Navier-Stokes**. En el caso incompresible, las variables desconocidas son la de presión y velocidad. A partir de una discretización temporal de las Ecuaciones de Navier-Stokes (1.8), y despreciando el término convectivo se obtienen las Ecuaciones de Brinkman [20, 18, 19].

$$\sigma \mathbf{u} + \nabla p - \mu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (1.9)$$

---

## 1.2 Teoría de elementos finitos

---

En esta sección introducimos algunas definiciones y notaciones que se utilizará en el desarrollo de esta tesis.

---



Sabiendo que el método de elementos finitos es una estrategia numérica para resolver problemas relacionados con ecuaciones diferenciales parciales [13]. De este modo es un instrumento de análisis y potente ayuda para tener resultados aproximados en distintos problemas relacionados con la mecánica en un medio continuo. La idea elemental es que una parte de solución puede ser modelada de forma analítica y agregando elementos discretos. Esto hace que disminuya una cantidad infinita de variables del problema propuesto a un problema finito.

Nuestro objetivo es presentar un método de solución a un problema que satisfaga cada punto  $x \in \Omega$ , donde  $\Omega$  un dominio acotado en  $\mathbb{R}^n$ . para ello usaremos un espacio de funciones llamadas **funciones Test**, denotando al espacio de funciones de clase infinita como  $C^\infty(\Omega)$ , y  $\forall \varphi \in C^\infty(\Omega)$  definimos el soporte, tal que

$$\text{sop}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \text{ distinto de cero}\}}.$$

Se define la función test, de la forma siguiente

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{con soporte compacto y contenido en } \Omega\}.$$

Análogamente, se define para  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$C_0^m(\Omega) = \{\varphi \in C^m(\Omega) : \text{con soporte compacto y contenido en } \Omega\}.$$

**Ejemplo 1.1.** *Se un dominio  $\Omega = (0, 2)$ , determinar el soporte de  $\Omega$ .*

En efecto,

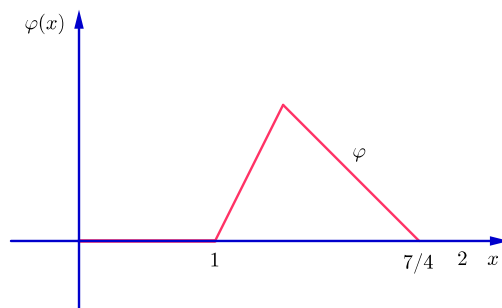


Figura 1.2: Gráfica de la función  $\varphi(x)$ .

$$\begin{aligned}\text{sop}(\varphi) &= \overline{\{x \in (0, 2) : \varphi(x) \neq 0\}} \\ \text{sop}(\varphi) &= \overline{]1, 7/4[} = [1, 7/4] \subseteq \Omega = (0, 2)\end{aligned}$$

Por lo tanto  $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ .

**Definición 1.1.** Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio vectorial(e.v) normado,  $V$  es de Banach si para cada sucesión de Cauchy  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , es decir

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0,$$

existe  $x \in V$ , tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Definición 1.2.** Si  $V$  un e.v, la aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ , se dice que es un producto escalar sobre  $V$  que cumple con las siguientes propiedades:

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in V \wedge \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
2.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in V$ .
3.  $\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in V, \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.3.** Se dice que  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio **pre-Hilbert** sobre el cuerpo  $\mathbb{K}$ , y consideremos la función  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  esta definida por  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in V$ . Entonces  $\|\cdot\|$  es un espacio normado en  $V$ , la cual se llama **Norma Inducida** por el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

La definición anterior induce la siguiente definición.

**Definición 1.4.** Se dice que un espacios pre-Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un **Espacios de Hilbert** si él es completo con la norma inducida por su producto escalar.

**Teorema 1.1.** [**Desigualdad de Cauchy-Schwarz.**] Sea  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio pre-Hilbert sobre  $\mathbb{R}$ , entonces  $\forall x, y \in V$  se tiene,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y, y \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

**Definición 1.5.** En términos de la norma inducida por el producto escalar, la desigualdad de Cauchy-Schwarz se escribe como

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$$

**Observación 1.**

Para  $\Omega$  un abierto acotado, el espacio  $L^2(\Omega)$  es Hilbert y provisto del producto punto

$$\langle f, g \rangle_{0,\Omega} = \int_{\Omega} fg, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega)$$

con la norma inducida así:

$$\|f\|_{0,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En este caso la desigualdad de Cauchy-Schwarz tiene la forma

$$|\langle f, g \rangle_{0,\Omega}| = \left| \int_{\Omega} fg \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|g\|_{0,\Omega}.$$

**Definición 1.6.** Sea  $v \in L^2(\Omega)$ , se dice que  $v' \in L^2(\Omega)$  en el sentido distribucional (débil), si existe una función  $z \in L^2(\Omega)$  tal que

$$-\int_{\Omega} v \varphi' = \int_{\Omega} z \varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

en tal caso:  $v' = z \in L^2(\Omega)$ .

**Ejemplo 1.2.** Consideremos  $\Omega = (0, 2)$  y la función:

$$v(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

**Solución:**

De la función se sabe que

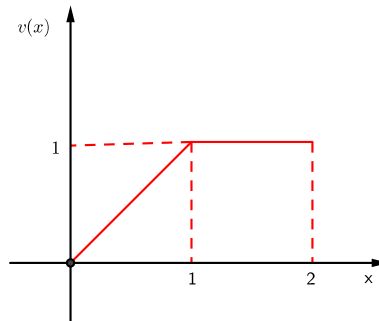


Figura 1.3: Gráfica de la función  $v(x)$ .

Se tiene que  $v(x) \in C^0(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$  y  $v(x) \notin C^1(\Omega)$ . Veamos ahora que  $v$  tiene derivada distribucional.

Sea  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  tal que  $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} v \varphi' &= - \left( \int_0^1 x \varphi' + \int_1^2 \varphi' \right) \\ &= - \left( x \varphi \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi + \varphi \Big|_1^2 \right) \\ &= -\varphi(1) + \int_0^1 \varphi + \varphi(1) \\ &= \int_0^1 \varphi = \int_0^2 z \varphi \end{aligned}$$

de donde,

$$z(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \end{cases} \in L^2(\Omega)$$

Motivados por la definición anterior, se define el espacio de Hilbert, tal que

$$H^1 := \{v \in L^2(\Omega) : v' \in L^2(\Omega)\}$$

de donde se tiene

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} u'v' \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

la norma inducida  $\|\cdot\| : H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  esta dada por

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = (\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|v'\|_{0,\Omega}^2) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$H^1(\Omega)$  se le denomina un espacio de Sobolev de grado uno.

**Observación 2.** Sea  $v \in H^1(\Omega)$ , se cumple que

$$\begin{cases} \|v\|_{1,\Omega} \geq \|v\|_{0,\Omega}, \\ \|v\|_{1,\Omega} \geq \|v'\|_{0,\Omega} \\ \|v\|_{0,\Omega} \quad \|v'\|_{0,\Omega} \quad \text{no son comparables.} \end{cases}$$

**Teorema 1.2.** Se dice que  $H^1(\Omega)$  es de Hilbert.

**Demostración.** Consideramos una sucesión de Cauchy  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en el conjunto  $H^1(\Omega)$ , es decir

$$\|u_n - u_m\|_{1,\Omega} = (\|u_n - u_m\|_{0,\Omega}^2 + \|u'_n - u'_m\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0$$

luego cada sumando va a cero por lo tanto  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{u'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son de Cauchy en  $L^2(\Omega)$ . Como  $L^2(\Omega)$  es completo, cada una de las sucesiones tiene límite en  $L^2(\Omega)$ , es decir, existen  $u, g \in L^2(\Omega)$  tales que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{0,\Omega} &= \left( \int_{\Omega} |u_n - u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \|u'_n - g\|_{0,\Omega} &= \left( \int_{\Omega} |u'_n - g|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por demostrar que  $u' = g$ .

