UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Caos de un sistema dinámico a través de conjugaciones topológicas con un sistema dinámico simbólico"

TÉSIS

"PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS".

Presentado por:

Bach. Mat. Cubas Becerra Richard Javier
Bach. Mat. Miñope Gaona Luis Anthony

Asesor:

M.Sc. Santamaria Santisteban Oscar

LAMBAYEQUE – PERÚ

Enero-2020

UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Caos de un sistema dinámico a través de conjugaciones topológicas con un sistema dinámico simbólico"

TÉSIS

"PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS".

Presentado por:

Bach. Mat. Cubas Becerra Richard Javier
Bach. Mat. Miñope Gaona Luis Anthony

Asesor:

M.Sc. Santamaria Santisteban Oscar

LAMBAYEQUE – PERÚ

Enero-2020

UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **"Caos de un sistema dinámico a través de conjugaciones topológicas con un sistema dinámico simbólico"**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Cubas Becerra Richard Javier, Miñope Gaona Luis Anthony, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas .

Dra. Ortiz Basauri Gloria María

Presidente Jurado de Tesis

M.Sc. Chiroque Baldera José Antonio

Secretario Jurado de Tesis

M.Sc. Miriam Maria Estrada Huancas

Vocal Jurado de Tesis

M.Sc. Santamaría Santisteban Oscar

Asesor

Fecha de Defensa: Enero - 2020

UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DECANATO
Ciudad Universitaria - Lambayeque

ACTA DE SUSTENTACIÓN N°007-2020-D/FACFyM

(Sustentación Autorizada por Resolución N°044-2020-D/FACFyM)

En la ciudad de Lambayeque, siendo las.....del día.....17 de enero.....se reunieron en la sala de Sustentaciones de Ingeniería electrónica....los miembros del Jurado designados mediante Resolución Nº 1719-2019-D/FACFyM, los docentes:

Dra. Gloria María Ortíz Basauri	Presidente
Mg. José Antonio Chiroque Baldera	Secretario
Mg. Miriam María Estrada Huancas	Vocal

Para recibir la tesis titulada:
Caos de un Sistema Dinámico a través de Conjugaciones Topológicas con un Sistema Dinámico Simbólico.

desarrollada por los Bachilleres en Matemáticas, **Miñope Gaona Luis Anthony y Cubas Becerra Richard Javier.**

Después de escuchar la exposición y las respuestas a las preguntas formuladas por los miembros del Jurado, se acordó.....APROBAR.....el trabajo por.....UNANIMIDAD.....con el calificativo de.....MUY BUENO.....

En consecuencia, los Bachilleres en referencia quedan aptos para recibir el Título Profesional de **Licenciado en Matemáticas** de acuerdo a la Ley Universitaria, el Estatuto y Reglamento de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo de Lambayeque.

Observaciones:

..Para constancia del hecho firman.

Dra. Gloria María Ortiz Basauri
Presidente

Mg. José Antonio Chiroque Baldera
Secretario

Mg. Miriam María Estrada Huancas
Vocal

CERTIFICO: Que, es copia fiel del original
FECHA: 23 / 02 / 2021
Dra. Iris Margarita Tejada Romero
SECRETARIO DOCENTE - FACFyM
VÁLIDO PARA TRÁMITES INTERNOS DE LA UNPRG

Declaración jurada de Originalidad

Nosotros, Richard Javier Cubas Becerra y Luis Anthony Miñope Gaona investigadores principales, y Oscar Santamaría Santisteban asesor del trabajo de investigación "Caos de un sistema dinámico a través de conjugaciones", declaramos bajo juramento que este trabajo no ha sido plagiado, ni contiene datos falsos. En caso se demostrara lo contrario, asumimos responsablemente la anulación de este informe y por ende el proceso administrativo a que hubiera lugar. Que puede conducir a la anulación del titulo o grado emitido como consecuencia de este informe.

Lambayeque, Febrero del 2021

Bach.Mat. Richard Javier Cubas Becerra

Tesista

Bach.Mat. Luis Miñope Gaona

Tesista

M. Sc. Oscar A. Santamaria Santisteban

Asesor

Dedicatoria

A mis padres por su apoyo constante; muchos de mis logros se los debo a ustedes entre los que se incluye este. Me formaron con reglas y con algunas libertades, pero al final de cuentas, me motivaron a lograr cada uno de mis objetivos.

Richard

A mis padres quienes me dieron vida, educación, apoyo y consejos, a ellos les agradezco desde el fondo de mi alma.

A mis maestros por compartir sus conocimientos conmigo.

A Dios por darme la vida, salud y sabiduría a lo largo del estudio de graduación en Matemática, ciencia por la que me apasioné.

Luis

Agradecimiento

A mi familia por su comprensión y estímulo constante además de su apoyo incondicional a lo largo de todos mis estudios.

A mi asesor Mg. Oscar Santamaría Santisteban, quien nos brindó su valiosa y desinteresada orientación y guía del presente trabajo de tesis.

Y a todas las personas que de una u otra forma me apoyaron en la realización de este trabajo.

Richard

A mi familia por su apoyo incondicional a lo largo de todos mis estudios.

A mi asesor Mg. Oscar Santamaría Santisteban, quien nos brindó su valiosa y desinteresada orientación y guía del presente trabajo de tesis.

Luis

Índice general

Resumen **I**

Abstract **II**

Introducción **IV**

1. Preliminares **5**

1.1. Nociones básicas 5

1.2. Dinámica topológica y propiedades 10

1.3. Resultados clásicos para puntos fijos hiperbólicos 18

2. Dinámica simbólica y la herradura de Smale **27**

2.1. Dinámica simbólica y sus propiedades 28

2.1.1. El shift de Bernoulli 32

2.1.2. Cadenas de Markov 34

2.2. La Herradura de Smale 36

2.3. Equivalencia dinámica entre la herradura de Smale y el Shift de Bernoullí 41

3. Caos y condiciones para su existencia **51**

3.1. Entropía topológica 52

3.1.1. Primer teorema de Bowen para entropía 59

3.1.2. Segundo teorema de Bowen para entropía 67

3.2. Sistemas caóticos clásicos 70

3.2.1. Caos en dinámicas en S^1 70

3.2.2. Caos en dinámica simbólica 75

3.2.3. Caos de la función Logística 81

3.3. Existencia de caos para difeomorfismos con puntos homoclínicos transversales 87

3.3.1. Órbitas homoclínicas 87

3.3.2. Teorema de Smale 89

4. Conclusiones **99**

Conclusiones **99**

5. Sugerencias **100**

Sugerencias **100**

Bibliografia **100**

Índice de figuras

1.1. Comportamiento asintótico en transformaciones hiperbólicas 8

1.2. Conjuntos $W^s(p)$ y $W^u(p)$. 19

1.3. Variedad estable en el punto p. 20

1.4. Conjugación topológica entre f y Df. 21

1.5. λ-inclinación. 22

2.1. Imágenes de H_1 y H_2. 38

2.2. Composición de f_1 y f_2. 39

2.3. Construcción del conjunto Λ_0^∞. 39

2.4. Construcción del conjunto $\Lambda_{-\infty}^0$. 40

2.5. $\Lambda_0^n \cap \Lambda_{-n}^0$. 40

2.6. Deformación de un conjunto R por medio de una transformación Hiperbólica. 45

2.7. Imagen de los conjuntos R_0 y R_1 por medio de π. 46

2.8. Reubicación de las imágenes de los conjuntos R_0 y R_1 por medio de π. 47

2.9. Elección de los conjuntos $S_1, , S_4$. 48

2.10. Imágenes de los conjuntos $S_1, , S_4$. 49

3.1. Atractor de Lorenz. 52

3.2. órbitas de dos puntos ϵ-indistinguibles. 54

3.3. Órbitas del Flujo gradiente φ. 66

3.4. Órbitas del flujo F. 75

3.5. Conjuntos I_0 y I_1 para la función logística. 84

3.6. Punto homoclínico transversal. 88

3.7. Puntos homoclínicos de una transformación hiperbólica. 88

3.8. Construcción del conjunto Hiperbólico Λ_g. 91

3.9. Imágenes de discos D^s e D^u 94
3.10. Elección de $f^{-k}(D^s \times f^{-j}(D^u))$ 95
3.11. D y $f^n(D) = f^{2k+j}(D)$ para $D = f^{-k}(D^s \times f^{-j}(D^u))$. 96
3.12. Elección de $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ 97

Resumen

La teoría del caos es una rama de las matemáticas que se centra en el estudio de sistemas dinámicos en las cuales pequeñas diferencias en las condiciones iniciales, como las debidas a errores en las mediciones o debido a errores de redondeo en el cálculo numérico, pueden producir resultados muy divergentes, lo que hace imposible la predicción a largo plazo de su comportamiento en general. Una de las propiedades del caos es la invariancia por conjugaciones topológicas, o sea, que se puede determinar el caos de un sistema a partir de un sistema conjugado a esta.

En este trabajo se busca determinar el caos de un sistema dinámico usando conjugaciones topológicas. En particular se determina el caos del sistema dinámico asociado a la función logística y de sistemas que poseen intersecciones homoclínicas transversales. Para la primera construimos una conjugación topológica con un sistema dinámico simbólico binario y para la segunda usamos el Teorema de Smale, el cual proporciona el caos del sistema construyendo una conjugación topológica con un sistema dinámico simbólico de n-símbolos.

Palabras clave: conjunto hiperbólico; dinámica simbólica; herradura de Smale; conjugación topológica; entropía; caos; punto homoclínico.

Abstract

Chaos theory is a branch of mathematics that focuses on the study of dynamical systems in which small differences in initial conditions, such as those due to errors in measurements or due to rounding errors in numerical computation, can yield widely diverging outcomes for such dynamical systems, rendering long-term prediction of their behavior impossible in general. A well-known property of chaos is invariance by topological conjugations, that is, the chaos of a system can be determined from a system conjugated to it.

In this work seeks to determine the chaos of a dynamic system using topological conjugations. In particular, the chaos of the dynamic system associated with the logistic function and of systems that have transversal homoclinic intersections is determined. For the first we construct a topological conjugation with a binary symbolic dynamics system and for the second we use Smale's Theorem, which provides the chaos of the system by constructing a topological conjugation with a symbolic dynamics system of n -symbols.

Keywords: hyperbolic set; symbolic dynamics; Smale's horseshoe; topological conjugation; entropy; chaos; homoclinic point.

Introducción

Para la formulación matemática de un sistema dinámico se necesita un *espacio de estados* X el cual generalmente es un espacio métrico, topológico o una variedad riemanniana; y una ley de evolución, describiendo como el sistema evoluciona con respecto al tiempo, el cual puede ser tiempo discreto o tiempo continuo.

El objetivo principal de los sistemas dinámicos es comprender el comportamiento asintótico de los sistemas para los cuales existe una regla determinista para la evolución del estado. Los sistemas pueden involucrar muchas variables y generalmente no son lineales. A menudo ocurren comportamientos dinámicos muy complicados, incluso generados por ecuaciones con una forma algebraica simple. Esto se debe mayormente a la sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, la posibilidad de que estados cercanos experimenten evoluciones muy diferentes, lo cual genera una situación de caos en el sistema. En estos casos, no podemos usar soluciones numéricas con total confianza, ya que hay errores de cálculo en el medio que pueden producir soluciones bastante diferentes.

En casos de comportamientos caóticos se busca entender el comportamiento de las órbitas de la mayoría de puntos cuando el tiempo tiende al infinito. En el inicio de las investigaciones sobre este asunto, Stephen Smale uno de los pioneros en sistemas dinámicos y los matemáticos la época creían que la mayoría de los sistemas dinámicos presentaban un comportamiento predecible y que de hecho el número de órbitas periódicas eran finitas. Sin embargo, el matemático Levison en [1], describió un resultado de Cratwright-Littlewood que contenía un ejemplo de sistemas dinámicos con infinidad de puntos periódicos, lo cual indica existencia de impredecibilidad de la evolución de los estados. Intentando entender las razones por las cuales esto ocurría, en la década de 1960, Stephen Smale introduce en [8] un ejemplo de carácter geométrico de un sistema dinámico caótico con infinitas orbitas periódicas, actualmente llamada de *Herradura de Smale*.

Por otro lado, surgieron varias propuestas para cuantificar el caos de un sistema, es decir, formas de medir la tasa de complejidad del sistema, que se traduce como la impredecibilidad de la evolución del sistema. Una es a través del uso de la noción de entropía topológica, en este contexto, se puede decir que un sistema es caótico si su entropía topológica es positiva. Una de las principales propiedades de entropía topológica es la invariancia por conjugaciones topológicas.

En general determinar el caos de un sistema calculando la entropía topológica no es una tarea fácil, sin embargo podemos usar la propiedad de que la entropía topológica (y por lo tanto el caos) es invariante por conjugaciones topológicas, para calcular el caos construyendo una conjugación topológica del sistema con otro sistema para el cual la caoticidad sea conocida. Por lo tanto usando conjugaciones topológicas, es posible obtener el caos de un sistema a partir de su conjugado. En este trabajo se busca determinar el caos de un sistema por medio de conjugaciones topológicas con una dinámica simbólica.

Capítulo 1:

Preliminares

1.1 Nociones básicas

La hiperbolicidad representa un papel central en la teoría de sistemas dinámicos: es el paradigma de los sistemas impredecibles(caóticos) a pesar de lo cual se tiene un descripción bastante completa de su dinámica. Comenzaremos estudiando transformaciones lineales hiperbólicas donde, a pesar de que la dinámica es trivial, varias de las ideas y métodos de la teoría se presentan de forma mas elemental.

Definición 1.1. [6] *Una transformación lineal(invertible) $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es hiperbólica si todos sus autovalores propios tienen módulo diferente de 1.*

Sea $A \in M_k(\mathbb{R})$, el conjunto de todos los autovalores de A es llamado **espectro** de A y lo denotamos por

$$Spec(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es autovalor de } A\}.$$

El número

$$\rho(A) = \operatorname*{máx}_{\lambda \in Spec(A)} |\lambda|$$

es llamado de **radio espectral** de A.

Tomando la norma

$$\|A\| = \sup\{\frac{\|Av\|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^k, v \neq 0\}.$$

la fórmula de Gelfand(ver [5], pag. 349) afirma que

$$\rho(A) = \lim_{k\to+\infty} \|A^k\|^{1/k}.$$

Lema 1.1. [6] *Sea $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ lineal hiperbólica tal que todos sus autovalores propios tienen módulo menor que 1. Entonces existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$, para todo $n \geq 0$ y $v \in \mathbb{R}^k$.*

Demostración. Con efecto, sea $\rho(A)$ el radio espectral de A, entonces

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A) < 1,$$

entonces existe $n_0 > 1$ tal que $\|A^{n_0}\|^{1/n_0} < 1$, o sea, $\|A^{n_0}\| < 1$. Tomando $\gamma > 0$ de tal manera que

$$\|A^{n_0}\| < \gamma < 1.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, existen enteros $k, r \geq 0$ tales que $n = kn_0 + r$ y $0 \leq r < n_0$, entonces

$$\|A^n\| = \|A^{kn_0+r}\| \leq \|A^{kn_0}\|.\|A^r\| \leq \|A^{n_0}\|^k.\|Ar\| \leq \gamma^k \|A^r\|, \tag{1.1}$$

tomando $c = \text{máx}_{0\leq j\leq n_0} \|A^j\|$, así

$$\begin{aligned}
\|A^n\| \leq c\gamma^k = c(\gamma^{1/n_0})^{n_0 k} &= c\frac{(\gamma^{1/n_0})^r}{(\gamma^{1/n_0})^r}(\gamma^{1/n_0})^{n_0 k} \\
&= \frac{c}{(\gamma^{1/n_0})^r}(\gamma^{1/n_0})^{n_0 k + r} \\
&= \frac{c}{(\gamma^{1/n_0})^r}(\gamma^{1/n_0})^{n}. \\
&\leq \frac{c}{\gamma}(\gamma^{1/n_0})^{n}.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomando $C = \dfrac{c}{\gamma}$ y $\lambda = \gamma^{1/n_0} < 1$, tenemos que

$$\|A^n v\| \leq \|A^n\|.\|v\| \leq C\lambda^n \|v\|.$$

□

Lema 1.2. [6] *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal hiperbólica. Entonces existen subespacios E^s, E^u tales que*

1. *$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ y $A(E^s) = E^s, A(E^u) = E^u$, es decir, E^s y E^u son invariantes por A.*
2. *Existe $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que: $\|A^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|, n \geq 0, v \in E^s$ y $\|A^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|, n \geq 0, v \in E^u$.*

Demostración. 1. Tome el conjunto $Spec(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Autovalor de } A\}$ y tome E_λ el autoespacio generado por los autovectores asociados a λ. Tomando

$$E^s = \bigoplus_{|\lambda|<1} E_\lambda, \text{ y } E^u = \bigoplus_{|\lambda|>1} E_\lambda.$$

Como A es isomorfismo, tenemos que $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$. Además, como cada subespacio de autovectores es invariante, o sea $A(E_\lambda) = E_\lambda$ para todo $\lambda \in Spec(A)$, entonces

$$\begin{aligned} A(E^s) &= A(\bigoplus_{|\lambda|<1} E_\lambda) = \bigoplus_{|\lambda|<1} A(E_\lambda) = \bigoplus_{|\lambda|<1} E_\lambda = E^s, \quad \text{y} \\ A(E^u) &= A(\bigoplus_{|\lambda|>1} E_\lambda) = \bigoplus_{|\lambda|>1} A(E_\lambda) = \bigoplus_{|\lambda|>1} E_\lambda = E^u. \end{aligned}$$

2. Sigue inmediatamente del Lema 1.2, pues note que las restricciones $A|_{E^s}$ y $A^{-1}|_{E^u}$ tienen autovalores con modulo menor que 1, por lo tanto, existen C_1, C_2 y $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ tal que $\|A^n v\| \leq C_1 \lambda_1^n \|v\|$ para todo $v \in E^s$ y $\|A^n v\| \leq C_2 \lambda_2^n \|v\|$ para todo $v \in E^u$. Suficiente tomar $C = \text{máx}\{C_1, C_2\}$ y $\lambda = \text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

□

Observación 1.1. *Note que si $v^s \in E^s$ y $v^u \in E^u$ entonces*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \|A^n v^s\| &= 0 \\ \lim_{n\to-\infty} \|A^n v^u\| &= 0 \end{aligned}$$

Note también que si $v \notin E^s \cup E^u$, E^s y E^u subespacios no triviales, como $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, entonces existen $v^s \in E^s$ y $v^u \in E^u$ tal que $v = v^s + v^u$, por lo tanto

$$\|A^n v\| = \|A^n v^s + A^n v^u\| \geq \Big| \|A^n v^u\| - \|A^n v^s\| \Big|$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\pm\infty} \|A^n v\| = +\infty$.

Lema 1.3 (Norma Adaptada). [6] *Sea $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación hiperbólica, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ su descomposición en subespacios estable e inestable respectivamente. Entonces existe una norma $\|.\|^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $0 < a < 1$ tal que*

$$\|A|_{E^s}\|^* < a < 1 \quad y \quad \|A^{-1}|_{E^u}\|^* < a < 1.$$

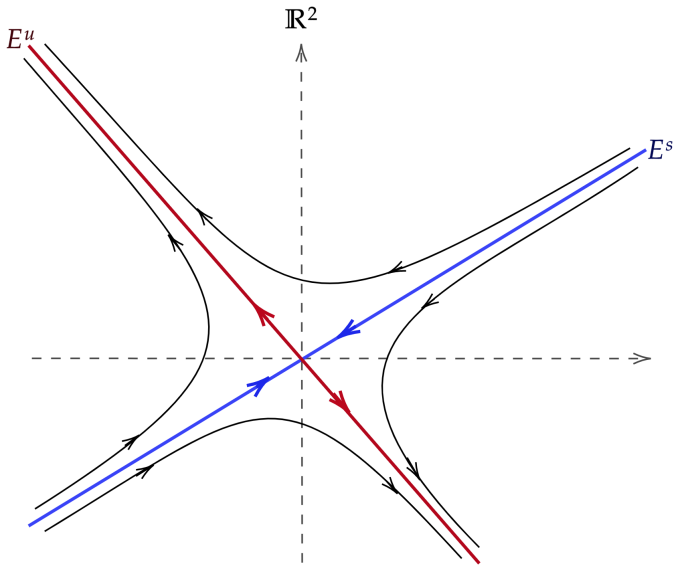


Figura 1.1: Comportamiento asintótico en transformaciones hiperbólicas

Demostración. Supongamos primero que $E^s = \mathbb{R}^n$. Sabemos que existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|A^n\| \leq C\lambda^n$. Consideremos n_0 tal que $C\lambda^{n_0} < 1$. Fijando n_0, definimos la norma $\|.\|^s$ por

$$\|v\|^s = \sum_{j=0}^{n_0-1} \|A^j v\|.$$

Note que

$$\begin{aligned} \|v\|^s = \sum_{j=0}^{n_0-1} \|A^j v\| &\leq \sum_{j=0}^{n_0-1} \lambda^j \|v\| \\ &= (\sum_{j=0}^{n_0-1} \lambda^j)\|v\| \\ &= (\frac{1-\lambda^{n_0}}{1-\lambda})\|v\| \\ &= K\|v\|, \end{aligned}$$

donde $K = \dfrac{1-\lambda^{n_0}}{1-\lambda} < 1$. Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|Av\|^s = \sum_{j=1}^{n_0} = \|v\|^s + \|A^{n_0}v\| - \|v\| &\leq \|v\|^s + (C\lambda^{n_0} - 1)\|v\| \\ &\leq (1 + \frac{C\lambda^{n_0} - 1}{K})\|v^s\| \\ &= a\|v\|^s. \end{aligned}$$

En el caso que para $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la descomposición $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ es no trivial, procedemos de la misma manera para E^u tomando A^{-1} en vez de A, construimos normas $\|.\|^s$ y $\|.\|^u$ en E^s y E^u respectivamente tales que $\|A|_{E^s}\|^s < a < 1$ y $\|A^{-1}|_{E^u}\|^u < a < 1$ para algún escalar positivo $a \in \mathbb{R}$. Como cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ puede ser escrito como $v = v^s + v^u$ de forma única, donde $v^s \in E^s$ y $v^u \in E^u$, podemos definir la norma $\|.\|^*$ como

$$\|v\|^* = \text{máx}\{\|v\|^s, \|v^u\|^u\}.$$

$\square$

1.2 Dinámica topológica y propiedades

Definición 1.2. [6] *Un sistema dinámico es una terna (X, G, F) donde X un espacio topológico o métrico, $G = \mathbb{R}_0^+$ o $G = \mathbb{Z}_0^+$ y*

$$F : G \times X \to X$$

es una función continua tal que:

1. $F(0, x) = x$, *para todo* $x \in X$.
2. $F(n, F(m, x)) = F(n + m, x)$, *para todo* $n, m \in G$, $x \in X$.