Sea  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$- \int_{\Omega} u_n \varphi' = \int_{\Omega} u'_n \varphi \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

Aplicando la desigualdad conocida de Cauchy-Schwarz, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u \varphi' - \int_{\Omega} u_n \varphi' \right| &= \left| \int_{\Omega} (u - u_n) \varphi' \right| \leq \int_{\Omega} |u - u_n| |\varphi'| \\ &\leq \|u - u_n\|_{0,\Omega} \|\varphi'\|_{0,\Omega} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u_n \varphi' = \int_{\Omega} u \varphi'$$

de la misma forma podemos ver:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u'_n \varphi = \int_{\Omega} g \varphi,$$

tomando límite en (1.10) se tiene que

$$\int_{\Omega} u \varphi' = - \int_{\Omega} g \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

lo cual prueba que  $u' = g \in L^2(\Omega)$ , luego  $u \in H^1(\Omega)$  y además

$$\|u_n - u\|_{1,\Omega} = (\|u_n - u\|_{0,\Omega}^2 + \|u'_n - u'\|_{0,\Omega}^2)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

de donde  $u_n$  tiende a  $u$  si  $n \rightarrow \infty$  y así  $H^1(\Omega)$  es un espacio de Hilbert.

□

**Proposición 1.** *Se dice que todo subespacio cerrado de Hilbert es un espacio de Hilbert con el mismo producto escalar.*

**Definición 1.7.** *Sea  $\Omega = (a, b)$*

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}}$$

*es decir,  $v \in H_0^1(\Omega)$ , si y solo si, consideramos una secuencia  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ , es decir*

$$\|\varphi_k - v\|_{1,\Omega} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad (C_0^\infty(\Omega) \text{ es denso en } H_0^1(\Omega)).$$

*$H_0^1(\Omega)$  se caracteriza también como el subespacio de elementos de  $H^1(\Omega)$  que se anulan en la frontera de  $\Omega$ , esto es*

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v(a) = v(b) = 0\}.$$

**Lema 1.1.** [*Identidad de Green*]

*Consideremos una región  $\Omega$  abierto acotado en  $\mathbb{R}^n$  de frontera Lipchitz continua en  $\Gamma$ , se tiene*

$$\int_{\Omega} \tau \cdot \nabla \omega = - \int_{\Omega} \omega \operatorname{div}(\tau) - \langle \tau \cdot \mathbf{n}, \omega \rangle_{\Gamma} \quad \forall \tau \in H(\operatorname{div}; \Omega)$$

*donde  $\mathbf{n}$  es la componente normal.*

### 1.2.1. Análisis de la formulación variacional

Se considera en esta sección la definir una forma bilineal, funcional y un resultado importante útil para demostrar que el problema variacional esta bien puesto.

**Definición 1.8.** *Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  dos espacios de Hilbert sobre  $\mathbb{R}$ , se dice que una forma  $B : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es **bilineal** si es lineal en cada uno de sus componentes es decir:*

$$i) \quad B(\alpha u + v, w) = \alpha B(u, w) + B(v, w), \quad \forall u, v \in H, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$ii) \quad B(u, \beta w + z) = \beta B(u, w) + B(u, z), \quad \forall u \in H, w, z \in V, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Definición 1.9.** *Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  y  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  dos espacios de Hilbert sobre  $\mathbb{R}$ , se dice que una forma bilineal  $B : H \times V \rightarrow \mathbb{R}$  es **acotada** si existe una constante  $M > 0$  tal que:*

$$|B(x, y)| \leq M \|x\|_H \|y\|_V \quad \forall (x, y) \in H \times V.$$

**Definición 1.10.** Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{R}$ , se dice que una forma  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  es ***H-elíptica*** si se tiene una constante  $\alpha > 0$  tal que:

$$B(x, x) \geq \alpha \|x\|_H^2 \quad \forall x \in H.$$

**Lema 1.2.** [*Desigualdad de Poincaré*]

Sea  $\Omega = (a, b)$ , entonces existe  $\alpha = \alpha(a, b) > 0$  es decir

$$\|v'\|_{0,\Omega} \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde  $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$ .

**Demostración.** Sea  $v \in H_0^1(\Omega)$ , tal que

$$\begin{aligned} |v(x)| &= |v(x) - v(a)| = \left| \int_a^x v'(x) dx \right| \leq \int_a^x |1 \cdot v'(x)| dx \\ &\leq \left( \int_a^x 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^x |v'(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (x-a)^{\frac{1}{2}} \|v'\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 = \int_a^b |v(x)|^2 dx \leq \int_a^b (x-a) \|v'\|_{0,\Omega}^2 dx = \frac{(b-a)^2}{2} \|v'\|_{0,\Omega}^2$$

de donde,

$$\|v'\|_{0,\Omega}^2 \geq \underbrace{\frac{2}{(b-a)^2}}_{\alpha > 0} \|v\|_{1,\Omega}^2$$

así, finaliza la prueba

$$\|v'\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha \|v\|_{1,\Omega}^2.$$

□

**Observación 3.** Sea  $|v|_{1,\Omega} = \|v'\|_{0,\Omega}$  se considera una norma en  $H_0^1(\Omega)$  siendo equivalente a la norma habitual.

**Definición 1.11.** Se dice que  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{R}$ , y un funcional sobre  $H$  es una aplicación (función)

$$F : H \rightarrow \mathbb{R}.$$

Este funcional es ***lineal*** si

$$F(\alpha u + v) = \alpha F(u) + F(v), \quad \forall u, v \in H, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Este funcional se dice **acotado** si existe  $m > 0$  tal que

$$|F(v)| \leq m\|v\|_H, \quad \forall v \in H.$$

**Definición 1.12.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Denominamos el dual de  $H$  al conjunto de todos los funcionales lineales y acotados definidos sobre  $H$ , denotamos por  $H'$  es decir

$$H' = \{F : H \rightarrow \mathbb{R} : F \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Sobre  $H'$  se definen las siguientes operaciones:

$$+ : F, G \in H' \Rightarrow (F + G)(v) = F(v) + G(v), \quad \forall v \in H$$

$$\bullet : F \in H', \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha F)(v) = \alpha F(v), \quad \forall v \in H$$

Se puede ver que  $(H', +, \bullet)$  es un espacio vectorial, cuyo elemento neutro para la adición es el funcional nulo,

$$\begin{aligned} \theta : H &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \theta(v) = 0 \end{aligned}$$

Además definamos,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : H' &\rightarrow \mathbb{R} \\ F &\mapsto \|F\|_{H'} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq \theta}} \frac{|F(v)|}{\|v\|_H} \end{aligned}$$

Se prueba que  $\|\cdot\|_{H'}$  es una norma sobre  $H'$  con lo cual  $(H', \|\cdot\|_{H'})$  es un espacio vectorial normado. Además, dado  $F \in H'$ , se tiene que

$$\|F(v)\| \leq \|F\|_{H'}\|v\|_H, \quad \forall v \in H$$

Así:

$$\frac{|F(v)|}{\|v\|_H} \leq \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq \theta}} \frac{|F(v)|}{\|v\|_H} = \|F\|_{H'}$$

**Teorema 1.3.** [ **Lax-Milgram** ] Se dice que  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  un es espacio de Hilbert sobre  $\mathbb{R}$  y sea  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal, acotada y elíptica con constantes  $M$  y  $\alpha$ , respectivamente. Entonces, para cada  $F \in H'$  existe un único  $u \in H$ , tal que



$$B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H \quad (1.11)$$

y

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|. \quad (1.12)$$

### 1.2.2. El Método de Galerkin

Sea un espacio arbitrario  $H$  de Hilbert,  $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal acotada y elíptica, y  $F$  es un funcional en  $H'$ . Entonces de acuerdo al Teorema 1.3, se deduce que existe un único  $u \in H$  tal que

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H. \quad (1.13)$$

El objetivo siguiente es presentar una técnica que nos facilite aproximar la solución dado en (1.13). Para este efecto, sea  $\{H_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  una secuencia de subespacios finitos de  $H$ , considerando el problema siguiente: Hallar  $u_h \in H_h$  tal que

$$B(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in H_h. \quad (1.14)$$

Entonces uno puede asumir que la dimensión del espacio  $H_h$  es  $h$ . Debido a esto se reduce el problema propuesto de dimensión infinita a dimensión finita, a esto se le denomina el *Método de Galerkin*. Cuyo objetivo, es elegir un  $H_h$  que cumpla la siguiente condición