Cuando $G = \mathbb{Z}_0^+$, el sistema dinámico (X, G, F) es llamado sistema dinámico discreto y cuando $G = \mathbb{R}_0^+$ (X, G, F) es llamado sistema dinámico contínuo.

Observación 1.2.

- *Cuando $G = \mathbb{Z}_0^+$, tomando $F_n = F(n, .)$ y $f = F_1$ entonces $F(n, x) = f^n(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_0^+$, por lo tanto un sistema dinámico discreto está generado por una función continua $f = F_1$. Por esta razón, dada una función continua $f : X \to X$, nos referiremos a f como un sistema dinámico. Cuando $f = F_1$ es un homeomorfismo, el sistema dinámico puede ser extendido para todo $\mathbb{Z}$ con $F(-n, x) = f^{-n}(x)$ para todo $n > 0$.*
- *Cuando $G = \mathbb{R}_0^+$, tomando $F_t = F(t, .)$, si para todo t la aplicación $F_t : X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo entonces el sistema dinámico puede ser extendido para todo $\mathbb{R}$ con $F(-t, x) = F_t^{-1}(x)$ para todo $t > 0$. La nueva aplicación*

  $$F : \mathbb{R} \times X \to X$$

  *es llamado de **flujo**.*
- *Note que, a partir de un flujo podemos obtener una dinámica discreta, de la siguiente manera: si $F : \mathbb{R} \times X \to X$ es un flujo, entonces tomando $f = F_t$ obtenemos un sistema dinámico discreto $G : \mathbb{Z} \times X \to X$ donde $G(n, x) = (F_t)^n(x)$.*

En los siguientes ejemplos veremos que las dinámica discretas surgen naturalmente en el estudio del comportamiento asintótico de modelos matemáticos.

Ejemplo 1.1 (**Iteración de funciones reales como sistemas dinámicos**). *Si estamos interesados en estudiar la variación en tiempo discreto, diario, mensual, anual, etc., estamos tratando con ecuaciones de diferencias del tipo*

$$x(n) = f(x(n-1)).$$

Tomando $x_n = x(n)$, entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f^2(x_0)) = f^4(x_0) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) = f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0). \end{aligned}$$

Por ejemplo si $f(x) = \mu x$, tenemos que

$$x_n = f(x_{n-1}) = \mu_{x_{n-1}} = \mu^n x_0.$$

Entonces, para cualquier valor de x_0, si $\mu > 1$, x_n converge asintóticamente a $+\infty$, y si $0 < \mu < 1$, tenemos que f es una contracción y por lo tanto x_n converge a cero. El comportamiento dinámico de estas iteraciones es muy similar al de las soluciones de la ecuación diferencial lineal.

Ejemplo 1.2 (**Estudio de soluciones de EDO's con dinámica discreta**). *Para la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, no es posible obtener una expresión para la solución, por lo que es necesario calcular aproximaciones numéricamente. Considere el sistema $x' = f(x)$ Con condición inicial $X(0) = X_0$. Cuando f es C^1 entonces esta ecuación diferencial tiene una única solución. En este caso podemos aproximar las solución discretizando el sistemas usando el método de Euler, para el cual tomamos la función $x(t)$ en series de Taylor, podemos aproximarlo como*

$$x(t_n + h) \approx x(t_n) + h.x'(t_n)$$

y como $t_{n+1} = t_n + h$ y $x'(t_n) = f(x_n)$, entonces tenemos que

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + h.f(x(t_n)).$$

Note que si tomamos $F_h(x) = x + hf(x)$ y $x_n = x(t_n)$, tenemos que $x_{n+1} = F_h^n(x_0)$. Pero como estamos interesados en estudiar el comportamiento asintótico de soluciones, o sea saber que pasa con

la solución $x(t, x_0)$ cuando $t \to \infty$, para eso es suficiente tomar $h = 1$ y tomar $F(x) = x + f(x)$. Así, para estudiar el comportamiento asintótico de $x(t, x_0)$ es suficiente estudiar el comportamiento asintótico de $F^n(x_0)$.

De la misma manera procedemos cuando tenemos un sistema del tipo

$$\begin{cases} x' &= f_1(x, y, z) \\ y' &= f_2(x, y, z) \\ z' &= f_3(x, y, z). \end{cases}$$

Haciendo $f = (f_1, f_2, f_3)$ y $X = (x, y, z)$, tenemos que $X'(t) = f(X(t))$, entonces para estudiar el comportamiento asintótico es suficiente estudiar el sistema $X_{n+1} = X_n + f(X_n)$, con $X(0) = X_0$.

Debido al observación 1.2 estudiaremos nos restringiremos a estudiar sólo dinámicas discretas.

Definición 1.3. [6] *Sea X un espacio topológico, $f\colon X \longrightarrow X$ una aplicación continua, y $x \in X$. Llamamos a órbita futura de x al conjunto $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_0^+\}$. Cuando f es un homeomorfismo, definimos a órbita pasada de x como el conjunto $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_0^-\}$. En este caso, decimos que el conjunto $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = O^+(x) \cup O^-(x)$ es la órbita de x.*

Sea $A \subset X$. Decimos que A es positivamente f-invariante si $f(A) \subset A$, análogamente decimos que es negativamente f-invariante cuando $A \subset f(A)$. El subconjunto A es f-invariante si es positivamente y negativamente f-invariante, o sea, $f(A) = A$.

Caracterizamos en la siguiente definición a los conjuntos de los puntos de acumulación de la órbita.

Definición 1.4. [6] *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \longrightarrow X$ una función continua. Dado $x \in X$, definimos*

$$\omega(x, f) = \{y \in M : \exists\, n_k \to +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \to y\},$$

llamado conjunto ω-limite de x (para f). Cuando f es invertible, definimos

$$\alpha(x, f) = \{z \in M : \exists\, m_k \to +\infty \text{ tal que } f^{-m_k}(x) \to z\}.$$

el cual es llamado conjunto α-limite de x (para f).

Intuitivamente podemos pensar el conjunto $\alpha(x, f)$ como el conjunto del cual *"nace"* la órbita de x e $\omega(x, f)$ como el conjunto del cual *"muere"* la órbita de x.

Observación 1.3. Note que $\alpha(x, f) = \omega(x, f^{-1})$ y cuando X es compacto $\omega(x, f) \neq \emptyset$. Con efecto, la secuencia $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsecuencia convergente a un ponto en X. Análogamente, $\alpha(x, f) \neq \emptyset$. En este texto vamos denotar $\omega(x, f)$ por $\omega(x)$ y $\alpha(x, f)$ por $\alpha(x)$, se no existe duda con respecto a la función que estamos trabajando. En el caso que f sea un homeomorfismo y $p \in M$ un punto periódico tenemos que $\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}(p)$. Los conjuntos $\omega(x, f)$ y $\alpha(x, f)$ claramente son conjuntos cerrados y f-invariantes.

Definición 1.5. [6] *Sean X un espacio métrico compacto, $f\colon X \longrightarrow X$ un homeomorfismo y $x \in X$ un punto. El punto $x \in X$ es llamado punto recurrente para el futuro (resp. para el pasado) si $x \in \omega(x)$ (resp. $x \in \alpha(x)$). O de otra manera equivalente a decir que x es recurrente para el futuro (resp. para el pasado) si para cualquier vecindad V de x existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in V$ (resp. existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-m}(x) \in V$). Si x es recurrente tanto para el futuro y el pasado, decimos que x es recurrente, o sea, para toda vecindad V de x existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f^n(x), f^{-m}(x) \in V.$$

Denotamos el conjunto de los puntos recurrentes por $\mathcal{R}(f)$.

Notemos que, un ponto periódico $p \in X$ es recurrente, pues $p \in \mathcal{O}(p) = \omega(p) = \alpha(p)$, por la Observación 1.3.

Definición 1.6. [6] *Sea X un espacio métrico compacto y $f\colon X \longrightarrow X$ una aplicación continua. Decimos que $x \in X$ es un punto no-errante se para cada vecindad U de x, existe un entero $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$, caso contrario decimos que x es un punto errante. Denotamos al conjunto de los puntos no errantes para f como:*

$$\Omega = \Omega(f) = \{x \in M : x \text{ es no errante } \}.$$

Observación 1.4. Observe que todo punto recurrente es no-errante. De hecho, la clausura del conjunto de puntos recurrentes está contenido en los conjuntos de puntos no errantes. Además, veremos que $\Omega(f)$ es positivamente f-invariante y $\omega(x, f) \subset \Omega(f)$, cuando f es un homeomorfismo tenemos que $\Omega(f)$ es f-invariante y $\alpha(x, f) \subset \Omega(f)$.

Definición 1.7. [6] *Sea X un espacio métrico compacto y $f\colon X \longrightarrow X$ un homeomorfismo. Definimos el conjunto límite de f como:*

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f), \text{ donde } L_+(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \omega(x)} \text{ y } L_-(f) = \overline{\bigcup_{x\in X} \alpha(x)}.$$

Note que $L(f)$ es un compacto y f-invariante.

Proposición 1.1. [9] *Sea X espacio métrico compacto, entonces $f : X \to X$ un homeomorfismo, entonces el conjunto $\Omega(f)$ es un conjunto compacto e invariante.*

Demostración. Sea $x \in X$ un punto en la clausura de $\Omega(f)$. Entonces, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Omega(f)$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Sea $U \subset X$ un subconjunto abierto tal que $x \in U$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$, y como $x_{n_0} \in U$ y $x_{n_0} \in \Omega(f)$ entonces existe un entero $m \geq 1$ tal que $f^m(U) \cap U \neq \emptyset$, por lo tanto $x \in \Omega(f)$. Como el punto fue tomado arbitrario, tenemos que $\Omega(f)$ es un conjunto cerrado. Como X es un conjunto compacto y $\Omega(f) \subset X$ es un conjunto cerrado entonces $\Omega(f)$ es compacto.

Sea $x \in \Omega(f)$ y U un abierto tal que $f(x) \in U$. Como f es un homeomorfismo, tenemos que $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto, tal que $x \in f^{-1}(U)$ y como $x \in \Omega(f)$ existe $n \geq 1$ tal que $f^n(f^{-1}(U)) \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, por lo tanto $f^n(u) \cap U \neq \emptyset$, lo que implica que $f(x) \in \Omega(f)$ y como $x \in \Omega(f)$ fue tomado arbitrariamente tenemos que $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. Ahora, de la misma manera, si $V \subset X$ es un subconjunto abierto tal que $f^{-1}(x) \in V$ entonces $f(V)$ es un conjunto abierto tal que $x \in f(V)$ y como $x \in \Omega(f)$ existe un entero $m \geq 1$ tal que $f^m(f(V)) \cap f(V) \neq \emptyset$, entonces $f^m(V) \cap V \neq \emptyset$, por lo tanto $f^{-1}(x) \in \Omega(f)$ y como $x \in \Omega(f)$ fue tomado arbitrariamente tenemos que $f^{-1}(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$. $\square$

Proposición 1.2. [9] *Sea X un espacio métrico compacto, $f\colon X \longrightarrow X$ un homeomorfismo, entonces $cl(Per(f)) \subset L(f) \subset \Omega(f)$.*

Demostración. *La primera inclusión es obvia pues $Per(f) \subset \omega(f) \cup \alpha(f) \subset L(f)$ (donde, $\omega(f) = \bigcup_{x\in X} \omega(x)$ y $\alpha(f) = \bigcup_{x\in X} \alpha(x)$) y como $L(f)$ es un conjunto cerrado, tenemos que $cl(Per(f)) \subset L(f)$. Para la otra inclusión, es suficiente demostrar que $\omega(f) \cup \alpha(f) \subset \Omega(f)$. Primero, sea $y \in \omega(f)$ entonces existe $x \in X$ y una subseción $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x) = y$. Sea $U \subset X$ un subconjunto abierto tal que $y \in U$, entonces existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_r}(x) \in U$ para todo $r \geq \ell$, por lo tanto $f^{(n_{\ell+1}-n_\ell)}(U) \cap U \neq \emptyset$, entonces $y \in \Omega(f)$, así, $\omega(f) \subset \Omega(f)$. Análogamente, obtenemos que $\alpha(f) \subset \Omega(f)$. De esta manera, obtenemos que $\omega(f) \cup \alpha(f) \subset \Omega(f)$ y como Ω es cerrado tenemos que $L(f) \subset \Omega(f)$.*

Definición 1.8. [6] *Un homeomorfismo $f : X \to X$ es expansivo si existe una constante $\alpha > 0$ tal que si $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $x = y$. El número α es llamada constante de expansividad para f.*

La propiedad de expansividad nos dice que la dinámica es "impredecible", en el sentido de que es imposible predecir el comportamiento de una órbita cuando cometemos un pequeño error en la medición de la condición inicial.

Definición 1.9. [6] *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo. Decimos que f es topológicamente mezcladora o mixing si dados U, V, abiertos cualesquiera, existe $m > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq m$.*

Existe una manera de ver cuando dos sistemas son equivalentes, por medio de conjugaciones topológicas, las cuales pasamos a definir

Definición 1.10. [6] *Dada una aplicación $f : X \to X$, decimos que una aplicación $g : Y \to Y$ es* ***topológicamente conjugada*** *a f si existe un homeomorfismo $h : X \to Y$ tal que $h \circ f = g \circ h$, en otras palabras, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Note que, en la definición anterior, el hecho de que $h \circ f = g \circ h$ implica que:

$$h \circ f^n = g^n \circ h, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$
$$f^n \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

En el próximo teorema demostraremos que dinámicas topológicamente conjugadas poseen las misma propiedades.

Teorema 1.1. [6] *Sean X e Y espacios métricos compactos y $f\colon X \longrightarrow X$, $g\colon Y \longrightarrow Y$ homeomorfismos, $h\colon X \longrightarrow Y$ una conjugación de f con g y $x \in X$ un punto. Entonces:*

1. $h(Per(f)) = Per(g)$.
2. $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$.
3. $h(\alpha(x, f)) = \alpha(h(x), g)$.
4. $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.

5. *f es topológicamente mixing si, y solamente si, g es topológicamente mixing.*

6. *f es expansivo si, y solamente si, g es expansivo.*

Demostración. **Item 1.** Con efecto, sea $x \in Per(f)$ un punto periódico de f con período n. Así,

$$g^n(h(x)) = h(f^n(x)) = h(x).$$

Luego, $h(x) \in Per_n(g) \subseteq Per(g)$, donde $Per_n(g)$ de nota el conjunto de los puntos periódicos para g de periodo n, por lo tanto podemos concluir que $h(Per(f)) \subseteq Per(g)$. Por otro lado, sea $z \in Per(g)$ un punto periódico de g con periodo m. Pongamos $x = h^{-1}(z)$ tenemos que

$$f^m(x) = f^m(h^{-1}(z)) = h^{-1}(g^m(z)) = h^{-1}(z) = x.$$

Luego, $x \in Per_m(f) \subset Per(f)$ y así $z = h(x) \in h(Per(f))$. Esto implica que $Per(g) \subseteq h(Per(f))$ y por lo tanto$h(Per(f)) = Per(g)$.

Item 2. Demostremos que $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$. Dado $b \in h(\omega(x, f))$, existe un punto $a \in \omega(x, f)$ tal que $b = h(a)$. Luego, existe una sucesión de índices $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}, n_k \longrightarrow +\infty$, tal que $a = \lim\limits_{k\to+\infty} f^{n_k}(x)$. Por lo tanto,

$$b = h(a) = h(\lim_{k\to+\infty} f^{n_k}(x)) = \lim_{k\to+\infty} h(f^{n_k}(x)) = \lim_{k\to+\infty} g^{n_k}(h(x)) \in \omega(h(x), g).$$

Esto nos permite demostrar la inclusión $h(\omega(x, f)) \subseteq \omega(h(x), g)$. Ahora, vamos a demostrar la otra inclusión $\omega(h(x), g) \subseteq h(\omega(x, f))$. Sea $y \in \omega(h(x), g)$, entonces existe una sucesión de índices $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $m_k \longrightarrow +\infty$ tal que

$$y = \lim_{k\to+\infty} g^{m_k}(h(x)) = \lim_{k\to+\infty} h(f^{m_k}(x)) = h(\lim_{k\to+\infty} f^{m_k}(x)) \in h(\omega(x, f)).$$

Item 3. Dado que h es una conjugación de f^{-1} y g^{-1}, por el Item 2 tenemos que

$$h(\alpha(x, f)) = h(\omega(x, f^{-1})) = \omega(h(x), g^{-1}) = \alpha(h(x), g).$$

Item 4. Veamos $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$. Para esto, dado $y \in h(\Omega(f))$ hay un punto $x \in \Omega(f)$ tal que $y = h(x)$. Por lo tanto, tomando una vecindad abierta V de y y el hecho de que h es un homeomorfismo, tenemos que $h^{-1}(V)$ también es una vecindad abierta del punto x. Como x es un punto no errante para f, existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{n_0}(h^{-1}(V)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existe un punto $b \in X$ tal que $b \in f^{n_0}(h^{-1}(V))$e$b \in h^{-1}(V)$. Entonces $h(b) \in V$ y hay un período (único) $a \in V$ tal que $b = f^{n_0}(h^{-1}(a))$ e por lo tanto $b = h^{-1}(g^{n_0}(a))$. Se deduce que, $h(b) = g^{n_0}(a) \in g^{n_0}(V)$. Esto muestra que $g^{n_0}(V) \cap V \supset \{h(b)\} \neq \emptyset$. Mostrando que $y \in \omega(g)$ y, por lo tanto, la inclusión $h(\Omega(f)) \subseteq \Omega(g)$.

Por otro lado, sea $z \in \Omega(g)$. Debido a la inyectividad de h podemos tomar el punto $x = h^{-1}(z)$. Dado U cualquier vecindad abierta de x, entonces $h(U)$ es un vecindad abierta de z y este es un punto no errante para g, pues existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$g^{m_0}(h(U)) \cap h(U) \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existe $c \in X$ tal que $c \in g^{m_0}(h(U)) \cap h(U) \neq \emptyset$. $h \circ f^{m_0} = g^{m_0} \circ h$. Es decir, $c \in h(f^{m_0}(U)) \cap h(U)$ y por lo tanto $h^{-1}(c) \in f^{m_0}(U) \cap U$. Obtenemos $x \in \Omega(f)$ y, por lo tanto, $z = h(x) \in h(\Omega(f))$. Porlo tanto, $\Omega(g) \subseteq h(\Omega(f))$.

Item 5. Suponiendo que f es topológicamente mixing, resulta que si tenemos dos abiertos U y V no vacíos en Y, las imágenes inversas $h^{-1}(U), h^{-1}(V)$, abierto no vacío en X y hay $m \in \mathbb{N}_0$ tal que por cada $n \geq m$ que tenga

$$f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Así, existe $z \in X$ tal que $z \in f^n(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V)$, luego $h(z) \in V$ y existe un punto $x \in U$ tal que $z = (f^n \circ h^{-1})(x)$. Como h es una conjugación de f y g tenemos que:

$$h(z) = (h \circ f^n)(h^{-1}(x)) = (g^n \circ h)(h^{-1}(x)) = g^n(x) \in g^n(U).$$

Luego, $h(z) \in g^n(U) \cap V,$ para todo $n \geq m$. O sea, $g^n(U) \cap V \neq \emptyset,$ para todo $n \geq m$. Lo que garantiza que g es topológicamente mixing. Recíprocamente, suponga que g es topológicamente mixing. Dado dos abiertos $\widehat{U}$ y $\widehat{V}$ no vacíos en X tenemos que $h(\widehat{U}), h(\widehat{V})$ son abiertos en Y y existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $m \geq m_0$ tenemos que

$$g^m(h^{-1}(\widehat{U})) \cap h^{-1}(\widehat{V}) \neq \emptyset.$$

Entonces, existe $z \in Y$ tal que $z \in g^m(h(\widehat{U})) \cap h(\widehat{V})$, luego $z \in g^m(h(\widehat{U}))$ y $z \in h(\widehat{V})$. Luego, $z \in h(f^n(\widehat{U}))$ y así tenemos que $h^{-1}(z) \in f^n(\widehat{U}) \cap \widehat{V}$. Demostrando de esta manera que $f^n(\widehat{U}) \cap \widehat{V} \neq \emptyset,$ para todo $n \geq m_0$ y por lo tanto f é topológicamente mixing.