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|u - u_h\|_H = 0. \quad (1.15)$$

A continuación mostraremos que (1.14) se convierte a un sistema de ecuaciones lineales. Es decir, dado  $\{e_1, e_2, \dots, e_h\}$  base de  $H_h$ . Entonces, existen escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$  tales que

$$u_h = \sum_{j=1}^h \alpha_j e_j.$$

Luego (1.14) se convierte en: Hallar  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h \in \mathbb{R}$  tales que

$$\sum_{j=1}^h \alpha_j B(e_j, v_h) = F(v_h) \quad v_h \in H_h$$

lo cual es equivalente a: Hallar  $\alpha_1, \dots, \alpha_h \in \mathbb{R}$  tal que

$$\sum_{j=1}^h \alpha_j B(e_j, e_i) = F(e_i) \quad v_h \in \{1, \dots, h\}. \quad (1.16)$$

Así, definiendo la matriz  $\mathbf{B} := (b_{ij})_{n \times n}$  y los vectores  $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_j)_{h \times 1}$  y  $\mathbf{F} := (f_i)_{h \times 1}$ , con

$$b_{ij} = B(e_j, e_i) \quad \text{y} \quad f_j := F(e_j),$$

La formulación (1.16) se reescribe como sigue: Hallar  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}. \quad (1.17)$$

Observamos que la elipticidad de  $B$  determina que (1.17) siempre conduce a una solución única. Llamaremos,  $\mathbf{B}$  matriz de rigidez, y  $\mathbf{F}$  vector de carga.

El anhelo es llegar a tener una cota superior del error que determina del método de Galerkin. La cual se obtiene entre la diferencia de la solución exacta y aproximada evaluadas en su respectiva norma. Para ello, vemos primero que de (1.13) y (1.14) se deduce que

$$B(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in H_h. \quad (1.18)$$

la cual se conoce como relación de ortogonalidad.

**Lema 1.3.** [ *Cea* ] Supongamos que la forma bilineal  $A(\cdot, \cdot)$  es acotada y  $H$ -elíptica considerando las constantes  $M, \alpha$  respectivamente. Sean  $u$  y  $u_h$  las únicas soluciones de los problemas

$$\begin{aligned} A(u, v) &= F(v) \quad \forall v \in H \\ A(u_h, v_h) &= F(v_h) \quad \forall v_h \in H_h \end{aligned}$$

Entonces

$$\|u - u_h\|_H \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_h \in H_h} \|u - v_h\|_H$$

**Demostración.** Por la  $H$ -elipticidad de  $A(\cdot, \cdot)$

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_H^2 &\leq A(u - u_h, u - u_h) \\ &= A(u - u_h, u - v_h) + A(u - u_h, v_h - u_h) \\ &= A(u - u_h, u - v_h) \\ &\leq M \|u - u_h\|_H \|u - v_h\|_H \quad \forall v_h \in H_h \end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración □

**Observación 4.** *El Lema anterior transforma el control del error de Galerkin en un problema de mejor aproximación.*

### 1.2.3. Espacio de elementos finitos conformes

Introducimos el espacio de elementos finitos conformes: **Elementos finitos de Nédélec** locales, ya que se requiere exactamente la continuidad de las componentes tangenciales en las interfaces de los elementos en cada triángulo  $T$  de la triangulación  $\mathcal{T}_h$ . Esto implica que debemos trabajar con un espacio incompleto de polinomios de grado  $k$ , es decir para un entero  $k \geq 1$ .

Consideremos los polinomios  $\tilde{\mathcal{P}}_k$  homogéneos de orden  $k$  en tres dimensiones y también el siguiente subespacio de  $\mathcal{P}_k^3$ :

$$R_k := \{\mathbf{p} \in \tilde{\mathcal{P}}_k^3 : \mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{x} \equiv 0, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)\},$$

y Así, definimos el espacio local de Nédélec.

$$\mathbb{N}_k(T) := \mathcal{P}_{k-1}(T) \oplus R_k(T).$$

**Ejemplo 1.3.** *Mostremos para  $k = 1$ ,  $R_1$ .*

Claramente para todos los polinomios homogéneos de grado uno que satisfacen  $\mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{x} = 0$  deben ser necesariamente de la forma:

$$\mathbf{p}(x) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{x}$$

Donde  $\boldsymbol{\alpha}$  es un vector arbitrario de  $\mathbb{R}^3$ . Luego la base para  $R_1$ , es de la forma:

$$\mathcal{P}_1 = (0, -x_2, x_3) \quad , \quad \mathcal{P}_2 = (x_3, 0, -x_1),$$

$$\mathcal{P}_3 = (-x_2, x_1, 0).$$

Así se cumple la condición  $\mathbf{p}(x) \cdot \mathbf{x} = 0$ .

Además, el espacio correspondiente de aproximación global de  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$  es el espacio de funciones que localmente pertenecen  $\mathbb{N}_k(T)$  y tienen componente tangencial continua a través de las caras de la triangulación  $\mathcal{T}_h$ . Se define así el conocido espacio de Nédélec:

$$\mathbb{N}_h := \{\mathbf{v}_h \in H(\mathbf{curl}, \Omega) : \mathbf{v}_h|_T \in \mathbb{N}_k \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Donde el espacio  $H(\mathbf{curl}, \Omega)$ , se define de la manera siguiente:

$$H(\mathbf{curl}, \Omega) := \{\boldsymbol{\theta} \in [L^2(\Omega)]^3 : \mathbf{curl} \boldsymbol{\theta} \in [L^2(\Omega)]^3\}.$$

y su norma es denotamos a  $\mathbf{Z} = \{\sigma \in H(\mathbf{curl}, \Omega) : \sigma \times \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma\}$ , cuya norma depende de la viscosidad  $\nu$  está dado de la manera siguiente manera:

$$\|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{Z}}^2 := \|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2 + \nu \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2.$$

---

## Capítulo 2

---

### *Análisis del error a priori para el problema modelo Brinkman*

---

---

---

---

#### 2.1 Análisis del problema Continuo

---

---

En este Capítulo introducimos el problema modelo Brinkman, derivamos y analizamos su formulación débil correspondiente en términos de vorticidad. En particular, discutimos existencia y unicidad de solución. Comenzamos introduciendo el problema modelo.

##### 2.1.1. Problema Modelo

Consideremos, el problema de Brinkman que modela el flujo en estado estacionario de un fluido viscoso incompresible dentro de un medio poroso, en un dominio poligonal o poliedral  $\Omega$  abierto acotado  $\mathbb{R}^3$  con frontera Lipschitz ( $\Gamma = \partial\Omega$ ), en términos de velocidad  $(\mathbf{u})$ , vorticidad  $(\boldsymbol{\omega})$  y presión  $(p)$ : Dada una fuerza externa  $\mathbf{f}$ , hallar  $(\mathbf{u}; \boldsymbol{\omega}; p)$ , tal que

gobernadas por las ecuaciones.

$$\begin{aligned}
\kappa^{-1}\mathbf{u} + \sqrt{\nu}\mathbf{curl}\,\boldsymbol{\omega} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega, \\
\boldsymbol{\omega} - \sqrt{\nu}\mathbf{curl}\,\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega, \\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{en } \Omega, \\
\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{u}_n && \text{sobre } \Gamma, \\
\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} &= \boldsymbol{\omega}_0 && \text{sobre } \Gamma,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  es la componente normal de la velocidad, dadas las constantes  $\nu > 0$  es la viscosidad cinématica del fluido y  $\kappa > 0$  es la permeabilidad de un medio poroso.

Por el bien de la estabilidad, vamos a trabajar con condiciones de contorno homogéneas para la velocidad normal y posteriormente para la vorticidad, es decir,  $\mathbf{n}_n = 0$  y  $\boldsymbol{\omega}_0 = 0$  sobre  $\Gamma$ . Sin embargo, estas restricciones no afectan a la generalidad de problema, con otros tipos de condiciones de contorno, como por ejemplo( ver [1]), tal que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}, \quad \text{y} \quad p = p_0 \quad \text{sobre } \Gamma. \tag{2.2}$$

Luego utilizando el siguiente resultado, que se demuestra en [15], lo cual es una herramienta que nos ayudará para la formulación variacional.

**Lema 2.1.** *Para todo  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$ , entonces  $\operatorname{div}(\mathbf{curl}\,\mathbf{v}) = 0$  en  $\Omega$  y  $(\mathbf{curl}\,\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0$  sobre  $\Gamma$ .*

### 2.1.2. Formulación Variacional

Multiplicamos la segunda ecuación del problema (2.1), por una función test adecuada  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{Z}$ . Entonces integramos por partes y usando las condiciones de frontera, tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} - \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{curl}\,\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\theta} + \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\theta} \rangle_{\Gamma} = 0,$$

imponiendo la condiciones de frontera se tiene:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} - \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\theta} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{Z}. \tag{2.3}$$

Despejando  $\mathbf{u}$  de la primera ecuación del problema modelo (2.1), se tiene

$$\mathbf{u} = \kappa \mathbf{f} - \sqrt{\nu} \kappa \mathbf{curl}\,\boldsymbol{\omega} - \kappa \nabla p, \tag{2.4}$$

luego reemplazamos  $\mathbf{u}$  en la ecuación (2.3), tal que

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} - \sqrt{\nu} \int_{\Omega} (\kappa \mathbf{f} - \sqrt{\nu} \kappa \operatorname{curl} \boldsymbol{\omega} - \kappa \nabla p) \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} = 0$$

multiplicando por  $\kappa^{-1}$ , se tiene la siguiente ecuación

$$\kappa^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} + \nu \int_{\Omega} \operatorname{curl} \boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} + \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \nabla p \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} = \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta}.$$

Luego aplicando integración por partes en la variable de la presión, se tiene

$$\begin{aligned} & \kappa^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} + \nu \int_{\Omega} \operatorname{curl} \boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} - \sqrt{\nu} \int_{\Omega} p \operatorname{div} (\operatorname{curl} \boldsymbol{\theta}) - \langle (\operatorname{curl} \boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{\Gamma} \\ &= \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ahora usando el Lema 2.1, se elimina el término de presión y reescribir (2.5) como una formulación variacional del problema de Brinkman expresada solo en términos de la vorticidad: Hallar  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{Z}$  tal que

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{Z}. \quad (2.6)$$

Donde la forma bilineal  $\mathcal{A} : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$\mathcal{A}((\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\theta})) := \kappa^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} + \nu \int_{\Omega} \operatorname{curl} \boldsymbol{\omega} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{Z}.$$

El funcional lineal  $\mathbf{F} : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) := \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{\theta} \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{Z}.$$

Luego multiplicando por  $\nabla q$  la primera ecuación del sistema (2.1). Además definimos el espacio  $L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0\}$  y  $\|H^1(\Omega)\| := \{\|q\|^2 + \|\nabla q\|^2\}^2$ , imponiendo de manera natural sobre el espacio para la estabilidad del problema, entonces  $q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2$  y por comodidad de escritura denotamos  $H^1(\Omega) \cap L_0^2 := \mathbf{Q}$ .

$$\kappa^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q + \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \operatorname{curl} \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla q + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla q,$$

ahora, aplicando integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned} & -\kappa^{-1} \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} + \kappa^{-1} \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{\Gamma} - \sqrt{\nu} \int_{\Omega} q \operatorname{div} (\operatorname{curl} \boldsymbol{\omega}) - \sqrt{\nu} \langle \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}, q \rangle_{\Gamma} \\ & + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla q, \end{aligned}$$

luego, sabemos que del problema  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ , aplicando las condiciones de frontera cero sobre  $\Gamma$  y también que  $\operatorname{div}(\mathbf{curl}) = 0$ , por lo tanto se tiene la siguiente formulación variacional para la presión: Hallar  $q \in Q$

$$B(p, q) = F(q) \quad \forall q \in Q. \quad (2.7)$$

Donde la forma bilineal  $B : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$B(p, q) := \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla q \quad \forall q \in Q.$$

El funcional lineal  $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$F(q) := \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla q \quad \forall q \in Q.$$

### 2.1.3. Existencia y Unicidad de Solución

En esta subsección, vamos a demostrar la existencia y unicidad del problema modelo Brinkman.

Es claro que los funcionales y las formas bilineales son lineales. Empezaremos estableciendo la continuidad del funcional  $\mathbf{F}(\cdot)$  y la forma bilineal  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ , para la formulación variacional (2.6).

El funcional  $\mathbf{F}(\cdot)$  es continuo. Aplicando Cauchy-Schwarz y definición por normas, se tiene que

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})| &\leq \sqrt{\nu} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega} \\ &\leq \underbrace{\sqrt{\nu} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}_M \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{Z},\Omega} \\ &\leq M \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{Z}} \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Por lo tanto se dice que el funcional es continuo o acotado, tal que

$$|\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta})| \leq M \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{Z}} \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{Z}.$$

La forma bilineal  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  es acotada. En efecto; aplicando la definición de valor absoluto y las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Hölder, se sabe que



$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}(\cdot, \cdot)| &= \left| \kappa^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} + \nu \int_{\Omega} \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\theta} \right| \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{Z} \\
&\leq \left| \kappa^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta} \right| + \left| \nu \int_{\Omega} \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\theta} \right| \\
&\leq \kappa^{-1} \|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega} \|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega} + \sqrt{\nu} \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega} \sqrt{\nu} \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega} \\
&\leq \kappa^{-1} \{ (\|\boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}^2 + \nu \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} (\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2 + \nu \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2} \} \\
&= \kappa^{-1} (\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{Z}}^2)^{1/2} (\|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{Z}}^2)^{1/2} \\
&= C_1 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{Z}} \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{Z}}
\end{aligned}$$

por lo tanto, la forma bilineal  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  se dice que es acotada, tal que

$$|\mathcal{A}(\cdot, \cdot)| \leq C_1 \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{Z}} \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{Z}} \quad \forall \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{Z}. \quad (2.8)$$

La forma bilineal  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  es  $\mathbf{Z}$ -elíptica. En efecto, aplicando definición de norma donde  $\kappa, \nu > 0$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{k} \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{\theta}^2 + \nu \int_{\Omega} \mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}^2 \right) \\
&\geq \min\left\{\frac{1}{k}, 1\right\} (\|\boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2 + \nu \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}\|_{0,\Omega}^2) \\
&= \alpha \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{Z}}^2,
\end{aligned}$$

donde  $\alpha = \min\{\frac{1}{k}, 1\}$ . Por lo tanto, la forma bilineal  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ , se dice  $\mathbf{Z}$ -elíptica

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{Z}}^2 \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in \mathbf{Z}. \quad (2.9)$$

Así, de la ecuación (2.8) y (2.9) se cumplen las hipótesis del Teorema 1.3, entonces se garantiza la unicidad de la ecuación (2.6): Hallar  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{Z}$ , además

$$\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{Z}} \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}.$$

Por otro lado, empezamos estableciendo la continuidad del funcional  $F(\cdot)$  y la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$ , para la formulación variacional (2.7).

El funcional  $F(\cdot)$  es continuo o acotado. En efecto aplicando Cauchy-Schwarz, además definición de normas se tiene que

$$\begin{aligned}
|F(q)| &= \left| \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla q \right| \\
&\leq \sqrt{\nu} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \|q\|_{0,\Omega} \\
&\leq \underbrace{\sqrt{\nu} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}}_M \|q\|_{Q,\Omega} \\
&\leq M \|q\|_Q \quad \forall q \in Q,
\end{aligned}$$

por lo tanto, se dice que el funcional  $F(\cdot)$  es acotado, tal que

$$|F(q)| \leq M \|q\|_Q \quad \forall q \in Q.$$

La forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  es acotada. En efecto, aplicando la definición de normas, valor absoluto y la desigualdad de Cauchy- Schwarz

$$\begin{aligned}
|B(p, q)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla p \nabla q \right| \\
&= \|\nabla p\|_{0,\Omega} \|\nabla q\|_{0,\Omega} \\
&\leq \|p\|_Q \|q\|_Q \quad \forall q \in Q
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  es acotada, tal que

$$|B(p, q)| \leq C \|p\|_Q \|q\|_Q \quad \forall p, q \in Q. \quad (2.10)$$

Ahora veamos que la forma bilineal  $B(\cdot, \cdot)$  es  $Q$ -elíptica

$$\begin{aligned}
B(p, p) &= \int_{\Omega} \nabla p^2 \\
&= \|\nabla p\|_{0,\Omega}^2,
\end{aligned}$$

por el teorema de Poincaré generalizado, se tiene

$$B(p, p) \geq \alpha_2 \|p\|_Q^2. \quad (2.11)$$

Así, de las ecuaciones (2.10) y (2.11) se cumplen los supuestos del Teorema Lax Milgram, entonces se dice que existe una única solución: Hallar  $p \in Q$ , además

$$\|p\|_Q \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}.$$

Una vez analizado el problema a nivel continuo, A continuación analizaremos el problema discreto, para ello empezaremos definiendo el esquema de Galerkin.