Item 6. Supongamos que f es expansivo. Sea $\alpha > 0$ la constante de expansividad de f. Como $h^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ es un homeomorfismo, en particular continua, y como Y es compacto tenemos que h^{-1} es uniformemente continua. Luego, existe $\beta > 0$ tal que para cada par de puntos $y_1, y_2 \in Y$ con $d_Y(y_1, y_2) < \beta$, implica que

$$d_X(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)) < \alpha. \tag{1.2}$$

Sea $y, z \in Y$ tal que

$$d_Y(g^n(y), g^n(z)) < \beta, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \tag{1.3}$$

Afirmación: $y = z$

De (1.2) y (1.3) tenemos que $d_X(h^{-1}(g^n(y)), h^{-1}(g^n(z))) < \alpha,$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego tenemos que $d_X(f^n(h^{-1}(y)), f^n(h^{-1}(z))) < \alpha,$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (pues como h es una conjugación de f y g tenemos $h \circ f = g \circ h$, luego $f^n \circ h^{-1} = h^{-1} \circ g^n,$ para todo $n \in \mathbb{Z}$). Como α es una constante de expansividad de f tenemos que $h^{-1}(y) = h^{-1}(z)$ y por la inyectividad de h^{-1} concluimos que $y = z$. Por lo tanto g es expansivo con constante de expansividad β.

Ahora, supongamos que g es expansivo. Como $h\colon X \longrightarrow Y$ es una conjugación de f y g tenemos que h es un homeomorfismo y $h \circ f = g \circ h$, luego $h^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ es un homeomorfismo y $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$ y por lo tanto h^{-1} es una conjugación de g y f. Así que por la afirmación anterior obtenemos que f también es expansivo.

□

1.3 Resultados clásicos para puntos fijos hiperbólicos

Definición 1.11. [6] *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ un homeomorfismo y $x \in X$. Definimos el conjunto estable de x como*

$$W^s(x) = \{y \in X : \lim_{n \to +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$$

y la inestable como

$$W^u(x) = \{y \in X : \lim_{n \to +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Para $\epsilon > 0$, definimos el conjunto estable e inestable local de tamaño ϵ, como

$$\begin{aligned} W^s_\epsilon(x) &= \{y \in X : \lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \geq 0\} \\ W^u_\epsilon(x) &= \{y \in X : \lim_{n\to+\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \geq 0\} \end{aligned}$$

En lo que sigue M denotará una variedad riemanniana compacta conexa y sin borde.

Definición 1.12. [6] *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y p un punto fijo de f. Decimos que p es punto fijo hiperbólico si $Df_p : T_pM \to T_pM$ no tiene autovalores de módulo uno. Un punto periódico de periodo k se dice hiperbólico si es un punto fijo hiperbólico de f^k.*

Ejemplo 1.3. *Considere la aplicación linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por una matriz hiperbólica $A \in M_2(\mathbb{R})$, o sea $f(v) = Av$. La matriz A tiene dos autovalores λ, μ tales que $0 < |\lambda| < 1 < |\mu|$. Note que el el punto $p = 0$ es un punto fijo, y como $Df_p = A$, entonces $p = 0$ es un punto fijo hiperbólico. Tome v y u autovalores no nulos asociados a λ y μ respectivamente entonces, dado cualquier elemento de $v \in \mathbb{R}$ tenemos que $v = \alpha v_1 + \beta v_2$, entonces*

$$f^n(v) = A^n v = A^n(\alpha v_1 + \beta v_2) = \lambda^n(\alpha v_1) + \mu^n(\beta v_2)$$

Si $v \neq 0$ entonces

- $\beta = 0$ *si y solamente si* $\lim_{n\to+\infty} f^n(v) = 0$.
- $\alpha = 0$ *si y solamente si* $\lim_{n\to+\infty} f^{-n}(v) = 0$.
- $\alpha, \beta \neq 0$ *si y solamente si* $\lim_{n\to\infty} \|f^n(v)\| = \infty$ *y* $\lim_{n\to-\infty} \|f^n(v)\| = \infty$.

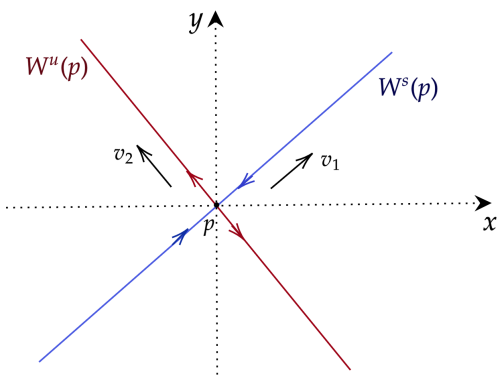


Figura 1.2: Conjuntos $W^s(p)$ y $W^u(p)$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{\alpha v_1 : \alpha \in \mathbb{R}\} \\ W^u(p) &= \{\beta v_2 : \alpha \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

A continuación enunciaremos(sin demostración) en teorema de la variedad estable. Este resultado es una herramienta básica para la descripción de las variedades estables e inestables de un punto fijo hiperbólico.

Teorema 1.2 (Teorema de la variedad estable para punto fijo hiperbólico)**.** [4] *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase C^r y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que para se verifica:*

1. *$W^s_\epsilon(p)$ es una subvariedad inmersa C^r tal que $T_pW^s_\epsilon(p) = E^s$.*
2. *$W^s_\epsilon(p) \subset W^s(p)$.*
3. *$W^s(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\epsilon(p))$ es una subvariedad inmersa de clase C^r.*

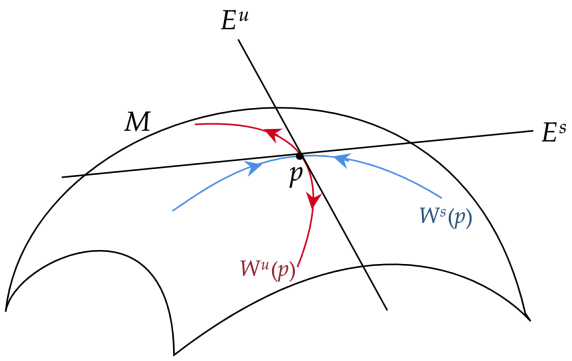


Figura 1.3: Variedad estable en el punto p.

Demostración. (Ver [7], Capítulo 5). □

Tomando f^{-1} en vez de f obtenemos un resultado análogo para W^u ya que $W^s(p, f^{-1}) = W^u(p, f)$.

Definición 1.13. [4] *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico $T_pM = E^s \oplus E^u$ su descomposición en subespacios estable y inestable de Df_p. Decimos que p es:*

- *Atractor si $E^s = T_pM$(y por lo tanto $E^u = \{0\}$).*

- *Repulsor si* $E^u = T_pM$*(y por lo tanto* $E^s = \{0\}$*).*
- *Silla si* $E^u \neq \{0\}$ *y* $E^s \neq \{0\}$.

Observación 1.5. *Sea* $f : M \to M$ *un difeomorfismo y* $p \in M$ *un punto fijo hiperbólico.*

- *Si* p *es atractor* $\Rightarrow W^s(p)$ *es un abierto que contiene a* p *y* $W^u(p) = \{p\}$.
- *Si* p *es repulsor* $\Rightarrow W^u(p)$ *es un abierto que contiene a* p *y* $W^s(p)\{p\}$.

Teorema 1.3 (Kupka-Smale)**.** [2] *Existe un conjunto residual* $\mathcal{R}$ *en* $Diff^r(M)$ *tal que si* $f \in \mathcal{R}$ *entonces:*

1. *Todo punto periódico de* f *es hiperbólico.*
2. $W^s(p)$ *y* $W^u(q)$ *son transversales para cualquier punto* $p, q \in Per(f)$.

Demostración. (Ver [2], Capítulo III.). □

Como sucede a menudo en matemática, para estudiar un fenómeno estudiamos su aproximación lineal con la esperanza que esta nos de información relevante sobre el mismo. El siguiente teorema dice que cuando p es un punto fijo hiperbólico, la dinámica de f cerca de p es topológicamente indistinguible de la dinámica de su aproximación lineal cerca del origen.

Teorema 1.4 (Teorema de Hartman Grobman)**.** [3] *Sea* $f : M \to M$ *un punto fijo hiperbólico de* f. *Entonces* f *y* Df_p *son localmente conjugados. Mas precisamente, existe* U *entorno de* 0 *en* T_pM *y* V *entorno de* p *en* M *y un homeomorfismo* $h : U \to V$ *tal que*

$$h \circ Df_p = f \circ h.$$

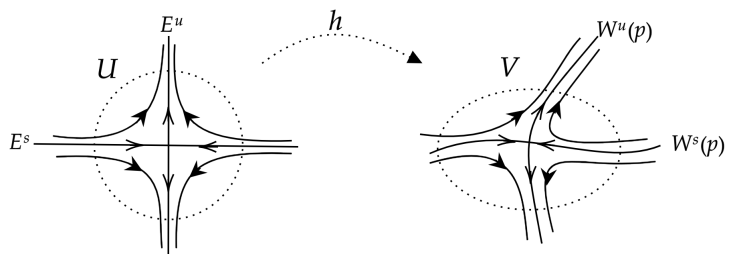


Figura 1.4: Conjugación topológica entre f y Df.

Demostración. (Ver [3].).

□

El siguiente lema es esencial para probar transversalidad bajo iteraciones.

Lema 1.4 (**Lema de inclinación o λ-lemma**). [4] *Sea p un punto periódico de $f : M \to M$ y D^u un disco compacto en $W^u(p)$. Considerando un punto $x \in W^s(p)$ y D un disco de la misma dimensión que $W^u(p)$ tal que $x \in D$ y D es transversal a $W^s(p)$ en x. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existe $D_n \subset D$ tal que $f^n(D_n)$ es un disco ϵ-C^1 cercano a D^u.*

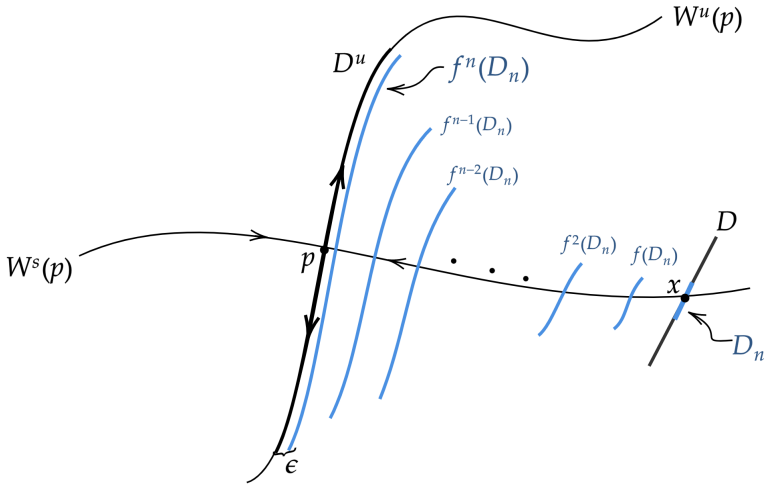


Figura 1.5: λ-inclinación.

Demostración. (Ver [2], página 142.).

□

Corolario 1.1. [4] *Sean p, q y r tres puntos periódicos hiperbólicos de f tal que $W^u(p) \cap W^s(q)$ y $W^u(q) \cap W^s(r)$. Entonces $W^u(p) \cap W^s(r)$.*

Como una generalización de punto hiperbólico, surge la noción de conjunto hiperbólico, donde en vez de ver hiperbolicidad en un punto fijo, vemos hiperbolicidad en un conjunto compacto invariante.

Definición 1.14 (**Conjunto hiperbólico**). [4] *Sea $f\colon M \longrightarrow M$ un difeomorfismo, M una variedad Riemanniana compacta y $\Lambda \subseteq M$ un subconjunto f-invariante. Decimos que Λ es hiperbólico si, para cada $x \in \Lambda$ tenemos que:*

i) *Existen subespacios* $E^s_x, E^u_x \subseteq T_xM$ *tales que,* $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$ *y varían continuamente para cada* $x \in \Lambda$.

ii) $Df_x(E^s_x) = E^s_{f(x)}$ *y* $Df_x(E^s_x) = E^u_{f(x)}$.

ii) *Existen constantes* $C > 0$ *y* $0 < \lambda < 1$ *tal que:*

$$\begin{aligned} \|Df^n_x(v^s)\| &\leq C\lambda^n\|v^s\|, \forall v^s \in E^s_x, \forall n \geq 0. \\ \|Df^{-n}_x(v^u)\| &\leq C\lambda^n\|v^u\|, \forall v^u \in E^u_x, \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

En este caso, decimos también que el subconjunto invariante Λ tiene estructura hiperbólica.

Observación 1.6. En la definición anterior se puede observar fácilmente que los subespacios estables e inestables están caracterizados por:

$$\begin{aligned} E^s_x &= \{v \in T_xM : \|Df^n_x(v)\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow +\infty\} \\ E^u_x &= \{v \in T_xM : \|Df^{-n}_x(v)\| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \longrightarrow +\infty\} \end{aligned}$$

Además, para el conjunto hiperbólico Λ existe una constante $\lambda' \in (0,1)$ u una norma adaptada $\|.\|^*$ como en el Lema 1.3, tal que para cada $x \in \Lambda$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \|Df^n_x(v^s)\|^* &\leq (\lambda')^n\|v^s\|^*, \forall v^s \in E^s_x, \forall n \geq 0. \\ \|Df^{-n}_x(v^u)\|^* &\leq (\lambda')^n\|v^u\|^*, \forall v^u \in E^u_x, \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Así, obtenemos que $Df_{x|E^s_x}$, ${Df^{-1}_x}_{|E^u_x}$ son contracciones con respecto a la norma $\|.\|^*$.

Definición 1.15. *Un conjunto hiperbólico* $\Lambda \subset M$ *es llamado maximal si existe un abierto* $U \subset M$ *tal que* $\Lambda \subset U$ *y*

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

En la siguiente proposición demostraremos la unicidad de la descomposición Df-invariante del espacio tangente en cada punto del conjunto hiperbólico.

Proposición 1.3. [4] *Sea* Λ *un conjunto hiperbólico para un difeomorfismo* f *en* M. *La descomposición* $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x$, $x \in \Lambda$, *que torna* Λ *hiperbólico es única.*

Demostración. Sea $T_xM = E^s_x \oplus E^u_x = F^s_x \oplus F^u_x$, $x \in \Lambda$. Demostraremos que $E^s_x \subseteq F^s_x$. Supongamos por absurdo que existe $\alpha^s \in E^s_x$ tal que $\alpha^s \notin F^s_x$. Por la descomposición de T_xM existen $v^s \in F^s_x$ y $w^u \in F^u_x, w^u \neq 0$ tales que $\alpha^s = v^s + w^u$. Luego tenemos

$$0 < \|Df^n_x(w^u)\| = \|Df^n_x(\alpha^s) - Df^n_x(v^s)\| \leq \|Df^n_x(\alpha^s)\| + \|Df^n_x(v^s)\|.$$

Haciendo $n \longrightarrow +\infty$, por la Observación 1.6 tenemos $\lim_{n\to+\infty} \|Df^n_x(w^u)\| = 0$. Esto, implica que $w^u \in F^s_x \cap F^u_x = \{0\}$, luego $w^u = 0$, absurdo. Por lo tanto $E^s_x \subseteq F^s_x$ y de manera análoga obtenemos también que $E^u_x \subseteq F^u_x$. Ahora, por los mismos argumentos, desde que las descomposiciones poseen las mismas propiedades, podemos invertir los papeles de E^s_x, F^s_x y obtenemos que $F^s_x \subseteq E^s_x$. Análogamente, concluimos que $F^u_x \subseteq E^u_x$. Por lo tanto $E^s_x = F^s_x$ y $E^u_x = F^u_x$.

□

Definición 1.16. *[7] Dado un espacio vectorial W con producto interno y $C \subseteq W$, decimos que C es un Cono en W si existe una forma cuadrática no degenerada $B\colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $C = \{v \in W : B(v) \leq 0\}$.*

En caso de que W posee una descomposición, o sea, $W = E \oplus F$ entonces dada la forma cuadrática $B : E \oplus F \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como: $B(v_E, v_F) = -a^2\|v_E\|^2 + a\|v_F\|^2, a > 0$, tenemos el cono $C = \{(v_E, v_F) : a\|v_E\| \leq a\|v_F\|\}$. Nos referimos como dimensión del cono a la dimensión del mayor subespacio contenido en él.

El próximo resultado permite caracterizar los conjuntos hiperbólicos, vía teoría de conos.

Teorema 1.5. [4] *Sea $f\colon M \longrightarrow M$ un difeomorfismo y Λ un conjunto compacto f-invariante. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Λ es hiperbólico.*
2. *para cada $x \in \Lambda$ existen conos C^s_x y C^u_x, y constantes $n_0 > 0$ y $\mu > 1$ tal que:*
   - **i)** $Df_x(C^u_x) \subseteq C^s_{f(x)}$ *y* $Df^{-1}_x(C^s_x) \subseteq C^s_{f^{-1}(x)}$.
   - **ii)** $\|Df^{n_0}_x(v)\| > \mu\|v\|$, *si* $v \in C^u_x$ *e* $\|Df^{-n_0}_x(v)\| > \mu\|v\|$, *si* $v \in C^s_x$.
   - **iii)** *La dimensión de los conos son complementares (la suma de las dimensiones es igual a la dimensión del espacio tangente) y son constantes en las órbitas.*

Demostración. (Ver [6], página 30.). □

Vamos a demostrar la existencia de una vecindad para un conjunto hiperbólico de tal manera que el conjunto invariante maximal, también es un conjunto hiperbólico.

Teorema 1.6. [4] *Sea $f\colon M \longrightarrow M$ un C^r-difeomorfismo y $\Lambda \subseteq M$ un subconjunto f-invariante. Si Λ hiperbólico, entonces existe una vecindad V de Λ de modo que, si $\Lambda \subseteq U \subseteq V$ entonces el conjunto invariante maximal $\Lambda_U = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U)$ es un conjunto hiperbólico.*

Demostración. En Λ tomamos una métrica adaptada, implicando que para cada $x \in \Lambda$, $Df_{E_x^s}$ es una contracción y $Df_{E_x^u}$ es una expansión. Por hipótesis tenemos que Λ es un conjunto hiperbólico y por la continuidad existe una vecindad V de Λ tal que:

$$Df_x(C_x^u) \subset C_{f(x)}^u, x, f(x) \in V,$$

$$Df_x^{-1}(C_x^s) \subset C_{f^{-1}(x)}^s, x, f^{-1}(x) \in V,$$

$$\|Df_x^{n_0}(v^u)\| > \mu\|v^u\|, v^u \in C_x^u,$$

$$\|Df_x^{-n_0}(v^s)\| > \mu\|v^s\|, v^s \in C_x^s.$$

Donde $\mu > 1$ y n_0 es un entero positivo. Sea $U \subseteq V$ vecindad arbitraria de Λ e $\Lambda_U = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(U) \supset \Lambda$. Luego, para la vecindad U definimos los siguientes conjuntos.

$$E_x^s = \bigcap_{n=0}^{+\infty} Df_{f^n(x)}^{-n}(C_{f^n(x)}^s) \text{ y } E_x^u = \bigcap_{n=0}^{+\infty} Df_{f^{-n}(x)}^{n}(C_{f^{-n}(x)}^u).$$

Así, tenemos que $Df(E_x^s) = E_x^s$ y $Df(E_x^u) = E_x^u$.

Afirmación: Existen constantes $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que si $v \in E_x^s$, entonces $\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n, n \geq 0$.

Sea $n \geq 0$, entonces $n = kn_0 + r, 0 \leq r < n_0$. Tomando $C_1 = \inf_{x\in M}\{\text{mín}\{\|Df_x^{-r}w\|\|w\| : 0 \leq r < n_0\}\}$ tenemos que para $v \in E_x^s$, entonces $w = Df_x^n(v) \in E_{f^n(x)}^s$ y por la invariancia de los conos obtenemos:

$$\|v\| = \|Df_{f^n(x)}^{-n}(w)\| = \|Df_{f^r(x)}^{-r}(Df_{f^n(x)}^{-kn_0}(w))\| \geq C_1\|Df_{f^n(x)}^{-kn_0}(w)\| \geq C_1\mu^k\|w\|.$$

Luego, escribiendo $C = \frac{\mu^{\frac{r}{n_0}}}{C_1}$ y $\lambda = \mu^{\frac{-1}{n_0}}$ obtenemos $\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n\|v\|$. Podemos demostrar una afirmación equivalente para E_x^u de manera análoga. En particular, $E_x^s \cap C_x^u = \{0\}$ e $E_x^u \cap C_x^s = \{0\}$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos el subespacio $E_n \subset C^s_{f^n(x)}$ de dimensión máxima y denotemos $S_n = Df_x^{-n}(E_n)$, análogamente tomamos $F_n \subset C^u_{f^{-n}(x)}$ de dimensión máxima y denotamos $U_n = Df_x^n(F_n)$. Sea S y U subespacios limites de S_n y F_n respectivamente. Por lo tanto tenemos que $S \subset E^s$ $U \subset E^u$ y $S \cap U = \{0\}$, obtenemos $T_xM = S \oplus U$. Por lo tanto $S = E^s$ y $U = E^u$, pues si fuese así, tendríamos un elemento $v \in E^s \setminus S$. Escribiendo $v = s + u$ tenemos que:

$$\|Df_x^n(v)\| \geq \|Df_x^n(u)\| - \|Df_x^n(s)\| \longrightarrow +\infty, \text{ cuando } n \longrightarrow +\infty.$$

esto contradice el hecho de que $v \in E^s$. De forma análoga tendríamos una contradicción si suponemos que $U \subsetneqq E^u$. De eso concluimos que $T_xM = E^s \oplus E^u$ y tenemos así que Λ_V es un conjunto invariante hiperbólico. $\square$

Capítulo 2:

Dinámica simbólica y la herradura de Smale

Una de las contribuciones de Stephe Smale, uno de los grandes matemáticos que ayudó a desarrollar la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos, fue la construcción de lo que hoy se llama Herradura de Smale, Este "objeto" es una transformación geométrica que proporciona una base para comprender las propiedades caóticas de una clase de sistemas dinámicos y convertirse en una de las primeras formas geométricas capaces de describir un sistema dinámico, mostrando la presencia de dinámicas impredecibles a largo plazo, incluso cuando la ley de evolución del sistema es totalmente determinista. Nuestro objetivo en este capítulo es hacer un estudio detallado de este sistema dinámico relacionándolo con una dinámica simbólica. Comenzaremos estudiando el sistema dinámico definido en el espacio de secuencia de N-símbolos y el shift de Bernoulli. En segundo lugar, estableceremos un homeomorfismo entre la herradura y el shift de Bernoulli del espacio de 2 símbolos, mostrando que son topológicamente conjugados. En este punto, a través de la dinámica simbólica, extraemos propiedades importantes sobre la herradura de Smale, como la existencia de puntos periódicos, órbitas densas y sensibilidad a las condiciones iniciales.