---

## 2.2 Esquema de Galerkin

---

En esta sección introducimos y analizamos el esquema de Galerkin asociado al problema (2.6) y (2.7) bajo espacios discretos adecuados, analizamos existencia, unicidad de solución.

### 2.2.1. Problema discreto

Consideremos  $\{\mathcal{T}_h(\Omega)\}_{h>0}$  un conjunto regular de fraccionamiento de la región poligonal o poliédrica  $\bar{\Omega}$ , por triángulos (T) o tetrahedros (T) de diámetro  $h_T$  y definimos  $h := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$ . Una partición  $\{\mathcal{T}_h(\Omega)\}_{h>0}$  se dice regular si existe  $c > 0$ , tal que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq c, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \forall h > 0$$

donde  $\rho_T > 0$  es el diámetro de la circunferencia o esfera más grande contenida en T . En lo que sigue, dado un entero  $k \geq 1$  y un subespacio de polinomios  $S \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{P}_k(S)$  de grado menor o igual a  $k$ , definido en  $S$ .

Además, para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , introducimos el siguiente espacio local de Nédélec:

$$\mathbb{N}_k(T) := \mathcal{P}_{k-1}^3 \oplus R_k(T).$$

Ahora, definimos los siguientes subespacios de elementos finitos, como se muestra en [6]:

$$\mathbf{Z}_h := \{\boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{Z} : \boldsymbol{\theta}_h|_T \in \mathbb{N}_k(T) \quad \text{para todo } T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}, \quad (2.12)$$

$$\mathbb{Q}_h := \{q_h \in \mathbb{Q} : q_h|_T \in \mathcal{P}_k(T) \quad \text{para todo } T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}. \quad (2.13)$$

Entonces, mediante a la discretización de Galerkin con respecto a la formulación (2.6) se dice lo siguiente: Hallar  $\boldsymbol{\omega}_h \in \mathbf{Z}_h$  tal que

$$\kappa^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \boldsymbol{\theta}_h + \nu \int_{\Omega} \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}_h = \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}_h \quad \forall \boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{Z}_h.$$

Se obtuvo haciendo los mismos pasos del nivel continuo, usando el Lema 2.1, se elimina el término de presión se tiene una formulación variacional discreta del problema Brinkman expresada solo en términos de la vorticidad: Hallar  $\boldsymbol{\omega}_h \in \mathbf{Z}_h$  tal que

---

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\omega}_h, \boldsymbol{\theta}_h) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_h) \quad \forall \boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{Z}_h. \quad (2.14)$$

Donde  $\mathcal{A} : \mathbf{Z}_h \times \mathbf{Z}_h \rightarrow \mathbb{R}$ , es una forma bilineal, y se define

$$\mathcal{A}((\boldsymbol{\omega}_h, \boldsymbol{\theta}_h)) := \kappa^{-1} \int_{\Omega} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \boldsymbol{\theta}_h + \nu \int_{\Omega} \mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}_h \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}_h \quad \forall \boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{Z}_h.$$

El funcional lineal  $\mathbf{F} : \mathbf{Z}_h \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_h) := \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{curl} \boldsymbol{\theta}_h \quad \forall \boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{Z}_h.$$

Haciendo las mismas cuentas que en el nivel continuo, además sabiendo que de problema modelo  $\text{div} \mathbf{u} = 0$ , aplicando la condiciones de frontera considerando cero sobre  $\Gamma$  y también se sabe que  $\text{div}(\mathbf{curl}) = 0$ , por lo tanto, se tiene la siguiente formulación variacional discreta para la presión: Hallar  $q_h \in \mathbf{Q}_h$

$$B(p_h, q_h) = F(q_h) \quad \forall q_h \in \mathbf{Q}_h. \quad (2.15)$$

Donde la forma bilineal  $B : \mathbf{Q}_h \times \mathbf{Q}_h \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$B((p_h, q_h)) := \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \nabla q_h \quad \forall q_h \in \mathbf{Q}_h.$$

El funcional lineal  $F : \mathbf{Q}_h \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$F(q_h) := \sqrt{\nu} \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla q_h \quad \forall q_h \in \mathbf{Q}_h.$$

### 2.2.2. Existencia unicidad de solución

Una gran ventaja de aplicar el Teorema de Lax-Milgram, para decir que el problema exista y es único a nivel continuo, es que a nivel discreto se heredan sus propiedades.

Entonces se dice que el problema discreto (2.14) tiene una única solución  $\boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{Z}_h$ , y existe una constante positiva  $C > 0$  tal que se cumple el siguiente resultado de dependencia continua

$$\|\boldsymbol{\theta}_h\| \leq C \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}.$$

Como ya se menciono que el Teorema de Lax-Milgram, se heredan sus propiedades del nivel continuo al discreto. Entonces se dice que el problema discreto (2.15) tiene una única solución  $p_h \in \mathbf{Q}_h$ , y existe una constante positiva  $\hat{C} > 0$  tal que se cumple el siguiente resultado de dependencia continua:

$$\|p_h\| \leq \hat{C} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}.$$

Ahora, como ya se hizo el estudio para la existencia y unicidad tanto para el problema continuo como discreto, entonces estudiaremos el error para cada variable. A continuación se enuncia el siguiente resultado, se desprende del Lema 1.3 para la vorticidad y presión.

**Lema 2.2.** [*Cea para la vorticidad*] Si  $\boldsymbol{\omega}$  y  $\boldsymbol{\omega}_h$  son soluciones de  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{Z}_h$  respectivamente, entonces dado la constante  $\bar{C} > 0$  independiente de  $h$  y  $\nu$ , es decir

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h\|_{\mathbf{Z}} \leq \bar{C} \inf_{\boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{Z}_h} \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_h\|_{\mathbf{Z}}.$$

**Lema 2.3.** [*Cea para la presión*] Si  $p$  y  $p_h$  son soluciones de  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{Q}_h$  respectivamente, entonces dado la constante  $\bar{C} > 0$  independiente de  $h$  y  $\nu$  tal que

$$\|p - p_h\|_{\mathbf{Q}} \leq \bar{C} \inf_{q_h \in \mathbf{Q}_h} \|p - q_h\|_{\mathbf{Q}}.$$

Bajo estos resultados estamos listos para el análisis de error.

---

## 2.3 Análisis de error

---

En la presente sección se estudiará el error que permita probar la convergencia del método. Se estudiará estimaciones de error a priori que prueban que el método de elementos finitos suministra la mejor aproximación posible de solución. Esta estimación implica que el error de la aproximación de elementos finitos puede ser hecho arbitrariamente pequeño refinando la malla, suponiendo que dicha solución sea regular que permita que el error de interpolación tienda a cero cuando la malla se refine. Probaremos la estimación de error para la vorticidad y la presión.

Para ello enunciaremos el siguiente lema para la proyección para el espacio  $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$  para estimar la vorticidad, de la manera siguiente:

Para mostrar la estimación de error para la vorticidad, en primer lugar enunciaremos el siguiente lema, para un mayor detalle ver [1].