2.1 Dinámica simbólica y sus propiedades

Introducimos ahora una clase de sistemas dinámicos de particular importancia para sistemas dinámicos suaves. Una razón es que en muchos aspectos los sistemas simbólicos sirven como modelo para los sistemas suaves, muchas veces es más fácil ver primero las propiedades para el caso simbólico y enseguida, transportarlos para el caso suave. Las restricciones de sistemas dinámicos suaves a ciertos conjuntos invariantes se parecen mucho con sistemas simbólicos, por lo tanto la dinámica simbólica pueden ser usada para "codificar" algunos sistemas suaves.

Definición 2.1. *[4] Para $N \geq 2$, definimos:*

- *El **espacio de las sucesiones unilaterales de** N **símbolos** es el espacio métrico (Σ_N^+, d^+), donde*

$$\Sigma_N^+ = \{(x_j)_{j\geq 0} = (x_0, x_1, \ldots) : x_j \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \text{ para } j \in \mathbb{Z}_0^+\}, \text{ y}$$

$$d^+\Big((x_j)_{j\geq 0}, (y_j)_{j\geq 0}\Big) = \sum_{j\geq 0} \frac{|x_j - y_j|}{2^{|j|}}.$$

- *El **espacio de las sucesiones bilaterales de** N **símbolos** es el espacio métrico (Σ_N, d), donde*

$$\Sigma_N = \{(x_j)_{\mathbb{Z}} = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) : x_j \in \{0, 1, \ldots, N-1\} \text{ para } j \in \mathbb{Z}\}, \text{ y}$$

$$d\Big((x_j)_{\mathbb{Z}}, (y_j)_{\mathbb{Z}}\Big) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|x_j - y_j|}{2^{|j|}}.$$

Observación 2.1. *Dados $\omega, \eta \in \Sigma_N^+$ tenemos que $d^+(\omega, \eta) < 2(N-1)$.*

Proposición 2.1. *Los conjuntos Σ_N^+, Σ_N no son enumerables.*

Demostración. Notemos que si Σ_N^+ es no enumerable, automáticamente podemos concluir Σ_N también es no enumerable, pues podemos identificar Σ_N^+ con el subconjunto de de todas las sucesiones de Σ_N cuyos términos de índices negativos son todos iguales a cero.

Por contradicción, supongamos que Σ_N^+ es enumeráble, entonces este conjunto puede ser expresado como $\Sigma_N^+ = \{\eta^0, \eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^j, \ldots\}$, donde

$$\begin{aligned}
\eta^0 &= (\eta_0^0, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_i^0, \ldots) \\
\eta^1 &= (\eta_0^1, \eta_1^1, \eta_2^1, \ldots, \eta_i^1, \ldots) \\
\eta^2 &= (\eta_0^2, \eta_1^2, \eta_2^2, \ldots, \eta_i^2, \ldots) \\
&\vdots \\
\eta^j &= (\eta_0^j, \eta_1^j, \eta_2^j, \ldots, \eta_i^j, \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ahora considere $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i, \ldots) \in \Sigma_N^+$, donde

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{si } \eta_i^i \neq 1 \\ 0, & \text{si } \eta_i^i = 1, \end{cases}$$

claramente $\xi_i \neq \eta_i^i$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$, pues si $\eta_i^i \neq 1$ entonces $\xi_i = 1$, y si $\eta_i^i = 1$ también tenemos que $\eta_i^i \neq \xi_i = 0$.
Como $\Sigma_N^+ = \{\eta^0, \eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^j, \ldots\}$ entonces $\xi = \eta^k$ para algún $k \in \mathbb{N}_0$. Luego, como $\xi = \eta^k$, entonces $\xi_i = \eta_i^k$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$, en particular para $i = k$ deberíamos tener que $\xi_k = \eta_k^k$, pero esto contradice el hecho de que $\xi_i \neq \eta_i^i$ para todo entero $i \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto Σ_N^+ no es enumeráble.

□

Proposición 2.2. (Σ_N^+, d^+) *y* (Σ_N, d) *son espacios métricos compactos.*

Demostración. Veamos primero que (Σ_N^+, d^+) es compacto. Sea $(\eta^n)_{n\geq 1}$ una secuencia en (Σ_N^+, d), por lo tanto

$$\eta^n = (\eta_0^n, \eta_1^n, \eta_2^n, \ldots, \eta_j^n, \ldots) \text{ donde } 0 \leq \eta_j^n \leq N-1.$$

Para demostrar que (Σ_N^+, d^+) es compacto, es suficiente encontrar una subsecuencia de $(\eta^n)_{n\geq 1}$ convergente en (Σ_N^+, d^+). Para eso notemos que como $(\eta_0^n)_{n\geq 1}$ es una secuencia en $\{0, 1, \ldots, N-1\}$ debe existir un elemento $\xi_0 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ que se repite infinitas veces, o sea existe un conjunto infinito $\mathbb{N}_0' \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\eta_0^n = \xi_0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0'$. Nuevamente para la subsucesión $(\eta_0^n)_{n\in\mathbb{N}_0'}$ debe existir un elemento $\xi_1 \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ que se repite infinitas veces, o sea existe un conjunto infinito $\mathbb{N}_1' \subseteq \mathbb{N}_0'$ tal que $\eta_1^n = \xi_1$ para todo $n \in \mathbb{N}_1'$. continuando con este proceso inductivamente, para cada $k \in \mathbb{N}$, encontramos un subconjunto infinito $\mathbb{N}_k'$ y un elemento $\xi_k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ tal que $\eta_k^n = \xi_k$

para todo $n \in \mathbb{N}'_k$ y que $\mathbb{N}'_k \supseteq \mathbb{N}'_{k-1} \supseteq \ldots \supseteq \mathbb{N}'_0$. Sea

$$\mathbb{N}'_k = \{n_1^k, n_2^k, n_3^k, \ldots\},$$

usando la técnica de la diagonal de Cantor, encontramos una subsucesión $(\eta^{n_k})_{k\geq 1}$ construida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_1^1 \\ n_2 &= n_2^2 \\ &\vdots \\ n_k &= n_k^k \\ n_k &= n_{k+1}^{k+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

como $\mathbb{N}'_{k+1} \subseteq \mathbb{N}'_k$, entonces $n_k^k < n_{k+1}^{k+1}$, entonces tenemos que $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ y que $(\eta^{n_k})_{k\geq 1}$ es una subsecuencia de $(\eta^n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} (\eta_0^{n_k}, \eta_1^{n_k}, \eta_2^{n_k}, \ldots, \eta_j^{n_k}, \ldots) = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots).$$

Por lo tanto $\lim_{k\to\infty} \eta^{n_k} = \xi$, donde $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots) \in \Sigma_N^+$. Por lo tanto (Σ_N^+, d^+) es compacto.

Ahora mostremos que (Σ_N, d) es compacto. Dada una sucesión $(\eta^n)_{n\geq 1}$ en (Σ_N, d), donde

$$\eta^n = (\ldots, \eta_{-2}^n, \eta_{-1}^n \eta_0^n, \eta_1^n, \eta_2^n \ldots) \in \Sigma_N,$$

por lo que demostramos anteriormente, existe una subsucesión $(n_k)_{k\geq 1}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} (\eta_0^{n_k}, \eta_1^{n_k}, \eta_2^{n_k}, \ldots, \eta_j^{n_k}, \ldots) = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots) \text{ donde } 0 \leq \xi_j \leq N-1.$$

Tomando $\mathbb{N}_1 = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$. Por el mismo argumento anterior existe una subsucesión $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}_1$ con $\mathbb{N}' = \{n'_1, n'_2, n'_3, \ldots\}$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} (\ldots, \eta_j^{n'_k}, \ldots, \eta_{-3}^{n'_k}, \eta_{-2}^{n'_k}, \eta_{-1}^{n'_k}) = (\ldots, \xi_j, \ldots, \xi_{-3}, \xi_{-2}, \xi_{-1}) \text{ donde } 0 \leq \xi_j \leq N-1.$$

Finalmente, como $\mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}'$ tenemos que $(\eta^{n'_k})_{k\geq 1}$ es una subsucesión de $(\eta^n)_{n\geq 1}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \eta^{n'_k} = \xi$, donde $\xi = (\ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots) \in \Sigma_N$. Esto implica que (Σ_N, d) es compacto.

$\square$

Proposición 2.3. *Los conjuntos Σ_N^+, Σ_N son conjuntos perfectos.*

Demostración. Para mostrar que un conjunto es perfecto, o sea que todos sus puntos son puntos de acumulación, es suficiente mostrar que dado un elemento existe una sucesión no constante que converge a este elemento.
Sea $\eta \in \Sigma_N$, donde $\eta = (\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_j, \ldots)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $a_n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ tal que $a_n \neq \eta_n$ y tome $\xi^n = (\xi_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$, donde $\xi_j^n = \eta_j$ para todo entero $j < n$ y $\xi_j^n = a_n$ para todo entero $j \geq n$, o sea

$$\xi^n = (\ldots, \eta_{-1}, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}, a_n, a_n, a_n, \ldots),$$

claramente $\lim_{n\to\infty} \xi^n = \eta$, e como $(\xi^n)_{n\geq 1}$ es una sucesión no constante convergiendo a $\eta \in \Sigma_N$, tenemos que η es punto de acumulación. Como η fue tomado arbitrariamente, tenemos que Σ_N es un conjunto perfecto.

De forma completamente análoga se demuestra que Σ_N^+ también es perfecto. □

Proposición 2.4. *Los conjuntos Σ_N^+, Σ_N son conjuntos totalmente disconexos, o sea, sus únicos subconjuntos conexos son puntos.*

Demostración. Haremos la demostración para Σ_N, pues la demostración para Σ_N^+ es completamente análoga. Sea $\Lambda \subset \Sigma_N$ un subconjunto conexo. Por contradicción, supongamos que Λ tiene mas de un punto, o sea existen $\eta, \xi \in \Lambda$ tal que $\eta \neq \xi$. Tomando $\eta = (\eta_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ y $\xi = (\xi_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, como $\eta \neq \xi$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\eta_n \neq \xi_n$. Considere los conjuntos

$$A = \Big\{(\ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, \eta_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) : \forall j \in \mathbb{Z} - \{n\}, a_j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}\Big\}$$

y

$$B = \Big\{(\ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, \xi_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots) : \forall j \in \mathbb{Z} - \{n\}, b_j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}\Big\}.$$

Como $\eta_n \neq \xi_n$, entonces $A \cap B = \emptyset$. Además, tomando $\epsilon < \dfrac{1}{2^{|n|}}$ para cualquier $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in A$ tenemos que se $\sigma = (\sigma_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_N$, es tal que $d(\sigma, \omega) < \epsilon$, entonces $\sigma \in A$. Con efecto, tenemos que

$$d(\sigma, \omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|\sigma_j - \omega_j|}{2^{|j|}} < \epsilon < \frac{1}{2^{|n|}},$$

entonces

$$\frac{|\sigma_n - \omega_n|}{2^{|n|}} < \frac{1}{2^{|n|}} \Rightarrow |\sigma_n - \omega_n| < 1 \Rightarrow \sigma_n = \omega_n = \eta_n,$$

por lo tanto, $\sigma \in A$ para todo $\sigma \in \Sigma_N$ tal que $d(\sigma, \omega) < \epsilon$, y como ω fue tomado arbitrariamente entonces concluimos que A es abierto.

De forma completamente análoga, se puede demostrar que B es un abierto de Σ_N. Luego, tenemos dos abiertos $A, B \subset \Sigma_N$ tal que $A \cap B = \emptyset$ y $\Lambda \subset A \cup B$.

Finalmente, tomando $\Lambda_1 = \Lambda \cap A$ y $\Lambda_2 = \Lambda \cap B$, tenemos que Λ_1 y Λ_2 son abiertos disjuntos en Λ, tal que $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \Lambda$, o sea Λ tiene una cisión no trivial, consecuentemente Λ no es conexo. Por lo tanto los únicos conjuntos conexos son de la forma $\Lambda = \{\eta\}$, o sea Σ_N es totalmente disconexo.

□

Definición 2.2. *Un conjunto K es un conjunto de Cantor si es cerrado, totalmente disconexo y un subconjunto perfecto de algún espacio métrico o topológico.*

Ejemplo: Los conjuntos Σ_N y Σ_N^+ son conjuntos de Cantor.

2.1.1 El shift de Bernoulli

Definición 2.3. *[4] Sean Σ_N^+ y Σ_N los espacios de secuencias unilaterales y bilaterales de N símbolos respectivamente.*

- *El **shift de Bernoullí unilateral** es la aplicación $\sigma^+ : \Sigma_N^+ \to \Sigma_N^+$ definido como*

$$\sigma^+(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

- *El **shift de Bernoullí bilateral** es la aplicación $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ definido como*

$$\sigma((x_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = (y_j)_{j\in\mathbb{Z}}, \text{ donde } y_j = x_{j+1}.$$

Proposición 2.5. *El Shift de Bernoulli bilateral es un homeomorfismo.*

Demostración. *Dado $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_N$. Dado $\epsilon > 0$ pequeño, digamos $\epsilon \leq \dfrac{1}{2^{n_0}}$, tome $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$, por lo tanto se $\eta = (\eta_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_N$ es tal que $d(\eta, \omega) < \delta$, entonces*

$$d(\eta, \omega) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|\eta_j - \omega_j|}{2^{|j|}} < \delta,$$

En particular $\dfrac{|\eta_j - \omega_j|}{2^{|j|}} < \dfrac{1}{2^{n_0+1}}$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$*, por lo tanto* $\eta_j = \omega_j$ *para todo* $j \in \mathbb{Z}$ *tal que* $|j| \leq n_0 + 1$*. Entonces*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|\eta_j - \omega_j|}{2^{|j|}} = \sum_{|j|>n_0+1} \frac{|\eta_j - \omega_j|}{2^{|j|}} < \delta,$$

Note que

$$\begin{aligned} d(\sigma(\eta), \sigma(\omega)) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|\eta_j - \omega_j|}{2^{|j-1|}} &= \sum_{|j|>n_0+1} \frac{|\eta_j - \omega_j|}{2^{|j-1|}} \\ &\leq \sum_{|j|>n_0+1} \frac{|\eta_j - \omega_j|}{2^{|j|-1}} \\ &\leq \sum_{|j|>n_0+1} 2\frac{|\eta_j - \omega_j|}{2^{|j|}} \\ &< 2\delta < \epsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto σ *es continua. Note que* σ *es invertible y que* $\sigma^{-1}(\eta_j)_{j\in\mathbb{Z}} = (\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$*, donde* $\omega_j = \eta_{j-1}$*. El mismo argumento que hicimos para mostrar que* σ *es continua demuestra que* σ^{-1} *también es continua, con esto concluimos que* σ *es un homeomorfismo.*

Observación: Procediendo análogamente como en la demostración de la Proposición 2.5 podemos demostrar que σ^+ es continua. Notemos que σ^+ no es invertible pues, con efecto, $\sigma^+(1,1,1,1,\ldots) = (1,1,1,\ldots) = \sigma^+(0,1,1,\ldots)$.

Proposición 2.6. [4] *Los Shifts de Bernoulli poseen las siguientes propiedades:*

(1) Son expansivos y

(2) topológicamente mixing.

Demostración. Demostraremos solo para el shift bilateral, la demostración para σ^+ es completamente análoga.

(1) Tome $\epsilon = \dfrac{1}{2}$. Sean $\eta, \omega \in \Sigma_N$ tal que

$$d(\sigma^n(\eta), \sigma^n(\omega)) < \frac{1}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Luego, para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos $\sigma^n(\xi) = (\xi'_j)$ donde $\xi'_j = \xi_{j+n}$, por lo tanto

$$|\eta_n - \omega_n| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|\eta_{j+n} - \omega_{j+n}|}{2^j} \leq \frac{1}{2},$$

por lo tanto debemos tener que $\eta_n = \omega_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, o sea $\omega = \eta$.

(2) Dados dos abiertos $U, V \subset \Sigma_n$, $\omega \in U$, $\eta \in V$ y $\epsilon > 0$ tal que $B(\omega, \epsilon) \subset U$ y $B(\eta, \epsilon) \subset V$. Tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{|j| \geq n_0} \frac{N}{2^j} < \epsilon.$$

Ahora, dado un elemento $n \geq n$ tome el elemento $\xi = (\xi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ tomado de la siguiente manera

$$\xi_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j \leq -n, \\ \eta_j, & \text{se } |j| < n, \\ \omega_{j-2n}, & \text{se } j \geq n, \end{cases}$$

Por definición, tenemos que $d(\eta, \xi) < \epsilon$ y que $d(\omega, \sigma^n(\xi)) < \epsilon$, o sea $\xi \in V$ y $\sigma^n(\xi) \in U$, esto implica que

$$\sigma^n(V) \cap U \neq \emptyset,$$

por lo tanto σ es topológicamente mixing. □

2.1.2 Cadenas de Markov

[4]

Definición 2.4. *Sea $\Lambda \subset \Sigma_N$ subconjunto invariantes y cerrado. La restricción $\sigma|_\Lambda$ es llamado de un* ***sistema dinámico simbólico****.*

Sea $A = (a_{i,j})_{i,j=0}^{N-1} \in M_N(\mathbb{R})$ una matriz de orden $N \times N$ cuyas entradas $a_{i,j}$ son ceros o unos, A también es llamada de 0-1 matriz. Sea

$$\Sigma_A := \Big\{ \omega \in \Sigma_N : a_{\omega_n, \omega_{n+1}} = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

En otras palabras, a matriz A determina todas las transiciones admisibles entre los símbolos $0, 1, 2, \ldots, N-1$. El conjunto Σ_A es obviamente invariante por el Shift bilateral.

Ejemplo 2.1. *Tome $N = 3$ y la matriz $A = (a_{i,j})_{i,j=0}^{2}$, dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{1,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{2,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

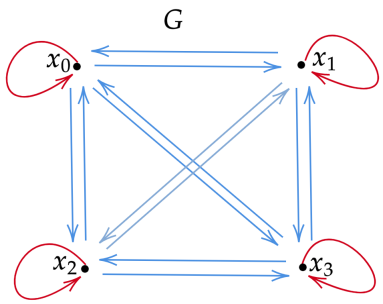
Dado un elemento $\omega \in \Sigma_A$, $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, *es tal que*

$$\omega_j = \begin{cases} 0, & si \quad \omega_{j+1} = 1 \\ 1, & si \quad \omega_{j+1} = 1 \\ 2, & si \quad \omega_{j+1} = 0,\ 2. \end{cases}$$

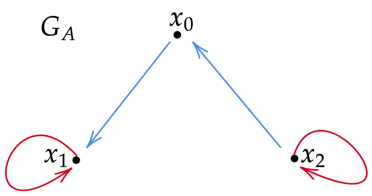
Definición 2.5. *[4] La restricción* $\sigma|_{\Sigma_A} := \sigma_A$ *es llamado de* ***Cadena de Markov topológica*** *determinada por la matriz* A. *La aplicación* σ_A *también es llamada de* ***subshift de tipo finito***.

Existe una representación geométrica útil para cadenas topológicas de Markov. Para eso identifiquemos los símbolos $0, 1, 2, , N-1$ con los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$. Sea A una matriz 0-1 para Σ_N, decimos que x_i está conectado con x_j si y solamente si $a_{ij} = 1$. De esta manera, obtenemos un grafo G_A con N vértices y una cierta cantidad de aristas orientadas.

Llamamos a una secuencia finita o infinita de vértices de G_A un camino admisible o camino admisible si cualquier vértice consecutivo de esta secuencia están conectados por una arista orientada. Un punto de Σ_A corresponde a un camino infinito en G_A con un origen marcado. La cadena de Markov G_A corresponde a mover el origen para el próximo vértice.



Ejemplo 2.2. *La matriz* A *dado en el Ejemplo 2.1, produce el siguiente grafo:*



Sea N_{ij}^m el numero de caminos admisibles partiendo de x_i a x_j de tamaño m y denotemos $A^m = (a_{ij}^m)_{i,j=0}^{N-1}$.

Lema 2.1. [4] *Para todo* $i, j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ *el numero de caminos admisibles de tamaño* m *partiendo de* x_i *a* x_j *es igual a* a_{ij}^m.

Demostración. Demostraremos por inducción sobre m. Para $m = 1$ sigue inmediatamente por definición de G_A que $N^1_{i,j} = a_{ij}$.

Ahora supongamos que el lema es valido para $m \in \mathbb{N}$, notemos que para cualquier $k \in \{0, \ldots, N-1\}$, todo camino admisible de tamaño m conectado con x_i y x_k produce exactamente un camino de tamaño $m+1$ conectando x_i con x_j si y solamente si $a_{kj} = 1$, por lo tanto

$$N^{m+1}_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} N^m_{ik} a_{kj},$$

y como por hipótesis de inducción tenemos que $N^m_{ik} = a^m_{ik}$, tenemos que

$$N^{m+1}_{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} a^m_{ik} a_{kj} = a^{m+1}_{ij}.$$

□

Corolario 2.1. *El número de puntos periódicos de periódo m de σ_A es igual a la traza de A^m, o sea*

$$\#(Per_m(\sigma_A)) = trz(A^m).$$

Demostración. Encontrar la cantidad de puntos periódicos de periódo m es igual a encontrar la cantidad de caminos admisibles de tamaño m partiendo y llegando al mismo punto. Por el Lema 2.1 la cantidad de caminos admisibles saliendo de x_i y llegando a x_i es igual a a^m_{ii}; por lo tanto,

$$\#(Per_m(\sigma_A)) = a^m_{11} + a^m_{22} + \ldots a^m_{N-1,N-1} = trz(A^m).$$

□

2.2 La Herradura de Smale

En esta sección, describiremos brevemente la herradura de Smale([8]), recibe este nombre porque fue introducido por Smale en 1965. La herradura de Smale es uno de los primeros ejemplos de dinámica caótica en un conjunto invariante que es un cantor. La herradura es un difeomorfismo que transforma un conjunto de puntos en el plano, utilizando operaciones topológicas básicas, que consisten en estirar y doblar el conjunto inicial. El efecto de las sucesivas operaciones de estiramiento y flexión es obtener un objeto de gran complejidad topológica, como veremos a continuación.

Construcción:

SeaQ=[0,1]$\times[0,1]$ el cuadrado unitario en $\mathbb{R}^2$. Tomemos los conjuntos $H_0,\ H_1 \subset Q$, definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{(x,y) \in Q : 0 \leq x \leq 1, y_1^0 \leq y_2^0\}, \\ H_1 &= \{(x,y) \in Q : 0 \leq x \leq 1, y_1^1 \leq y_2^1\} \end{aligned}$$

con $0 \leq y_1^0 < y_2^0 < y_1^1 < y_2^1 \leq 1$. Análogamente definimos los conjuntos $V_0,\ V_1 \subset Q$, como

$$\begin{aligned} V_0 &= \{(x,y) \in Q : 0 \leq y \leq 1, x_1^0 \leq x_2^0\}, \\ V_1 &= \{(x,y) \in Q : 0 \leq y \leq 1, x_1^1 \leq x_2^1\} \end{aligned}$$

con $0 \leq x_1^0 < x_2^0 < x_1^1 < x_2^1 \leq 1$. Llamamos a H_0 y H_1 de fajas horizontales, e a los conjuntos V_0 y V_1 de fajas verticales.

Asumamos inicialmente que f es un difeomorfismo en $\mathbb{R}^2$ tal que

(i) $f(H_j) = V_j$, para $j = 0, 1$,

(ii) $Q \cap f^{-1}(Q) = H_0 \cup H_1$ y

(iii) Para cada punto $p \in H_0 \cup H_1$, se tiene que

$$Df_p \begin{pmatrix} a_p & 0 \\ 0 & b_p \end{pmatrix},$$

de tal manera que $|a_p| = \mu < \dfrac{1}{2}$ y $|b_p| = \lambda > 2$.

El difeomorfismo $f : Q \to \mathbb{R}^2$ puede ser pensado como la composición de dos aplicaciones $f_1, f_2 : Q \to \mathbb{R}^2$, $f = f_2 \circ f_1$, donde $f_1(x,y) = (\mu x, \lambda y)$, o sea la aplicación f_1 estira el cuadrado Q en la dirección vertical hasta que $f_1(Q)$ tenga mas del doble de la altura que Q y, contrae en la dirección horizontal hasta que el ancho de $f_1(Q)$ sea menor que la mitad del ancho de Q. La segunda aplicación f_2, toma el rectángulo $f_1(Q)$ doblándolo formando una herradura, como en la siguiente figura:

Proposición 2.7. *El conjunto $\Lambda = \cap_{j\in\mathbb{Z}} f^j(Q)$ es un conjunto de Cantor, o sea, Λ es no vacío, compacto perfecto y totalmente disconexo.*

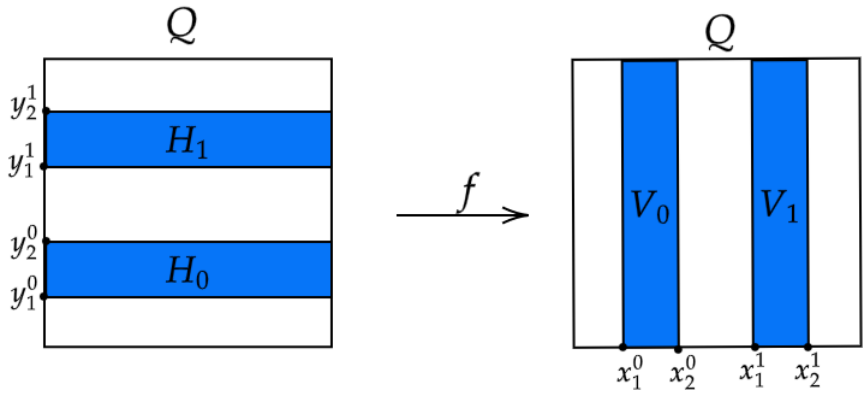


Figura 2.1: Imágenes de H_1 y H_2.

Demostración. Primero analicemos los conjuntos $\Lambda_m^n = \cap_m^n f^j(Q)$. Por inducción tenemos que $\Lambda_0^n = f(\Lambda_0^{n-1} \cap H_1) \cup f(\Lambda_0^{n-1} \cap H_1)$ es la unión de 2^n fajas verticales de ancho μ^n. Por lo tanto, la intersección infinita,

$$\Lambda_0^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_0^n = \mathcal{C}_1 \times [0,1]$$

es un conjunto de Cantor de segmentos de recta verticales. Además, $\mathcal{Q}_0^\infty$ es el conjunto de los puntos cuyos iterados negativos están en Q.

Análogamente, tenemos que Λ_{-n}^0 es la unión de 2^n fajas horizontales de ancho Λ^{-n}, por lo tanto, la intersección infinita

$$\Lambda_{-\infty}^0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_{-n}^0 = [0,1] \times \mathcal{C}_2$$

es un conjunto de Cantor de segmentos de recta horizontales. Además, Λ_0^∞ es el conjunto de los puntos cuyos iterados positivos están siempre en Q. Luego intersectamos los conjuntos Λ_0^n y Λ_{-n}^0, o sea, intersectamos las 2^n fajas verticales de ancho μ^n con las 2^n fajas horizontales de ancho λ^{-n}, obtenemos el conjunto Λ_{-n}^n el cual es la unión de $2^n \times 2^n = 2^{2n}$ rectángulos de dimensiones μ^n y λ^{-n}. En efecto, se $n = 0$ tenemos que $\Lambda_0^0 = Q$. Se $n = 1$ tenemos que Λ_{-1}^1 es la unión de 4 rectángulos de dimensiones μ y λ^{-1}. Luego para $n = 2$ tenemos que Λ_{-2}^2 es la unión de 16 rectángulos de dimensiones μ^2 y λ^{-2}. Continuando con el proceso inductivo, tenemos que

$$\Lambda = \Lambda_{-\infty}^\infty = \Lambda_0^\infty \cap \Lambda_{-\infty}^0 = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$$

es el producto de dos conjuntos de Cantor, por lo tanto Λ también es un conjunto de Cantor. Además, note que Λ es el conjunto de los puntos cuyos iterados, tanto positivos y negativos permanecen en Λ. $\square$

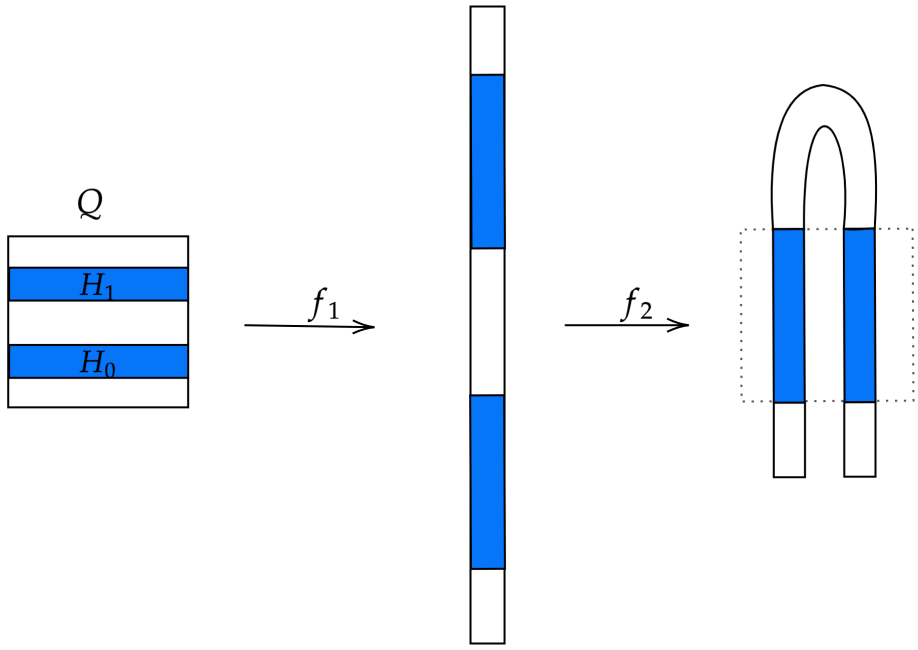


Figura 2.2: Composición de f_1 y f_2.

Proposición 2.8. *Si $p \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 = \Lambda$ y $q \in [0,1] \times \mathcal{C}_2$ tienen la misma coordenada y, entonces*

$$|f^j(p) - f^j(q)| \leq \mu^j, \ j \geq 0, \ y$$

$q \in comp_p(W^s(p) \cap Q)$ la componente conexa de $W^s(p) \cap Q$ tal que $q \in W^s(p)$.

Demostración. Con efecto, como p y q tienen la misma coordenada y, pongamos $p = (x_0, y)$ y $q = (x_1, y)$, entonces ambos están en el mismo segmento de recta horizontal contenido en $H_0 \cup H_1$. Luego, cuando aplicamos f en esos puntos, f contrae las distancias en la dirección horizontal con un factor de contracción igual a μ y f expande distancias en la dirección vertical, con factor de expansión igual

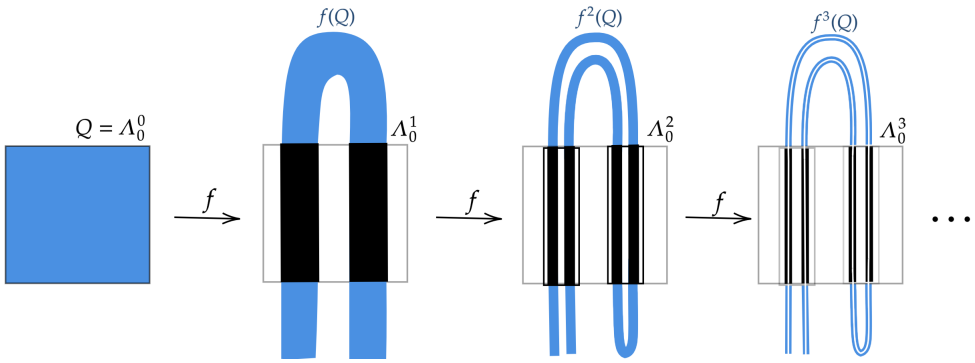


Figura 2.3: Construcción del conjunto Λ_0^∞.

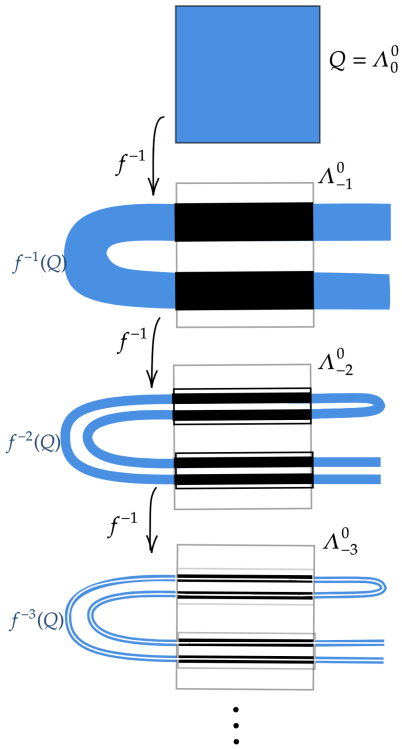


Figura 2.4: Construcción del conjunto $\Lambda_{-\infty}^0$.

a λ. Considere el camino $\alpha : [0,1] \to Q$, donde $\alpha(t) = p + t(q-p)$, usando la Desigualdad del valor

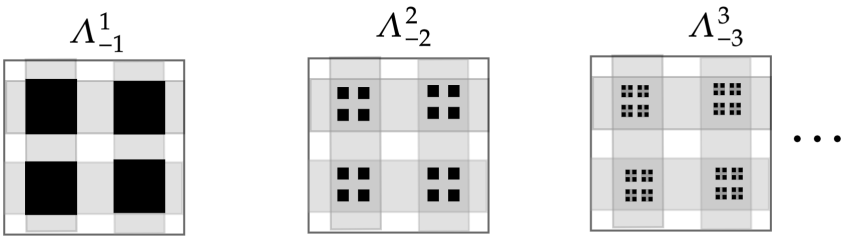


Figura 2.5: $\Lambda_0^n \cap \Lambda_{-n}^0$.

medio, tenemos que

$$\begin{aligned}
|f^j(p) - f^j(q)| &= |(f^j \circ \alpha)(0) - (f^j \circ \alpha)(1)| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \|(f^j \circ \alpha)'(t)\|.|0-1| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \|Df^j_{\alpha(t)}\alpha'(t)\| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \|(Df_{\alpha(t)})^j(p-q)\| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \| \begin{pmatrix} a_p^j & 0 \\ 0 & b_p^j \end{pmatrix} (x_0 - x_1, 0)\| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \|a_p^j(x_0 - x_1, 0)\| \\
&\leq \mu^j|x_0 - x_j| \leq \mu^j,
\end{aligned}$$

Por lo tanto,tenemos que $|f^j(p) - f^j(q)| \to 0$ cuando $j \to \infty$, por lo tanto $q_1 W^s(p)$. Además, q está en la misma componente conexa que p en $W^s(p)$. □

Note que los segmentos de recta horizontal son las variedades estables locales de los puntos de Λ. De forma análoga, se prueba que las variedades inestables locales de puntos de Λ son los segmentos de recta verticales que pasan por esos puntos.

2.3 Equivalencia dinámica entre la herradura de Smale y el Shift de Bernoullí

Demostraremos que la aplicación f restricto a la herradura de Smale es topológicamente conjugado al shift de Bernoulli bilateral del espacio de dos símbolos.

Proposición 2.9. *La aplicación shift de Bernoulli bilateral* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ *es topológicamente conjugada a* $f|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$.

Demostración. Definamos la aplicación $h : \Lambda \to \Sigma_2$, de la siguiente manera:

$$h(p) = (\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}} \text{ donde } f^j(p) \in H_{\omega_j} \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Veamos que h es una conjugación topológica entre $f|_\Lambda$ y σ. Con efecto,

- $h \circ f|_\Lambda = \sigma \circ h$**:** Con efecto, sea $p \in \Lambda$, $h(p) = \omega$ y $h(f(p)) = \eta$. Entonces $f^{j+1}(p) \in H_{\omega_{j+1}}$ pero $f^{j+1}(q) = f^j \circ f(p) \in H_{\eta_j}$. Por lo tanto, $\omega_{j+1} = \eta_j$ y $\sigma(\omega) = \eta$. Luego, $\sigma(h(p)) = h(f(p))$, en otras palabras, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Lambda \arrow[d, "h"] \\ \Sigma_2 \arrow[r, "\sigma"'] & \Sigma_2 \end{tikzcd}$$

- h **es continua.** Considere $p \in \Lambda$ y $\omega = h(p)$. Dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j>|n_0|} \frac{N}{2^{|j|}} < \epsilon.$$

como $f|_\Lambda$ es homeomorfismo, existe $\delta > 0$ tal que para todo $q \in \Lambda$ tal que $\|p-q\| < \delta$ entonces $f^j(q) \in H_{\omega_j}$, para todo $j \in \{-n_0, \ldots, n_0\}$. Por lo tanto, si $h(q) = (\eta_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ entonces $\eta_j = \omega_j$ para todo $j \in \{-n_0, \ldots, n_0\}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} d(h(p), h(q)) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|\omega_j - \eta_j|}{2^{|j|}} \\ &= \sum_{|j|>n_0} \frac{|\omega_j - \eta_j|}{2^{|j|}} \\ &< \sum_{|j|>n_0} \frac{N}{2^{|j|}} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Esto implica que h es continua.

- h **es inyectiva.** Sean $p, q \in \Lambda$, tal que $h(p) = h(q) = \omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}}$. Dado cualquier $j \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$f^{-j}(p), f^{-j}(q) \in H_{\omega_{-j}},$$

por lo tanto debemos tener que $p, q \in f^j(H_{\omega_{-j}})$. Como j fué tomado arbitrariamente, tenemos que

$$p, q \in \bigcap_{j=1}^{\infty} f^j(H_{\omega_{-j}}),$$

esto implica que p y q están en el mismo segmento de recta vertical. Análogamente, tenemos que $p, q \in \bigcap_{j=-\infty}^{0} f^j(H_{\omega_{-j}})$, y por lo tanto, p y q están en el mismo segmento de recta horizontal. Así concluimos que $p = q$.

- h **es sobreyectiva.** Dado $\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_2$, primero demostraremos por inducción que el conjunto $\bigcap_{j=1}^{n} f^j(H_{\omega_{-j}})$ es una faja vertical con ancho μ^n. Con efecto, para $n = 1$, tenemos que $\bigcap_{j=1}^{1} f^j(H_{\omega_{-j}}) = f(H_{\omega_{-1}}) = I_{\omega_{-1}}$, la cual es una banda horizontal de ancho igual a μ. Ahora, supongamos que para $n-1 \leq 1$ tenemos que $\bigcap_{j=1}^{n-1} f^j(H_{\omega_{-j}})$ es una faja vertical de ancho μ^{n-1}, y como

$$\bigcap_{j=1}^{n} f^j(H_{\omega_{-j}}) = f\Big(\bigcap_{j=1}^{n} f^{j-1}(H_{\omega_{-j}})\Big) \cap f(H_{\omega_{-1}}), \text{ y}$$

por hipótesis de inducción $\bigcap_{j=2}^{n} f^{j-1}(H_{\omega_{-j}})$ es una banda vertical de ancho igual a μ^{n-1}, resulta que $\bigcap_{j=1}^{n} f^{j-1}(H_{\omega_{-j}})$ es una banda vertical de ancho μ^n. Luego, haciendo n tender al infinito, concluimos que $\bigcap_{j=1}^{\infty} f^{j-1}(H_{\omega_{-j}})$ es un segmento vertical.
Análogamente, $\bigcap_{j=-\infty}^{0} f^{j-1}(H_{\omega_{-j}})$ es un segmente de recta horizontal, y el conjunto $\bigcap_{-\infty}^{\infty} f^{j-1}(H_{\omega_{-j}})$ esta formado por un punto p. Para este punto $p \in \Lambda$, tenemos que que $h(p) = \omega$ y por lo tanto, h es sobreyectiva.

Dado que el conjunto Λ es compacto y, h es continua y biyectiva, tenemos que h^{-1} es continua y por lo tanto h es un homeomorfismo. □

Note que en la demostración de la Proposición 2.9, la conjugación entre $f|_\Lambda$ e σ fue obtenida codificando la trayectoria de cada punto $x \in \Lambda$, donde a cada punto le correspondía un único "código" $\omega \in \Sigma_2$. Existen unas dinámicas especiales definidas en el toro $\mathbb{T}^2$ llamadas *Anosov lineales*, las cuales fácilmente pueden ser relacionadas con una dinámica simbólica por medio de semi-conjugaciones, como veremos a continuación para un ejemplo especifico; pero antes entremos en contexto.