**Lema 2.4.** Sea  $\mathbb{P}_{h,0}$  la proyección de  $L^2(\Omega)$  sobre  $\mathbf{Q}_h := \{q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_T \in \mathcal{P}_0 \forall T \in \mathcal{T}_h\}$  entonces:

$$\mathbf{curl}(\mathcal{R}_h(\boldsymbol{\omega})) = \mathbb{P}_h(\mathbf{curl}(\boldsymbol{\omega})).$$


---

Además, introducimos  $s > 1/2$ , para el operador interpolante global de Nédélec  $\mathcal{R}_h : H^s(\mathbf{curl}; \Omega) \cap \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_h$  (por ejemplo ver [1]). Que satisface para la siguiente aproximación de la vorticidad.

**Lema 2.5.** *Para todo  $\boldsymbol{\omega} \in H^s(\mathbf{curl}; \Omega)$ ,  $s \in (1/2, k]$  existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|\boldsymbol{\omega} - \mathcal{R}_h \boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{Z}} \leq Ch^s \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^s(\mathbf{curl}; \Omega)}.$$

**Demostración.** En efecto: Se demostrará utilizando el Lema 2.4 y definición de normas:

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega} - \mathcal{R}_h(\boldsymbol{\omega})\|_{\mathbf{Z}}^2 &= \|\boldsymbol{\omega} - \mathcal{R}(\boldsymbol{\omega})\|_{0,\Omega}^2 + \nu \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{curl}(\mathcal{R}_h(\boldsymbol{\omega}))\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{ \|\boldsymbol{\omega} - \mathcal{R}_h(\boldsymbol{\omega})\|_{0,T}^2 + \nu \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\omega} - \mathbf{curl}(\mathcal{R}_h(\boldsymbol{\omega}))\|_{0,T}^2 \} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{ \|\boldsymbol{\omega} - \mathcal{R}_h(\boldsymbol{\omega})\|_{0,T}^2 + \nu \|\mathbf{curl} \boldsymbol{\omega} - \mathbb{P}_h(\mathbf{curl}(\boldsymbol{\omega}))\|_{0,T}^2 \} \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{ C' h^s |\boldsymbol{\omega}|_{s,T}^2 + \nu C' h^s |\mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}|_{s,T}^2 \} \\ &\leq Ch^s (|\boldsymbol{\omega}|_{s,\Omega}^2 + |\mathbf{curl} \boldsymbol{\omega}|_{s,\Omega}^2) \\ &= Ch^s \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^s(\mathbf{curl}, \Omega)}^2 \end{aligned}$$

por lo tanto, se concluye la demostración.

$$\|\boldsymbol{\omega} - \mathcal{R}_h \boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{Z}} \leq Ch^s \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^s(\mathbf{curl}; \Omega)}.$$

□

Entonces, bajo estos resultados obtenidos, enunciaremos el siguiente teorema que se obtendrá la convergencia para la vorticidad.

**Teorema 2.1. [Convergencia de la vorticidad]** *Sea  $k \geq 1$  y  $\mathbf{Z}_h$  dado en (2.12), donde  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{Z}$  y  $\boldsymbol{\omega}_h \in \mathbf{Z}_h$  son soluciones únicas de los problema continuo y discreto (2.6) y (2.14), respectivamente. Asumiendo que  $\boldsymbol{\omega} \in H^s(\mathbf{curl}; \Omega)$ , para algún  $s \in (1/2, k]$ . Entonces, existe  $C > 0$  independiente de  $h$  y  $\nu$  tal que*

$$\|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h\|_{\mathbf{Z}} \leq Ch^s \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^s(\mathbf{curl}; \Omega)}.$$

**Demostración.** En efecto: Por el Lema(2.2) se sabe que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h\|_{\mathbf{Z}} &\leq \bar{C} \inf_{\boldsymbol{\theta}_h \in \mathbf{Z}_h} \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\theta}_h\|_{\mathbf{Z}} \\ &\leq \bar{C} \|\boldsymbol{\omega} - \mathcal{R}_h \boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{Z}} \quad \text{por el Lema 2.5} \\ &\leq Ch^s \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^s(\mathbf{curl}; \Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene el orden de convergencia para la vorticidad.  $\square$

Ahora, haremos el análisis para la presión. Entonces, introducimos  $s > 1/2$ , sea  $\Pi_h : H^{1+s}(\Omega) \cap Q \rightarrow Q_h$  la interpolación de Lagrange, que satisface la siguiente estimación de error para la presión:

**Lema 2.6.** *Para todo  $q \in H^{1+s}(\Omega)$ ,  $s \in (1/2, k]$  existe  $M_1 > 0$  independiente de  $h$ , tal que*

$$\|q - \Pi_h q\|_Q \leq M_1 h^s \|q\|_{H^{1+s}(\Omega)}$$

**Demostración.** Como  $q \in H^{s+1}(\Omega)$ , entonces por el interpolante de Lagrange, se cumple

$$\|q - \Pi_h q\|_Q \leq M_1 h^s |q|_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

$\square$

Entonces, bajo estos resultados obtenidos, enunciaremos el siguiente teorema que se obtendrá la convergencia para la presión.

**Teorema 2.2.** [*Convergencia de la Presión*] Si  $k \geq 1$  y  $Q_h$  dado en (2.13), donde  $p \in Q$  y  $p_h \in Q_h$  son soluciones únicas de los problema continuo y discreto (2.7) y (2.15), respectivamente. Asumiendo que  $p \in H^{s+1}(\Omega)$ , para algún  $s \in (1/2, k]$ . Entonces, existe  $C > 0$  independiente de  $h$  tal que

$$\|p - p_h\|_Q \leq C h^s \|p\|_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

**Demostración.** En efecto: por el Lema(2.3) se sabe que

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_{\mathbf{Z}} &\leq \bar{C} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q \\ &\leq \bar{C} \|p - \Pi_h p\|_{Q_h} \quad \text{por el Lema 2.6} \\ &\leq C h^s \|p\|_{H^{s+1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene el orden de convergencia para la presión, es decir

$$\|p - p_h\|_{\mathbf{Z}} \leq C h^s \|p\|_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

$\square$

---

## 2.4 Recuperando el campo de velocidad

---

La solución de (2.6) entrega la solución para la vorticidad, mientras que la presión puede obtenerse de (2.7). Ahora, el campo de velocidad ( $\mathbf{u}$ ) se obtiene mediante la técnica de post-proceso del problema modelo (2.1). Si  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{Z}$  y  $p \in Q$  son las soluciones únicas de (2.6) y (2.7), respectivamente. Entonces, despejando la variable  $\mathbf{u}$  de la ecuación (2.4), tenemos lo siguiente.

$$\mathbf{u} = \kappa(\mathbf{f} - \sqrt{\nu}\mathbf{curl}\boldsymbol{\omega} - \nabla p) \quad (2.16)$$

Al nivel discreto, se hace la misma estrategia para calcular la velocidad mediante una post-proceso en términos de las variables restantes. Si  $\boldsymbol{\omega}_h \in \mathbf{Z}_h$ , y  $p_h \in Q_h$  son las soluciones únicas de (2.14) y (2.15), respectivamente. A continuación, definimos a  $\mathbf{u}_h$  como:

$$\mathbf{u}_h = \kappa(\mathcal{P}_h\mathbf{f} - \sqrt{\nu}\mathbf{curl}\boldsymbol{\omega}_h - \nabla p_h) \quad (2.17)$$

La velocidad se aproxima mediante,  $\mathcal{O}_h : [L^2(\Omega)]^3 \rightarrow J_h = \{\mathbf{v}_h \in [L^2(\Omega)]^3 : \mathbf{v}|_T \in [P_{k-1}(T)]^3 \quad T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}$  que es la proyección ortogonal de  $L^2$ . Entonces para todo  $s \in (0, k]$ , se sabe que

$$\|\mathbf{v} - \mathcal{P}_h\mathbf{v}\|_{0,\Omega} \leq M_2 h^s \|\mathbf{v}\|_{s,\Omega}. \quad (2.18)$$

Luego, bajo estos resultados la aproximación para la velocidad se establece en el siguiente teorema.