Dinámica simbólica para un automorfismo en el Toro

Sea $SL(\mathbb{Z}, n)$ el conjunto de las matrices con entradas enteras y determinante igual a 1. Note que cuando $A \in SL(\mathbb{Z}, n)$ entonces $A(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$, y como $\det(A) = 1$, entonces $A^{-1} \in SL(\mathbb{Z}, n)$ así $A^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$, por lo tanto $A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Consecuentemente, la transformación lineal A induce un difeomorfismo en el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Denotaremos este difeomorfismo por f_A, llamado también de **Anosov lineal**. O sea, tenemos que el siguiente diagrama conmuta, donde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ es la proyección canónica:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{T}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{T}^n \end{tikzcd}$$

Proposición 2.10. *Si $f_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ es un Anosov lineal, inducido por $A \in SL(\mathbb{Z}, n)$, entonces*

$$\overline{Per(f_A)} = \mathbb{T}^n.$$

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos el conjunto

$$Q(k) = \pi(\{\frac{i_1}{k}, \ldots, \frac{i_n}{k} |\ i_j \in \mathbb{Z}\}).$$

Así, tenemos que $Q(k) \subset \mathbb{T}^n$ y que la cardinalidad de $Q(k)$ es finita, para ser mas precisos tenemos que $\#(Q(k)) = k^n$. Claramente tenemos que

$$f_A(Q(k)) = Q(k),$$

O sea f_A restricto a $Q(k)$ es una permutación de los elementos de $Q(k)$ y como todo elemento de por medio de una permutación regresa a el mismo después de una cantidad determinada de iterar la misma permutación, concluimos que todos los puntos de $Q(k)$ son periódicos. Luego, tenemos que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Q(k) \subset Per(f_A).$$

Como $\cup_{k=1}^{\infty} Q(k)$ es denso en $\mathbb{T}^n$ concluimos que $\overline{Per(f_A)} = \mathbb{T}^n$. □

Como $Per(f_A) \subset \Omega(f_A)$, una consecuencia inmediata de esta proposición es el siguiente corolario.

Corolario 2.2. *El conjunto de los puntos no errantes $\Omega(f_A) = \mathbb{T}^n$.*

Una distancia natural en $\mathbb{T}^n$ es $d : \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n \to [0, +\infty)$, definido como

$$d(p, q) = \min_{\pi(x)=p, \pi(q)=y} \|x - y\|.$$

Observación 2.2. *Note que con esta distancia, si $f_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ es un Anosov lineal, inducido por $A \in SL(\mathbb{Z}, n)$, entonces $\pi(0)$ es punto fijo hiperbólico con*

$$\begin{aligned} W^s(\pi(0), f_A) &= \pi(W^s(0, A))) \quad y \\ W^u(\pi(0), f_A) &= \pi(W^u(0, A))). \end{aligned}$$

Especialmente, para difeomorfismos de Anosov lineal pueden ser representados por una dinámica simbólica, como veremos a continuación para una matriz A especifica. Fijemos $A \in SL(\mathbb{Z}, 2)$, dado por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que $det(A) = 1$, por lo tanto induce un difeomorfismo f_A en $\mathbb{T}^2$. La matriz A tiene dos autovalores $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$, con

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ y } \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Dos autovectores asociados a λ_1 y λ_2 son $v_1(1 - \sqrt{5}, 2)$ y $v_2(1 + \sqrt{5}, 2)$ respectivamente. Por lo tanto las rectas L_1 y L_2 que pasan por el origen y paralelas a v_1 y V_2 respectivamente, son invariantes por A, note también que como $0 < \lambda_1 < 1$ entonces A contrae distancias en la dirección de v_1 y de la misma manera, como $1 < \lambda_2$ entonces A expande distancias en la dirección de v_2.

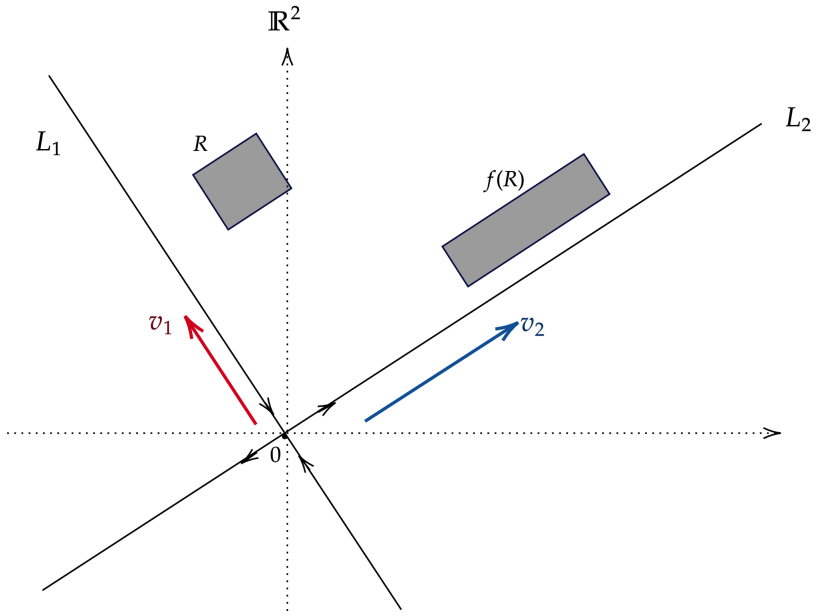


Figura 2.6: Deformación de un conjunto R por medio de una transformación Hiperbólica.

Note que la aplicación lineal definido por A en $\mathbb{R}^2$, o sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que $A(x, y) = (2x + y, x + y)$. Para esta matriz en particular, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *[4] La aplicación $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es topológicamente semi-conjugada la cadena de*

Markov $\sigma_B : \Sigma_B \to \Sigma_B$*, donde la matriz de transición es dada por*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Sea R_0 y R_1 los rectángulos paralelos a los vectores propios de la matriz A como en la siguiente ilustración:

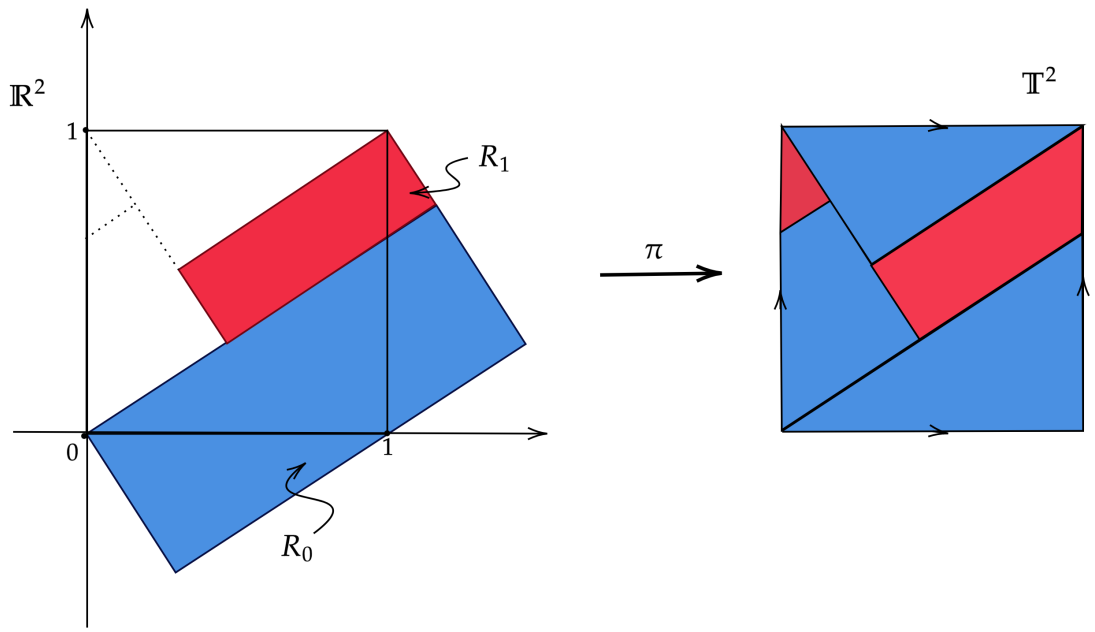


Figura 2.7: Imagen de los conjuntos R_0 y R_1 por medio de π.

Sea $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ la proyección natural. Note que $\pi(R_0 \cap R_1) = \mathbb{T}^2$. Notemos que $A(R_0)$ y $A(R_1)$ son rectángulos con lados paralelos a los autovectores de A. Las intersecciones $f_A(\pi(R_i)) \cap \pi(R_j)$ con $j = 0, 1$ definen cinco rectángulos $S_0, S_1, \ldots, S_4$ en $\mathbb{R}^2$, los cuales tienen lados paralelos a los vectores propios de A.

Notemos que $R_0 = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ y $R_1 = S_3 \cup S_4$, para abreviar la notación, tomemos $S'_k = \pi(S_k)$ y

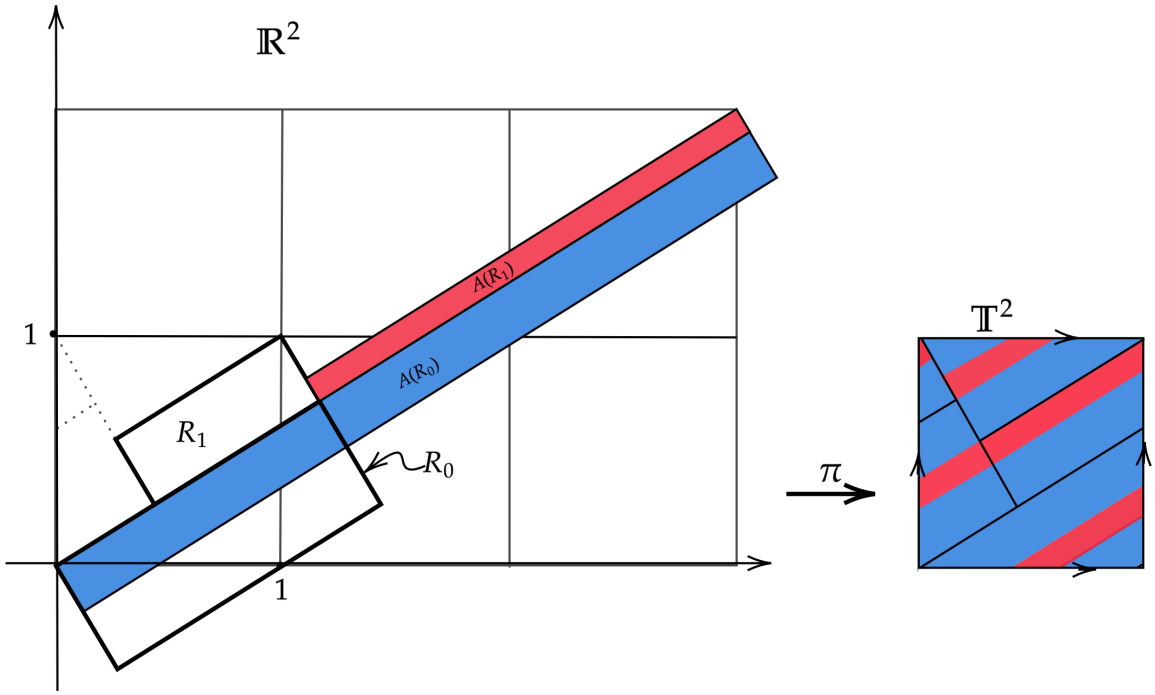


Figura 2.8: Reubicación de las imágenes de los conjuntos R_0 y R_1 por medio de π.

$R'_k = \pi(R_k)$, entonces

$$R'_0 = S'_0 \cup S'_1 \cup S'_2, \qquad R'_1 = S'_3 \cup S'_4,$$
$$f_A(R'_0) = S'_0 \cup S'_2 \cup S'_3, \qquad f_A(R'_1) = S'_1 \cup S'_4,$$

Notemos también que $A(S_0), A(S_1)$ y $A(S_2)$ son rectángulos que se extienden por todo $A(R_0)$ y que $A(S_3)$ y $A(S_4)$ son rectángulos que se extienden por todo $A(R_1)$, como muestra la siguiente figura Por lo tanto, si $j = 0, 1, 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} f_A(S'_j) \cap S'_0 &\neq \emptyset, \\ f_A(S'_j) \cap S'_1 &= \emptyset, \\ f_A(S'_j) \cap S'_2 &\neq \emptyset, \\ f_A(S'_j) \cap S'_3 &\neq \emptyset, \text{ y} \\ f_A(S'_j) \cap S'_4 &= \emptyset \end{aligned}$$

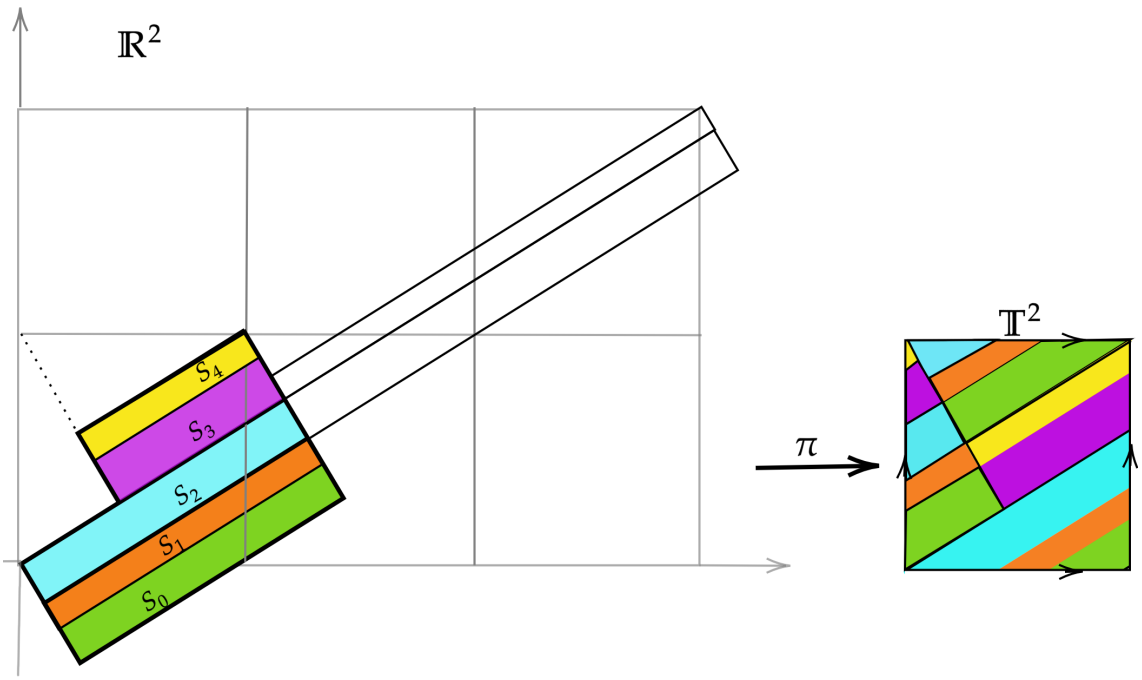


Figura 2.9: Elección de los conjuntos $S_1, , S_4$.

Cuando $j = 3, 4$, tenemos que

$$\begin{aligned} f_A(S'_j) \cap S'_0 &= \emptyset, \\ f_A(S'_j) \cap S'_1 &\neq \emptyset, \\ f_A(S'_j) \cap S'_2 &= \emptyset, \\ f_A(S'_j) \cap S'_3 &= \emptyset, \text{ y} \\ f_A(S'_j) \cap S'_4 &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $f_A(S'_j) \cap S'_k = \emptyset$ si $b_{jk} = 0$, y $f(S'_j) \cap S'_k \neq \emptyset$ si $b_{jk} = 1$.

Finalmente para construir una conjugación $h : \Sigma_B \to \mathbb{T}^2$, entre σ_B y f_A, notemos que para cualquier rectángulo R con lados paralelos a los autovectores de A entonces sus iteradas $A^n(S_j)$ también son rectángulos con lados paralelos a los autovectores de A y que la altura de $A^n(R)$ tiende a cero cuando $n \to \infty$, por lo tanto, la altura de $\pi(A^n(R)) = f_A^n(\pi(R))$ también tiende a cero cuando $n \to +\infty$. Lo mismo sucede con el largo del rectángulo $A^{-n}(R)$ y $f_A^n(\pi(R))$.

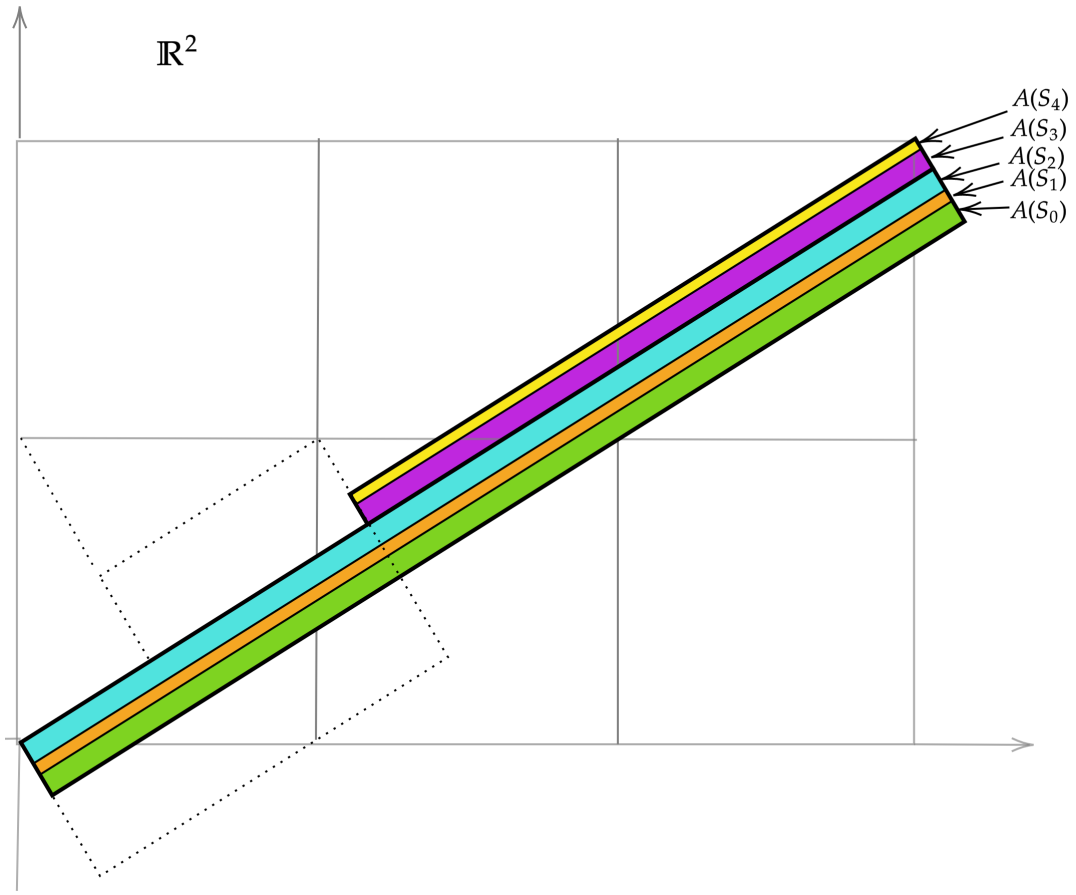


Figura 2.10: Imágenes de los conjuntos $S_1, , S_4$.

Notemos también que, dado $\omega \in \Sigma_A$, con $\omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\omega_k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$Q_n = \bigcap_{k=-n}^{n} f_A^k(S'_{\omega_k})$$

es un rectángulo, el cual está contenido en los rectángulos $f_A^{-n}(S'_{\omega_{-n}})$ y $f_A^n(S'_{\omega_n})$, por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(Q_n) = 0.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que Q_n es compacto, pues es un rectángulo y

$$Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset Q_4 \supset \dots$$

es una sucesión decreciente de conjuntos compactos, entonces

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n = \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} f_A^k(S'_{\omega_k}) \neq \emptyset,$$

y como $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(Q_n) = 0$, entonces $\cap_{n=1}^{\infty} Q_n$ consiste de un solo punto, el cual lo denotamos por $h(\omega)$, o sea

$$h(w) = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

Así, finalmente obtenemos una aplicación $h : \Sigma_B \to \mathbb{T}^2$, procediendo exactamente como en la herradura de Smale tendremos que h es continua y que obviamente $h \circ \sigma_B = f_A \circ h$. $\square$

Capítulo 3:

Caos y condiciones para su existencia

Era un día como otro cualquiera de 1963, Edward N. Lorenz se encontraba en su despacho del MIT estudiando un modelo atmosférico mediante el cual pretendía comprender por qué los patrones climatológicos, que siguen pautas razonablemente periódicas, nunca se repiten exactamente. El modelo en cuestión se trataba de un cálculo numérico del siguiente sistema dinámico de tres ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} x' &= -10x + 10y \\ y' &= 28x - y - xz \\ z' &= -\dfrac{8}{3}z + xy, \end{cases}$$

las cuales simulan el fenómeno de la convección en la atmósfera. Por aquel entonces la velocidad de los ordenadores era muy baja, por lo que, tras introducir unas condiciones iniciales que ya había usado con anterioridad, Lorenz salió de su despacho en busca de una taza de café. Al regresar se sorprendió de que los resultados fueran totalmente diferentes de los obtenidos en la ocasión anterior; al principio pensó que se trataba de un fallo del ordenador, pero después se dió cuenta de que los valores iniciales que había introducido en el ordenador no eran exactamente iguales que los usados con anterioridad, mientras que los primeros constaban de seis dígitos, los de ahora estaban redondeados a tres dígitos.

Unos meses después de este suceso, aparecía un artículo firmado por Lorenz en el que se introducían los conceptos de atractor caótico y efecto mariposa. Un atractor es el conjunto de puntos hacia los cuales tiende un sistema dinámico tras un número elevado -infinito sería el ideal- de iteraciones, el apellido caótico le viene por su gran sensibilidad a variaciones en las condiciones iniciales y a que los valores obtenidos nunca se repiten exactamente.

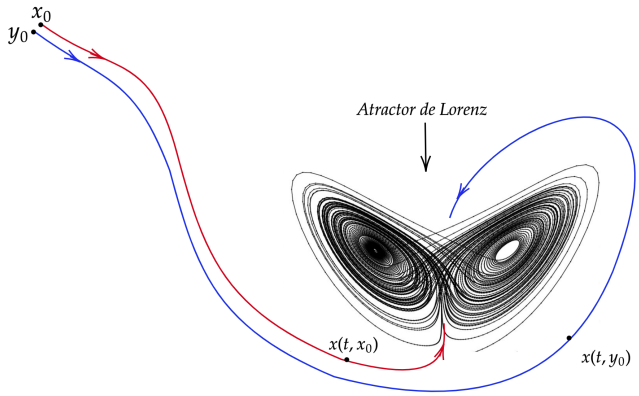


Figura 3.1: Atractor de Lorenz.

El efecto mariposa es una metáfora de la dependencia de las condiciones iniciales, de manera que una perturbación tan pequeña como el batir de unas alas de mariposa en Brasil puede producir un tornado en Texas.

3.1 Entropía topológica

La entropía topológica es una forma de medir la tasa de complejidad de un sistema dinámico, que se traduce como la impredecibilidad de la evolución del sistema. En este contexto, se puede decir que un sistema es caótico si su entropía topológica es positiva. Una de las propiedades de la entropía es que es invariante bajo conjugación topológica, de la cuál haremos uso para calcular entropía de algunos sistemas por medio de conjugaciones. Definimos la entropía topológica solo para un sistema dinámico en un espacio métrico compacto (X, d). La métrica d se usará en la definición, pero luego comprobaremos que la entropía depende solo de la topología ya que las métricas equivalentes conducen al mismo valor de la entropía topológica.

Proposición 3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una aplicación continua. Dado un número entero positivo n, entonces $d_{n,f} : X \times X \to [0, \infty)$ definido por*

$$d_{n,f}(x, y) = \sup_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(x), f^j(y))$$

es una métrica en X.

Demostración. Dados $x, y, z \in X$, entonces

(i) como $d_{n,f}(x,y) \geq d(x,y)$, y como d es métrica en X, entonces $d_{n,f}(x,y) = 0$ si y solamente si $d(x,y) = 0$, o sea $d_{n,f}(x,y) = 0$ si y solamente si $x = y$.

(ii) la simetría de $d_{n,f}$ es consecuencia inmediata de la simetría de d, pues

$$d_{n,f}(x,y) = \sup_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(x), f^j(y)) = \sup_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(y), f^j(x)) = d_{n,f}(y,x).$$

(iii) Como d es métrica, entonces $d(f^j(x), f^j(z)) \leq d(f^j(x), f^j(y)) + d(f^j(y), f^j(z))$ para todo $j \leq 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned} d_{n,f}(x,z) &= \sup_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(x), f^j(z)) \\ &\leq \sup_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(x), f^j(y)) + d(f^j(y), f^j(z)) \\ &\leq \sup_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(x), f^j(y)) + \sup_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(y), f^j(z)) \\ &= d_{n,f}(x,y) + d_{n,f}(y,z). \end{aligned}$$

□

Definición 3.1. *Dado $K \subset X$, $\epsilon > 0$ y un entero $n > 0$, entonces*

- *Un subconjunto $E \subset K$ es llamado (n,ϵ)-separado si $d_{n,f}(x,y) > \epsilon$ para todo $x, y \in E$, $x \neq y$.*

- *El número de órbitas distintas de longitud (n,ϵ) para K es definido por el número*

$$r_{sep}(n,\epsilon,K,f) := \text{máx}\{\#(E) : E \subset K \textit{ es un conjunto } (n,\epsilon) - \textit{separado para } f\}.$$

- *La tasa de crecimiento de $r_{sep}(n,\epsilon,K,f)$ conforme n aumenta, es definida como*

$$h_{sep}(K,f,\epsilon) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log r_{sep}(n,\epsilon,K,f)}{n},$$

y

$$h_{sep}(K,f) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log r_{sep}(n,\epsilon,K,f)}{n}.$$

Note que $r_{sep}(n,\epsilon,K,f)$ mide la cantidad de órbitas de tamaño n con error $\epsilon > 0$. En otras palabras, si $\mathcal{O}^n(x) = \{f^j(x) : 0 \leq x \leq n-1\}$ es la orbita de tamaño n de x; para $\epsilon > 0$, las órbitas de tamaño n de dos puntos $x, y \in K$ son ϵ-indistinguibles si y solamente si $d_{n,f}(x,y) \leq \epsilon$, entonces el número $r_{sep}(n,\epsilon,K,f)$ representa la cantidad de órbitas indistinguibles para los puntos de K.

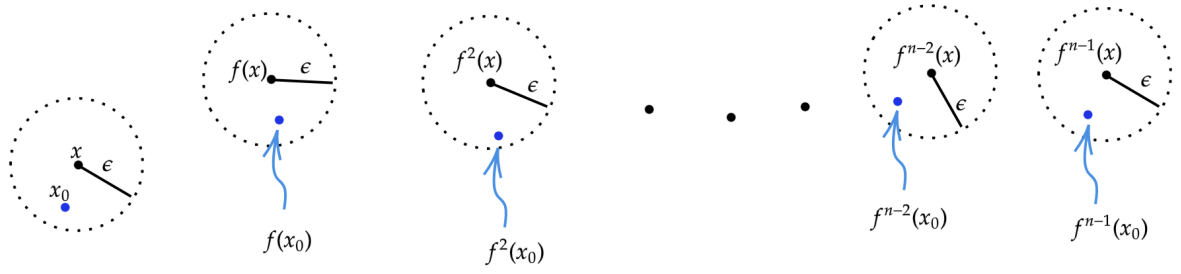


Figura 3.2: órbitas de dos puntos ϵ-indistinguibles.

Definición 3.2. *[4] Cuando $K = X$, definimos $r_{sep}(n, \epsilon, f) = r_{sep}(n, \epsilon, X, f)$, $h_{sep}(\epsilon, f) = h_{sep}(\epsilon, X, f)$ y $h_{sep}(f) = h_{sep}(X, f)$. Llamamos entropía topológica de f al número $h_{top}(f) = h_{sep}(f)$, o sea*

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log r_{sep}(n, \epsilon, f)}{n}.$$

Observación:

- Note que si $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$, entonces todo conjunto (n, ϵ_2)-separado también es un conjunto (n, ϵ_1)-separado, entonces

  $$r_{sep}(n, \epsilon_2, f) \leq r_{sep}(n, \epsilon_1, f),$$

  por lo tanto $h_{sep}(\epsilon, f)$ es una función monótona decreciente en función de ϵ, o sea, si $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$, entonces $h_{sep}(\epsilon_2, f) \leq h_{sep}(\epsilon_1, f)$. Por lo tanto el límite que define $h_{top}(f)$ siempre existe y

  $$0 \leq h_{top}(\epsilon, f) \leq h_{top}(f) \leq +\infty, \quad \text{para todo} \quad \epsilon > 0.$$

- Como $\lim_{\epsilon \to 0} h_{sep}(\epsilon, f)$ existe, entonces para cualquier subsucesión $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\epsilon_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\lim_{k \to \infty} \epsilon_k = 0$, se tiene que

  $$\lim_{\epsilon \to 0^+} h_{sep}(\epsilon, f) = \lim_{k \to +\infty} h_{sep}(\epsilon_k, f) = h_{top}(f).$$

Definición 3.3.

- *Una aplicación continua $f : X \to X$ es llamada de caótica o dinámicamente caótica si existe un conjunto compacto e invariante $\Lambda \subset X$ tal que $h_{top}(f|_\Lambda) > 0$.*

- *Sea M una variedad riemanniana. Un flujo $F : \mathbb{R} \times M \to M$ es llamado caótico si existe un conjunto compacto invariante $\Lambda \subset M$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $F_{t_0}|\Lambda : \Lambda \to \Lambda$, $x \mapsto F(t_0, x)$, tal que*

  $$h_{top}(F_{t_0}|\Lambda) > 0.$$

Proposición 3.2. *Si X es un conjunto finito, entonces la entropía de cualquier aplicación continua $f : X \to X$ es cero.*

Demostración. Es inmediato, pues, en este caso existe $C > 0$, tal que para todo $\epsilon > 0$ y $n > 0$ tal que $r_{sep}(n, f, \epsilon) \leq C$, por lo tanto

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log r_{sep}(n, \epsilon, f)}{n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log(C)}{n} = 0.$$

□

Teorema 3.1. *[4] Sea X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una aplicación continua y un entero $k \geq 1$. Entonces la entropía de f^k es igual a k-veces la entropía de f, o sea*

$$h_{top}(f^k) = kh_{top}(f).$$

Demostración. Dado $\mathcal{S} \subset X$ un conjunto (n, ϵ)-separado para f^k, entonces $\mathcal{S}$ es un conjunto (nk, ϵ)-separado para f, pues

$$\{f^{ki}(x) : 0 \leq i < n\} \subset \{f^i(x) : 0 \leq i < nk\},$$

por lo tanto $r_{sep}(n, \epsilon, f^k) \leq r_{sep}(nk, \epsilon, f)$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
h_{top}(f^k) &= \lim_{\epsilon\to0^+} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log r_{sep}(n, \epsilon, f^k)}{n} \\
&\leq \lim_{\epsilon\to0^+} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log r_{sep}(nk, \epsilon, f)}{n} \\
&= \lim_{\epsilon\to0^+} \limsup_{n\to+\infty} k(\frac{\log r_{sep}(nk, \epsilon, f)}{nk}) \\
&= k(\lim_{\epsilon\to0^+} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log r_{sep}(nk, \epsilon, f)}{nk} \\
&\leq kh_{top}(f).
\end{aligned}$$

Por otro lado, como X es compacto entonces f es uniformemente continua, así, dado $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que se $d(x, y) \leq \delta$ entonces $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \epsilon$. Por lo tanto cualquier conjunto (nk, ϵ)-separado para f es también un conjunto (n, δ)-separado para f^k, por lo tanto $r_{sep}(n, \delta, f^k) \geq r_{sep}(nk, \epsilon, f)$ donde ϵ es el mismo para todo n, luego

$$\begin{aligned}
kh_{top}(f) &= k \lim_{\epsilon\to0^+} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log r_{sep}(nk, \epsilon, f)}{nk} \\
&\leq \lim_{\epsilon\to0^+} \limsup_{n\to+\infty} k\frac{\log r_{sep}(n, \delta, f)}{nk} \\
&= \lim_{\epsilon\to0^+} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log r_{sep}(n, \epsilon, f)}{n} \\
&\leq h_{top}(f^k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $h_{top}(f^k) = kh_{top}(f)$. □

Teorema 3.2. *[4] Sea X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ un homeomorfismo, entonces*

$$h_{top}(f^{-1}) = h_{top}(f).$$

Demostración. Sea B un conjunto (n, ϵ)-separado para f^{-1} tal que $r_{sep}(n, \epsilon, f^{-1}) = \#(B)$. Para todo $x, y \in B$ tenemos que $d(f^{-k}(x), f^{-k}(y)) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq k \leq n-1$. Tomando $A = f^{-n+1}(B)$, entonces para cada $z, w \in A$ existen $x, y \in B$ tal que $f^{-n+1}(x) = z$ y $f^{-n+1}(y) = w$, luego

$$d(f^k(z), f^k(w)) = d(f^{k-n+1}(x), f^{k-n+1}(y)) = d(f^{-(n-k-1)}(x), f^{-(n-k-1)}(y)) \geq \epsilon,$$

por lo tanto A es un conjunto (n, ϵ)-separado para f, y como f es homeomorfismo, tenemos que $\#(A) = \#(B)$, entonces

$$r_{sep}(n, \epsilon, f) \geq \#(A) = \#(B) = r_{sep}(n, \epsilon, f^{-1})$$

Por lo tanto $h_{top}(f) \geq h_{top}(f^{-1})$. Análogamente, invirtiendo papeles de f y f^1, obtenemos la otra desigualdad, y por lo tanto

$$h_{top}(f) = h_{top}(f^{-1}).$$

□

Juntando los Teoremas 3.1 y 3.2, inmediatamente obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1. *Sea X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ un homeomorfismo y $k \in \mathbb{Z}$, entonces*

$$h_{top}(f^k) = |k| h_{top}(f).$$

Teorema 3.3. *[4] Sea f una aplicación continua sobre un espacio métrico compacto X. Asuma que $X = X_1 \cup \ldots \cup X_k$ es una descomposición de X en subconjuntos compactos que están a una distancia positiva. Entonces*

$$h(f) = \max_{1 \leq i \leq k} h_{top}(f|_{X_i}).$$

Demostración. *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, de tal manera que para todo $i \neq j$, tengamos que*

$$\max_{1 \leq i \leq k} d(X_i, X_j) < \epsilon,$$

por lo tanto

$$r_{sep}(n, \epsilon, f) = \sum_{i=1}^{k} r_{sep}(n, \epsilon, f|_{X_i}).$$

Así, para cada $n > 0$ y cada j, deberíamos tener que

$$r_{sep}(n, \epsilon, f|_{X_j}) \leq r_{sep}(n, \epsilon, f) \leq k \max_{1 \leq i \leq k} r_{sep}(n, \epsilon, f|_{X_i}).$$

Luego hacemos $n \to \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned}
h_{top}(\epsilon, f|_{X_j}) &\leq h_{top}(\epsilon, f) \\
&= \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log r_{sep}(n, \epsilon, f)}{n} \\
&\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{\log(k \max_{1 \leq i \leq k} r_{sep}(n, \epsilon, f|_{X_i}))}{n}. \\
&= \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log \max_{1 \leq i \leq k} r_{sep}(n, \epsilon, f|_{X_i})}{n} + \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log k}{n} \\
&= \max_{1 \leq i \leq k} \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log r_{sep}(n, \epsilon, f|_{X_i})}{n} + 0 \\
&= \max_{1 \leq i \leq k} h_{top}(\epsilon, f|_{X_i}).
\end{aligned}$$

Así $h_{top}(\epsilon, f) = \max_{1 \leq i \leq k} h_{top}(\epsilon, f|_{X_i})$.
Ahora tomemos $\epsilon_m = \dfrac{1}{m}$. Como $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$ es un conjunto finito, podemos encontrar un elemento $j_0 \in I_k$ tal que

$$\max_{1 \leq i \leq k} h_{top}(\epsilon, f|_{X_i}) = h_{top}(\epsilon_m, f|_{X_{j_0}})$$

para una cantidad infinita de índices m. Así, obtenemos una subsucesión $(\epsilon_{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\max_{1 \leq i \leq k} h_{top}(\epsilon, f|_{X_i}) = h_{top}(\epsilon_{m_l}, f|_{X_{j_0}}),$$

o sea $h_{top}(\epsilon_{m_k}, f) = h_{top}(\epsilon_m, f|_{X_{j_0}})$, luego

$$h_{top}(f) = \lim_{l \to +\infty} h_{top}(\epsilon_{m_l}, f) = \lim_{l \to +\infty} h_{top}(\epsilon_{m_l}, f|_{X_{j_0}}) = h_{top}(f|_{X_{j_0}}).$$

Note que como $X_i \subset X$ debemos tener que $h_{top}(f|_{X_i}) \leq h_{top}(f)$ para todo $i \in I_k$, esto implica que

$$\max_{1 \leq i \leq k} h_{top}(f|_{X_i}) = h_{top}(f|_{X_{j_0}}),$$

e así finalmente obtenemos que

$$h_{top}(f^{-k}) = |k| h_{top}(f).$$

Teorema 3.4. *[4] Sean X y Y dos espacios métricos, con métricas d^X y d^Y respectivamente. Sea $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, tal que existe una aplicación continua $\phi : X \to Y$ tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$ entonces*

(a) Se ϕ es sobreyectiva, entonces $h_{top}(g) \leq h_{top}(f)$.

(b) Se ϕ es inyectiva, entonces $h_{top}(g) \geq h_{top}(f)$.

Demostración. (a) Como X es compacto, entonces ϕ es uniformemente continua, por lo tanto, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d^X(x_1, x_2) \geq \delta$ siempre que $d^Y(\phi(x_1), \phi(x_2)) \geq \epsilon$. Sea $E(n, \epsilon, g) \subset Y$ un conjunto (n, ϵ)-separado para g, tal que $r_{sep}(n, \epsilon, g) = \#E(n, \epsilon, f)$. Como ϕ es sobreyectiva, entonces para cada $y \in E(n, \epsilon, g)$ tome un único elemento $x \in \phi^{-1}(y)$, luego tome $E(n, \delta, f)$ formado por estos puntos, por lo tanto $\#E(n, \delta, f) = \#E(n, \epsilon, g)$. Se $x_1, x_2 \in E(n, \delta, f)$, como

$$d^Y(\phi(f^k(x_1)), \phi(f^k(x_2))) = d^Y(g(\phi^k(x_1), g^k(\phi(x_2)))) \geq \epsilon$$

entonces por continuidad uniforme de ϕ tenemos que $d^X(f^k(x_1), f^k(x_2)) \geq \delta$ para $0 \leq k < n$, por lo tanto $E(n, \delta, f)$ es un conjunto (n, δ)-separado para f. Por lo tanto $r_{sep}(\epsilon, n, g) \leq r_{sep}(\delta, n, f)$, esto implica que

$$h_{top}(\epsilon, g) \leq h_{top}(\delta, f).$$

Claramente, si $\epsilon \to 0^+$ implica que $\delta \to 0^+$, por lo tanto

$$h_{top}(g) = \lim_{\epsilon \to 0^+} h_{top}(\epsilon, g) \leq \lim_{\delta \to 0^+} h_{top}(\delta, f) = h_{top}(f).$$

(b) Dado $\epsilon > 0$, por la continuidad uniforme de ϕ^{-1} existe $\delta > 0$ tal que para $y_1, y_2 \in \phi(X)$, $d^Y(y_1, y_2) \geq \delta$ siempre que $d^X(\phi^{-1}(y_1), \phi^{-1}(y_2) \geq \epsilon$. Sea $E(n, \epsilon, f) \subset X$ un conjunto (n, ϵ)-separado para f, tal que $r_{sep}(n, \epsilon, f) = \#E(n, \epsilon, f)$. Luego, tome $E(n, \delta, g) = \phi(E(n, \epsilon, f))$ como ϕ es inyectiva $\#E(n, \epsilon, f) = \#E(n, \delta, g)$, procediendo como en el ítem anterior, tenemos que $E(n, \delta, g)$ es un conjunto (n, δ)-separado para g, luego

$$r_{sep}(n, \delta, g) \geq \#E(n, \delta, g) = \#E(n, \epsilon, f) = r_{sep}(n, \epsilon, f).$$

Por lo tanto,

$$h_{top}(\epsilon, g) \geq h_{top}(\delta, f),$$

es claro, que si $\epsilon \to 0^+$ implica que $\delta \to 0^+$, por lo tanto

$$h_{top}(g) = \lim_{\epsilon \to 0^+} h_{top}(\epsilon, g) \geq \lim_{\delta \to 0^+} h_{top}(\delta, f) = h_{top}(f).$$

□

Corolario 3.2. *Si dos aplicaciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$, son topológicamente conjugadas, entonces*

$$h_{top}(f) = h_{top}(g).$$

Demostración. Como f e g son topológicamente conjugados, existe un homeomorfismo $\phi : X \to Y$ tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$. Como ϕ es homeomorfismo, en particular ϕ es inyectiva y sobreyectiva, luego por el Teorema 3.4 tenemos que

$$h_{top}(f) = h_{top}(g).$$

□

Corolario 3.3. *Sea X un conjunto con dos métricas d y d'. Sea $f : X \to X$ una aplicación continua con cualquiera de las dos métricas, y denote $h^d_{top}(f)$ y $h^{d'}_{top}(f)$ las entropías topológicas de f con respecto a las métricas d y d' respectivamente. Si d y d' son métricas equivalentes entonces*

$$h^d_{top}(f) = h^{d'}_{top}(f).$$

Demostración. Si d y d' son equivalentes, la aplicación $Id_X : (X, d) \to (X, d')$ es un homeomorfismo, tal que

$$f \circ Id_X = Id_X \circ f,$$

o sea $f : (X, d) \to (X, d)$ y $f : (X, d') \to (X, d')$ son conjugadas y por el Corolario 3.2, tienen la misma entropía. □

3.1.1 Primer teorema de Bowen para entropía

El siguiente Resultado, fue dado por Bowen (1970), la cual dice que la entropía está contenido en el conjunto no errante, o sea, órbitas errantes no contribuyen al caos.

Teorema 3.5. *[4] Sea $f : X \to X$ una aplicación continua sobre un espacio métrico compacto X. Sea $\Omega \subset X$ el conjunto de los puntos no errantes de f. Entonces*

$$h_{top}(f) = h_{top}(f|\Omega).$$

Antes de demostrar este teorema, introducimos una forma equivalente de definir entropia topológica.