**Teorema 2.3.** [*Convergencia de la velocidad*] Si  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{Z}$  y  $p \in Q$  las soluciones únicas de (2.6) y (2.7), respectivamente, sea  $\boldsymbol{\omega}_h \in \mathbf{Z}_h$  y  $p_h \in Q_h$  las soluciones únicas de (2.14) y (2.15), respectivamente. Supongamos que  $\boldsymbol{\omega}$  y  $p$  pertenecen al espacio del nivel continuo y  $\mathbf{f} \in H^s(\Omega)^3$ , para algunos  $s \in (1/2; k]$ . Entonces, existe  $M_3 > 0$  independiente de  $h$  y  $\nu$  tal que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| \leq M_3 h^s (\|\mathbf{f}\|_{H^s(\Omega)} + \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^s(\mathbf{curl};\Omega)} + \|p\|_{H^{1+s}(\Omega)}).$$

**Demostración.** De (2.16) y (2.17), se sigue que

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_h = \kappa((\mathbf{f} - \mathcal{P}_h\mathbf{f}) - \sqrt{\nu}\mathbf{curl}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h) - \nabla(p - p_h))$$


---



aplicando norma  $L^2$  y el Teorema 2.2 y 2.3, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} &= \|k((\mathbf{f} - \mathcal{P}_h \mathbf{f}) - \sqrt{\mu} \mathbf{curl}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h) - \nabla(p - p_h))\|_{0,\Omega} \text{ desigualdad triangular} \\
&\leq k(\|\mathbf{f} - \mathcal{P}_h \mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\sqrt{\mu} \mathbf{curl}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h)\|_{0,\Omega} + \|\nabla(p - p_h)\|_{0,\Omega}) \\
&\leq k(\|\mathbf{f} - \mathcal{P}_h \mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h)\|_{\mathbf{Z}} + \|(p - p_h)\|_{\mathbf{Q}}) \\
&\leq k(ch^s \|\mathbf{f}\|_{s,\Omega} + ch^s \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{curl}, \Omega)} + ch^s \|p\|_{\mathbf{H}^{1+s}(\Omega)})
\end{aligned}$$

Así, se concluye el orden de convergencia para el campo de velocidad para la constante determina por  $M_3$ . □

---

## Capítulo 3

---

### *Resultados Numéricos*

---

---

En esta sección presentamos resultados numéricos, que corroboren el método de elementos finitos. Nuestra implementación está basada en un código *FreeFem++* (ver [16]). En conjunto con el solver de resolución lineal UMFPACK (ver [12]).

Definimos  $(\boldsymbol{\omega}, p) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$  de (2.6) y (2.7) además,  $(\boldsymbol{\omega}_h, p_h) \in \mathbf{Z}_h \times \mathbf{Q}_h$ , son soluciones de (2.14) y (2.15), respectivamente, y definimos los errores individuales como:

$$e(\boldsymbol{\omega}) = \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h\|_{\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)}, \quad e(p) = \|p - p_h\|_{\mathbf{Q}}, \quad e(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega}.$$

Por otra parte, definimos las tasas experimentales de convergencia como

$$r(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\log(e(\boldsymbol{\omega})/\hat{e}(\boldsymbol{\omega}))}{[\log(h/h')]}, \quad r(p) = \frac{\log(e(p)/\hat{e}(p))}{[\log(h/h')]}, \quad r(\mathbf{u}) = \frac{\log(e(\mathbf{u})/\hat{e}(\mathbf{u}))}{[\log(h/h')]},$$

donde  $h$  y  $h'$  son dos mallas consecutivas y  $e$  y  $\hat{e}$  son los errores calculados. A continuación consideremos ejemplos que sustentan la base teórica.

#### **Ejemplo 3.1.**

Consideremos el dominio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \times (-1, 1)$  en tres dimensiones, con coeficientes  $\kappa = 50$  y  $\nu = 0,01$ .

Tomando datos adecuados para  $\mathbf{f}$ , de tal forma que la solución exacta del problema (2.1) este dada por las funciones:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \text{sen}(\pi x) \cos(\pi y) \cos(\pi z) \\ -2 \cos(\pi x) \text{sen}(\pi y) \cos(\pi z) \\ \cos(\pi x) \cos(\pi y) \text{sen}(\pi z) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 3\pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi z) \\ 0 \\ -3\pi \sin(\pi x) \sin(\pi y) \cos(\pi z) \end{pmatrix}$$

y

$$p = x^3 - y^3 - z^3$$

Satisfaciendo las condiciones del problema (2.1) en todo la frontera  $\Gamma$ .

Usando la técnica del análisis numérico en base de elementos finitos para aproximar la vorticidad y presión, mediante elementos finitos de Nédélec de orden  $k = 1$  para la vorticidad y polinomios continuos a trozos para la presión. Luego, mediante un post proceso si obtiene la velocidad. A continuación en la figura 3.1, se presentan gráficas de soluciones exactas y aproximadas.

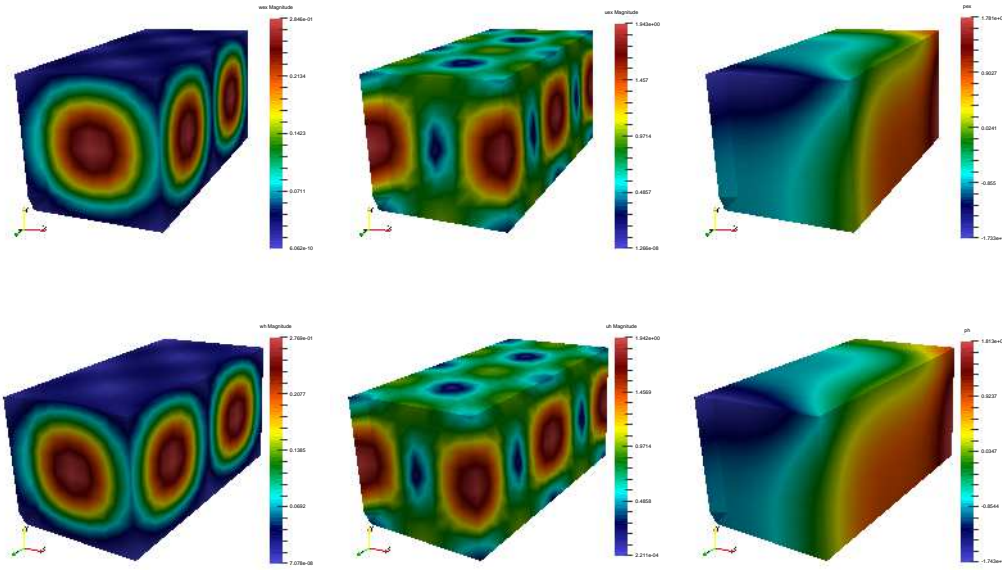


Figura 3.1: En la primera fila se muestra la función exacta de la velocidad, vorticidad y presión y en la segunda fila se muestra la función aproximada velocidad, vorticidad y presión, respectivamente.

**TABLA 1:** Test de convergencia en una secuencia de triangulaciones uniformemente refinadas en 3D, para  $k = 1$ .

$h$	$e(\omega)$	$r(\omega)$	$e(p)$	$r(p)$	$e(u)$	$r(u)$
0.707107	0.123407	0.000000	1.139124	0.000000	0.649714	0.000000
0.353553	0.064867	0.927860	0.596566	0.933172	0.336266	0.950202
0.176777	0.033331	0.960614	0.303693	0.974069	0.169601	0.987461
0.101015	0.019213	0.984462	0.174673	0.988355	0.097105	0.996503

### Ejemplo 3.2.

Consideremos el dominio  $\Omega = (-1, 1)^2$  en dos dimensiones, los coeficientes  $\kappa = 100$  y  $\nu = 0,1$ , considerando  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  en toda la frontera  $\Gamma$ .

Tomando datos adecuados para  $\mathbf{f}$ , de tal forma que la solución exacta del problema (2.1) este dada por las funciones:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \pi \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y) \\ -\pi \sin(2\pi x) \sin^2(\pi y) \end{pmatrix}$$

satisfaciendo,  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  en  $\Gamma$ , y la vorticidad

$$\omega = 2\sqrt{\nu}\pi^2(\sin(\pi x))^2[4\sin^2(\pi y) - 1] - \sin(\pi y))^2$$

luego, considerando la presión

$$p = x^4 - y^4.$$

Mediante la técnica numérica en base de elementos finitos para aproximar la vorticidad y presión, mediante elementos finitos de Nédélec de orden  $k = 1$  para la vorticidad y polinomios continuos a trozos para la presión. Luego, mediante un post proceso si obtiene la velocidad. A continuación en la figura 3.2, se presentan gráficas de soluciones exactas y aproximadas.

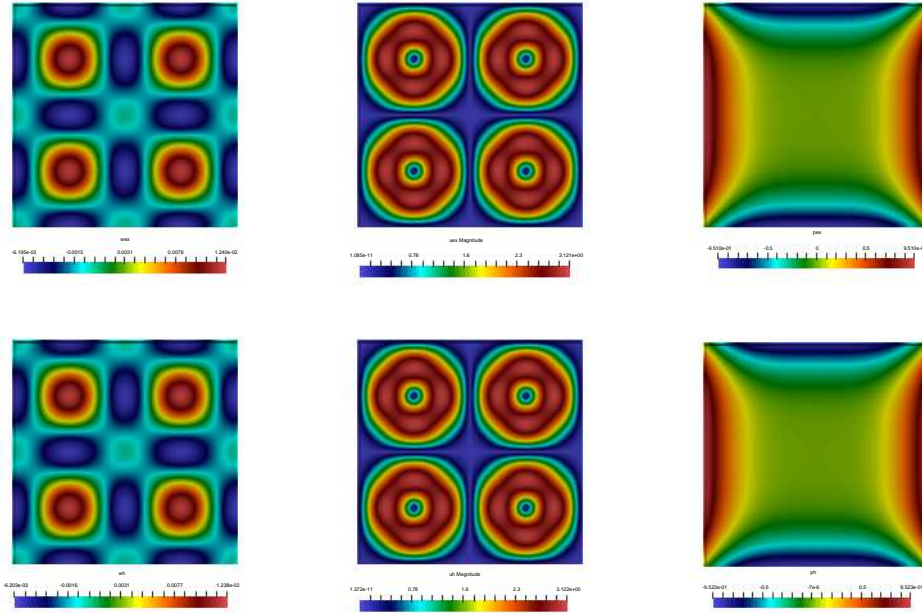


Figura 3.2: En la primera fila se muestra la función exacta de la velocidad, vorticidad y presión y en la segunda fila se muestra la función aproximada velocidad, vorticidad y presión, respectivamente.

**TABLA 2:** Test de convergencia en una secuencia de triangulaciones uniformemente refinadas, para  $k = 1$ .

$h$	$e(\omega)$	$r(\omega)$	$e(p)$	$r(p)$	$e(\mathbf{u})$	$r(\mathbf{u})$
1.414214	0.011495	0.000000	3.228957	0.000000	5.656759	0.000000
0.707107	0.004882	1.235510	2.035885	0.665413	2.661345	1.087820
0.353553	0.002231	1.129840	1.075556	0.920573	1.720772	0.629099
0.176777	0.000610	1.871130	0.545217	0.980179	0.875904	0.974212
0.088388	0.000259	1.235348	0.273548	0.995040	0.439923	0.993523
0.044194	0.000126	1.035878	0.136891	0.998760	0.220209	0.998378

---

## *Conclusiones*

---

- Gracias a la teoría de Lax-Milgram se obtuvo la existencia y unicidad, para el problema Brinkman, formulado en términos de vorticidad y presión a nivel continuo y discreto.
- La gran ventaja del método es que las propiedades del nivel continuo se heredan al nivel discreto.
- Se recuperó el campo de velocidad mediante la técnica del post-proceso.
- Se obtuvo una estimación de error a priori de la vorticidad, velocidad y presión.
- Se obtuvieron resultados numéricos mediante el Software Freefem, confirmando la base teórica del método.

---

## *Sugerencias*

---

Se surgiré revisar que:

- Las ecuaciones de Brinkman también es estudiada par la teoría de Babuška-Brezzi, donde se hace un estudio de análisis a priori y a posteriori. (Ver [5]).
- Las ecuaciones de Brinkman también son estudiadas en términos de velocidad, vorticidad y presión (ver [7]), en este artículo estudiaron una formulación aumentada.
- Las ecuaciones de Brinkman también son formuladas en términos de pseudo-stress (ver [14]).
- En el artículo (ver [6]), se hace un estudio de la ecuaciones de Brinkman formulado en términos de vorticidad, velocidad y presión, nos muestran un previo análisis con con condicione de frontera Dirichlet es decir  $\mathbf{u} = 0$ , se recomienda revisar ya que es de gran importancia para la investigación.

---

## Bibliografía

---

- [1] A. ALONSO AND VALLI, *An optimal domain decomposition preconditioner for low-frequency time harmonic Maxwell equations*. Math. Comp **68**, 607- 631, (1999).
- [2] M. ÁLVARES, G.N. GATICA AND R. RUIZ-BAIER, *A vorticity-based fully-mixed formulation for the 3D Brinkman-Darcy problem*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., **307** 68-95(2016).
- [3] K. AMOURA, M. AZAÏEZ, C. BERNARDI, N. CHORFI AND S. SAADI, *Spectral element discretization of the vorticity, velocity and pressure formulation of the Navier-Stokes problem*. Calcolo **20**(6), 627 - 648, (2007).
- [4] V. ANAYA, D. MORA, C. REALES AND R. RUIZ-BAIER, *Stabilidad mixed approximation of axisymmetric Brinkman flows*. ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **49**, 855-874,(2015).
- [5] V. ANAYA, D. MORA, R. OYARZÚA. AND R. RUIZ-BAIER, *A priori and posteriori error analysis for a mixed scheme for the Brinkman problema*. Numer. Math., **133**, 781-817,(2016).
- [6] V. ANAYA, D. MORA, AND R. RUIZ-BAIER, *Pure vorticity formulation and Galerkin discretization for the Brinkman equations*. IMA Journal of Numerical Analysis, DOI: 10.1093/imanum/drw056 (2017).
- [7] V. ANAYA, G. N. GATICA, D. MORA AND R. RUIZ-BAIER, *An augmented velocity-vorticity-pressure formulation for the Brinkman equations*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, **79**, 109-137,(2015).
- [8] J. H. BRAMBLE AND S. R. HILBERT, *Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation*, SIAM J. Numer. Anal., **7**, 113-124,(1970).



- 
- [9] H. BRINKMAN, *A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles* Applied Scientific Research, A1, pp. 27-34, (1947).
  - [10] H. BRINKMAN, *On the permeability of media consisting of closely packed porous particles* Applied Scientific Research, A1, pp. 81-86, (1947).
  - [11] R. BUSTINZA, G. N. GATICA, AND M. GONZÁLEZ, *A mixed finite element method for the generalized Stokes problem* Int. J. Numer. Meth. Fluids., **49**, 877-903, (2005).
  - [12] T. DAVIS, *Algorithm 832: UMFPACK V4.3 - an unsymmetric-pattern mul-tifrontal method*. ACM Transactions on Mathematical Software, **30**, pp. 196-199, (2004.).
  - [13] G. N. GATICA, *Introducción al Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*. Editorial Recerté, Barcelona. ESPAÑA 2014
  - [14] G. N. GATICA, L. F. GATICA AND A. MÁRQUEZ, *Analysis of a pseudostress-based mixed finite element method for the Brinkman model of porous media flow*. DOI: 10.1007/s00211-013-0577-x.
  - [15] V. GIRAULT AND A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Theory and Algorithms. Springer-Verlag, Mathematics Subject Classification (1980).
  - [16] F. HECHT, *New development in FreeFem++*. Journal of Numerical Mathematics., **32**, 3-4, pp. 251-256, (2012).
  - [17] K. H. KARLSEN, AND T. K. KARPER, *A convergent mixed method for the Stokes approximation of viscous compressible flow* IMA J. Numer. Anal., **32**(3), 725-764, (2012).
  - [18] P. MONK, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford Clarendon Press, 2003.
  - [19] P. VASSILEVSKI AND U. VILLA, *A mixed fomulation for the Brinkman problem*. SIAM.Numer. Anal., **52**, 258-281, (2014).
  - [20] ZHANGXIN CHEN, *Finite Element Methods and Their Applications*. Springer, Texas, USA (2005).
-