Definición 3.4. *Sea $f : X \to X$ una aplicación continua, sobre el espacio métrico con métrica d y $K \subset X$. Sean $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, un subconjunto $G \subset K$ es llamado (n, ϵ)-**generador** para K si para todo $x \in K$ existe un elemento $y \in G$ tal que*

$$d_{n,f}(x, y) = \sup_{0 \leq j < n} d(f^j(x), f^j(y)) \leq \epsilon.$$

El número $r_{gen}(n, \epsilon, K, f)$ es definido como el menor número de elementos que puede tener un conjunto (n, ϵ)-generador de K, y

$$h_{gen}(\epsilon, K, f) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log(r_{gen}(n, \epsilon, K, f))}{n}.$$

Note que si $\epsilon_2 \geq \epsilon_1 > 0$ entonces todo conjunto (n, ϵ_1)-generador también es un conjunto (n, ϵ_2)-generador, por lo tanto $r_{gen}(n, \epsilon_2, K, f) \leq r_{gen}(n, \epsilon_1, K, f)$, entonces $h_{gen}(\epsilon_2, K, f) \leq h_{gen}(\epsilon_1, K, f)$, o sea la aplicación $\epsilon \mapsto h_{gen}(\epsilon, K, f)$ es monótona decreciente. Esto implica que siguiente limite existe

$$h_{gen}(K, f) = \lim_{\epsilon \to 0^+} h_{gen}(\epsilon, K, f),$$

y $h_{gen}(\epsilon_2, K, f) \leq h_{gen}(K, f)$.

Para cualquier $\epsilon > 0$, entero positivo n, $K \subset X$, definimos $E_{gen}(n, \epsilon, K)$ un conjunto minimal (n, ϵ)-generador, o sea

$$\#(E_{gen}(n, \epsilon, K)) = r_{gen}(n, \epsilon, K, f).$$

Definición 3.5. *Sea $f : X \to X$ una aplicación continua, definamos $h_{gen}(f)$, como*

$$h_{gen}(f) = h_{gen}(X, f).$$

Lema 3.1. *Sea $K \subset X$. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$ y entero $n > 0$, tenemos que*

(a) $r_{sep}(n, 2\epsilon, K, f) \leq r_{gen}(n, \epsilon, K, f) \leq r_{sep}(n, \epsilon, K, f)$.

(b) $h_{sep}(2\epsilon, K, f) \leq h_{gen}(\epsilon, K, f) \leq h_{sep}(\epsilon, K, f)$.

(c) $h_{sep}(K, f) = h_{gen}(K, f)$, *y por lo tanto*

$$h_{top}(f) = h_{gen}(f).$$

Demostración. (a) Sea $E_{sep}(n, \epsilon, K)$ un conjunto maximal (n, ϵ)-separado para K. Entonces el conjunto $E_{sep}(n, \epsilon, K)$ también es un conjunto (n, ϵ)-generador para K, pues, caso contrario

existiría un elemento $y \in K$ tal que $d_{n,f}(y,x) > \epsilon$ para todo $x \in E_{sep}(n,\epsilon,K)$, entonces el conjunto $S = \{y\} \cup E_{sep}(n,\epsilon,K)$ sería un conjunto (n,ϵ)-separado con mas elementos que el conjunto maximal $E_{sep}(n,\epsilon,K)$, esto genera una contradicción. Por lo tanto $E_{sep}(n,\epsilon,K)$ es un conjunto (n,ϵ)-generador para K, entonces

$$r_{sep}(n,\epsilon,K) = \#(E_{sep}(n,\epsilon,K)) \geq r_{gen}(n,\epsilon,K). \tag{3.1}$$

Ahora, sea $E_{sep}(n,2\epsilon,K)$ un conjunto maximal $(n,2\epsilon)$-separado para K, y $E_{gen}(n,\epsilon,K)$ un conjunto minimal (n,ϵ)-generador de K. Como $x \in E_{sep}(n,2\epsilon,K) \subset K$, para cada $x \in E_{sep}(n,2\epsilon,K)$ existe un elemento $y = \phi(x) \in E_{gen}(n,\epsilon,K)$ tal que $d_{n,f}(x,y) \leq \epsilon$, así obtenemos el mapa $\phi : E_{sep}(n,2\epsilon,K) \to E_{gen}(n,\epsilon,K)$. Sean $x, x' \in E_{sep}(n,2\epsilon,K)$ tal que $\phi(x) = \phi(x') = y$, entonces

$$d_{n,f}(x,x') \leq d_{n,f}(n,f)(x,y) + d_{n,f}(y,x') \leq 2\epsilon,$$

Como $E_{sep}(n,2\epsilon,K)$ es un conjunto $(n,2\epsilon)$-separado entonces $x = x'$. Por lo tanto, la aplicación ϕ es inyectiva, así, tenemos que

$$\begin{aligned} r_{sep}(n,2\epsilon,K) &= \#(E_{sep}(n,2\epsilon,K)) \\ &\leq \#(E_{gen}(n,\epsilon,K)) \\ &= r_{gen}(n,\epsilon,K). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Finalmente de 3.1 y 3.2, tenemos que

$$r_{sep}(n,2\epsilon,K,f) \leq r_{gen}(n,\epsilon,K,f) \leq r_{sep}(n,\epsilon,K,f). \tag{3.3}$$

(b) Por 3.3, tenemos que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log r_{sep}(n,2\epsilon,K,f)}{n} &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log r_{gen}(n,\epsilon,K,f)}{n} \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log r_{sep}(n,\epsilon,K,f)}{n}, \end{aligned}$$

o sea,

$$h_{sep}(2\epsilon,K,f) \leq h_{gen}(\epsilon,K,f) \leq h_{sep}(\epsilon,K,f). \tag{3.4}$$

(c) Sigue inmediatamente de 3.4, haciendo $\epsilon \to 0^+$.

□

Proposición 3.3. *Si X un espacio métrico compacto y $K \subset X$, entonces*

$$h_{sep}(\epsilon, K, f) < +\infty.$$

Demostración. Dado $\epsilon > 0$. Como X es compacto, existe un número finito N_ϵ, tal que N_ϵ es el número máximo de bolas disjuntas de radio ϵ en X. Por lo tanto, para cualquier entero $n > 0$, el número maximal de elementos de un conjunto (n, ϵ)-separado es menor o igual que N_ϵ^n, pues, no puede haber dos órbitas con $d_{n,f}(x, y) \leq \epsilon$, $f^j(x)$ y $f^j(y)$ en la misma ϵ-bola para $0 \leq j < n$. Entonces, $r_{sep}(n, \epsilon, K, f) \leq N_\epsilon^n$, por lo tanto

$$h_{sep}(\epsilon, K, f) \leq \log(N_\epsilon^n) < +\infty.$$

□

Demostración del Teorema 3.5:

Como $\Omega = \Omega(f) \subset X$, tenemos que $h_{top}(f|\Omega) \leq h_{top}(f)$. Por lo tanto, sólo necesitamos demostrar la otra desigualdad. Para esto, dado $m > 0$, construiremos conjuntos $(n, 2\epsilon)$-separados para X con la misma cardinalidad que un conjunto (m, ϵ)-generador de Ω, para un determinado n dependiendo de m.

Fijemos un entero $m \geq 1$ y $\epsilon > 0$ para el resto de toda la demostración. Tomemos $E_{gen}(m, \epsilon, \Omega)$ un conjunto minimal (m, ϵ)-generador para $f|\Omega$. Considere el conjunto

$$U = \{x \in X : d_{m,f}(x, y) < \epsilon \text{ para algún } \ y \in E_{gen}(m, \epsilon, \Omega)\}.$$

Como las órbitas en $E_{gen}(m, \epsilon, \Omega)$ también generan orbitas cercanas a Ω en X, U es un conjunto abierto en X que contiene a Ω. Como U es abierto y X es compacto, entonces $U^c = X \backslash U$ es un conjunto compacto y todo los puntos de U^c son errantes. Puesto que cada $x \in U^c$ es errante, entonces existe $\beta_x > 0$, tal que $f^j(B(x, \beta_x)) \cap B(x, \beta_x) = \emptyset$ para todo $j \geq 1$, pero como U^c es compacto, el número $\beta = \min_{x \in U^c} \beta_x$ es positivo, por lo tanto para todo $x \in U^c$ tenemos que

$$f^j(B(x, \beta)) \cap B(x, \beta) = \emptyset \text{ para todo } j \geq 1.$$

Ahora, tomemos un conjunto minimal (n, ϵ)-generador $E_{gen}(m, \beta, U^c)$ para f en U^c, o sea

$$\#(E_{gen}(m, \beta, U^c)) = r_{gen}(m, \beta, U^c, f).$$

Consideremos el conjunto $G_{gen}(m) = E_{gen}(m, \epsilon, \Omega) \cup E_{gen}(m, \beta, U^c)$. El conjunto $G_{gen}(m)$ claramente es un conjunto (n, ϵ)-generador para X, así

$$\#(G_{gen}(m)) \leq r_{gen}(m, \epsilon, X, f).$$

Sea ℓ un entero positivo. Para estimar $r_{sep}(n, 2\epsilon, X, f)$, vamos a definir la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \varphi_\ell : X &\to G_{gen}(m)^\ell \\ x &\mapsto (y_0, \ldots, y_{\ell-1}) \end{aligned}$$

donde:

(i) $y_s \in E_{gen}(m, \epsilon, \Omega)$ y $d_{m,f}(f^{sm}(x), y_s) < \epsilon$ si $f^{sm}(x) \in U$ y

(ii) $y_s \in E_{gen}(m, \beta, U^c)$ y $d_{m,f}(f^{sm}(x), y_s) < \beta$ si $f^{sm}(x) \in U^c$.

Como $E_{gen}(m, \epsilon, \Omega)$ es un conjunto (m, ϵ)-generador para U y $E_{gen}(m, \beta, U^c)$ es un conjunto (m, β)-generador para U^c, siempre es posible hacer esas elecciones para definir ψ_ℓ.

Afirmación 3.6. *Asumiendo que $(y_0, \ldots, y_{\ell-1}) = \varphi_\ell(x)$ para algún $x \in X$. Entonces un punto $y_s \in E_{gen}(m, \beta, U^c)$ no puede repetirse en esta ℓ-upla.*

Demostración. Esta afirmación es consecuencia de que bolas $B(y_s, \beta)$ son errantes y por la elección de y_s tenemos que $y_s \in E_{gen}(m, \beta, U^c)$. □

Nuevamente, tomemos un entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > mr_{gen}(m, \beta, U^c, f)$ y $E_{sep}(n, 2\epsilon, X)$ un conjunto maximal $(n, 2\epsilon)$-separado. Ahora tomemos un entero $\ell > 0$, tal que $(\ell - 1)m < n < \ell m$. La siguiente afirmación dice φ_ℓ es uno a uno en $E_{sep}(n\epsilon, X)$, así podemos estimar $r_{sep}(n, 2\epsilon, X, f)$ por medio de $\#(\varphi_\ell(E_{sep}(n, 2\epsilon, X)))$.

Afirmación 3.7. *La aplicación ψ_ℓ es uno a uno en $E_{sep}(n, 2\epsilon, X)$.*

Demostración. Sean $x, z \in E_{sep}(n, 2\epsilon, X)$ tal que $\varphi_\ell(x) = \varphi_\ell(z) = (y_0, \ldots, y_{\ell-1})$. Luego, para $t, s \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq t < m$ y $0 \leq s < \ell$, tenemos que

$$\begin{aligned} d(f^{sm+t}(x), f^{sm+t}(z)) &\leq d_{m,f}(f^{sm+t}(x), y_s) + d_{m,f}(y_s, f^{sm+t}(z)) \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

El entero ℓ es escogido de tal manera que $\ell m \geq n$, así tenemos $d_{n,f}(x, z) < \epsilon$, por lo tanto $x = z$, ya que si $x \neq z$ y como $x, z \in E_{sep}(n, 2\epsilon, X)$ tendríamos que $d_{n,f}(x, z) < \epsilon$. □

Afirmación 3.8. *Sea $q = r_{gen}(m, \beta, U^c, f)$ y $p = r_{gen}(m, \epsilon, \Omega, f)$. Entonces*

$$\#(\varphi_\ell(E_{sep}(n, 2\epsilon, X))) \leq (q + 1)!\ell^q p^l.$$

Demostración. Sea I_j el subconjunto de ℓ-tuplas en $\varphi_\ell(E_{sep}(n, 2\epsilon, X))$ tal que existen exactamente j puntos y_s que están en $E_{gen}(m, \beta, U^c)$. Puesto que $y_s \in E_{gen}(m, \beta, U^c)$ no puede repetirse en $\varphi_\ell(x)$, por lo tanto, deberíamos tener que $j < q$ (notemos que esto límite es independiente de n o ℓ. También, $n > mq$ así $\ell > q$). Para I_j, existen $\begin{pmatrix} q \\ j \end{pmatrix}$ formas de escoger estos j puntos $y_s \in E_{gen}(m, \beta, U^c)$; por lo tanto existen

$$\ell.(\ell-1)\dots(\ell-j+1) = \frac{\ell!}{(\ell-j)!}$$

formas de organizarlos entre las posiciones en el orden de ℓ-uplas; finalmente, existen a lo sumo

$$r_{span}(m, \epsilon, \Omega, f)^{\ell-j} = p^{\ell-j} \leq p^\ell$$

formas de escoger los restantes y_s a partir de $E_{gen}(m, \epsilon, \Omega)$. Por lo tanto

$$\#(I_j) \leq \begin{pmatrix} q \\ j \end{pmatrix} \frac{\ell!}{(\ell-j)!} p^\ell,$$

y

$$\begin{aligned} \#(\varphi_\ell(E_{sep}(n, 2\epsilon, X))) &= \sum_{j=0}^{q} \#(I_j) \\ &\leq \begin{pmatrix} q \\ j \end{pmatrix} \frac{\ell!}{(\ell-j)!} p^\ell. \end{aligned}$$

Para estimar este sumatorio, notemos que $\begin{pmatrix} q \\ j \end{pmatrix} \leq q!$ y

$$\frac{\ell!}{(\ell-j)!} = \ell.(\ell-1)\dots(\ell-j+1) \leq \ell^j \leq \ell^q.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \#(\varphi_\ell(E_{sep}(n, 2\epsilon, X))) &= \sum_{j=0}^{q} q!\ell^q p^\ell \\ &\leq (q+1)!\ell^q p^\ell, \end{aligned}$$

Esto, concluye demostración de la afirmación. □

Ahora, continuando con la demostración del teorema, Por la afirmación 2 y 3, tenemos que

$$\begin{aligned} r_{sep}(n, 2\epsilon, X, f) &= \#(\varphi_\ell(E_{sep}(n, 2\epsilon, X))) \\ &\leq (q+1)!\ell^q p^\ell, \end{aligned}$$

donde $q = r_{gen}(m, \beta, U^c, f)$ e $p = r_{gen}(m, \epsilon, \Omega, f)$.Entonces

$$\begin{aligned} h_{sep(2\epsilon,X,f)} &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log(r_{sep}(n, 2\epsilon, X, f)) \\ &\leq \limsup_{\ell\to+\infty} \frac{\log((q+1)!) + q\log(\ell) + \ell\log(p)}{(\ell-1)m} \\ &\leq \frac{\log(p)}{m} \\ &= \frac{\log(r_{gen}(m, \epsilon, \Omega, f))}{m}, \end{aligned}$$

luego, hacemos $m \to +\infty$, y obtenemos que

$$h_{sep}(2\epsilon, X, f) \leq \limsup_{m\to+\infty} \frac{\log(r_{gen}(m, \epsilon, \Omega, f))}{m} = h_{gen}(\epsilon, \Omega, f).$$

Finalmente, hacemos $\epsilon \to 0$ y obtenemos que

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon\to 0^+} h_{sep}(2\epsilon, X, f) \leq \lim_{\epsilon\to 0^+} h_{gen}(\epsilon, \Omega, f) = h_{top}(\Omega, f).$$

Teorema 3.9. *Sea $f : X \to X$ una aplicación continua sobre un espacio métrico compacto X. Se $\Omega \subset X$ el conjunto de los puntos no errantes de f es finito, entonces*

$$h_{top}(f) = 0.$$

Demostración. Sigue inmediatamente del Teorema 3.5 y de la Proposición 3.2. □

Ejemplo 3.1. *Sea $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ el flujo gradiente, dado por*

$$\dot{X}(x) = -\nabla f(x)$$

donde $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ es la función altura con respecto al plano $Z = 0$, viendo el origen de $\mathbb{R}^3$ como el polo sur de $\mathbb{S}^2$. Note que el flujo definido por las soluciones sus trayectorias siguen la dirección de $-\nabla f$ el cual indica el lugar a donde la función decrece con mayor rapidez, así como indica la figura.

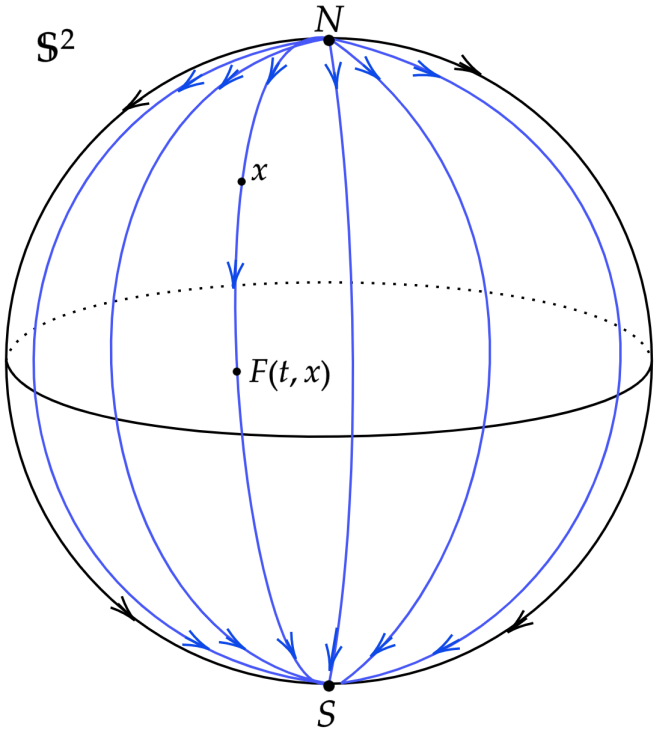
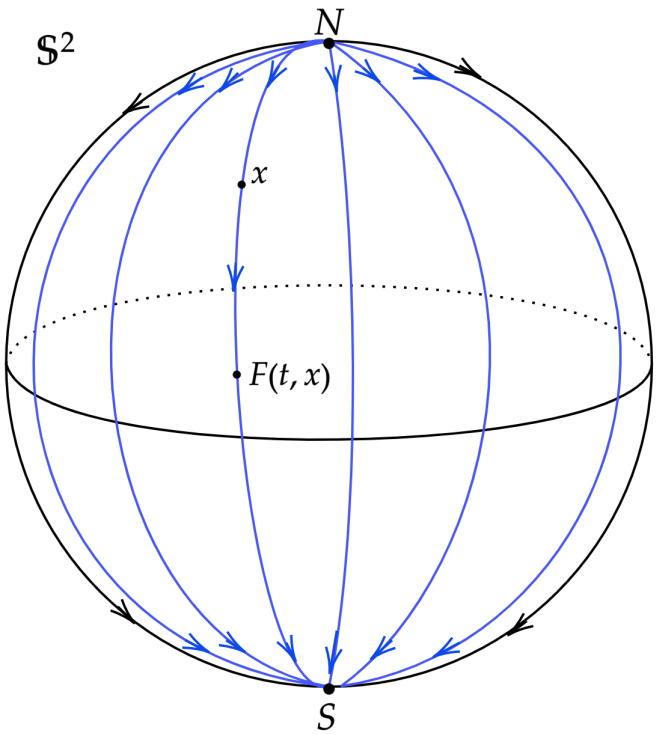


Figura 3.3: Órbitas del Flujo gradiente φ.



Entonces tenemos que $\Omega(\varphi) = \{N, S\}$*, el cual es finito, por lo tanto*

$$h_{top}(\varphi) = 0.$$

3.1.2 Segundo teorema de Bowen para entropía

El siguiente teorema dado Por Bowen en 1971, nos dice que no es necesario una conjugación topológica para obtener igualdad de entropía, es suficiente tener una semiconjugación uniformemente finita.

Definición 3.6. *[4] Una aplicación* $\phi : X \to Y$ *es llamada de uniformemente finita si para todo* $y \in Y$*,* $\phi^{-1}(y)$ *es finito y existe una constante* $C > 0$ *tal que* $\sup_{y \in Y} \#(\phi^{-1}(y)) \leq C$*.*

Teorema 3.10. *[4] Sean* $f : X \to X$ *y* $g : Y \to Y$ *dos aplicaciones continuas, donde* X *e* Y *son espacios métricos compactos con métricas* d^X *y* d^Y *respectivamente. Si* $\phi : X \to Y$ *es una semi-conjugación de* f *a* g *uniformemente finita, entonces*

$$h_{top}(f) = h_{top}(g).$$

Demostración. Note que como ϕ es una semi-conjugación, automáticamente tenemos que $h_{top}(f) \leq h_{top}(g)$.

La idea de esta demostración es probar que, dado $\epsilon > 0$, existe un $\beta > 0$ tal que existe un limite superior para el tamaño máximo de un conjunto (n, β)-generador para g.

Fijemos un $\epsilon > 0$. Sea $m \geq 1$ un entero, entonces existe $\beta > 0$ tal que

$$h_{sep}(2\epsilon, f) \leq h_{span}(\beta, g) + \frac{1}{m}\log(C) \leq h_{top}(f) + \frac{1}{m}\log(C).$$

Dado $y \in Y$, sea

$$U_y = U_{y,m,\epsilon} = \{w \in X : d_{m,f}(w, z) < \epsilon \text{ para algún } z \in \phi^{-1}(y)\}.$$

Por la continuidad de f, U_y es un conjunto abierto de $\phi^{-1}(y)$. Por la continuidad de ϕ y la compacidad de X, existe una vecindad abierta de $W_y \subset Y$ de y tal que $\phi^{-1}(W_y) \subset U_y$. Como el conjunto Y es compacto, existe una cobertura finita $\{W_{y_1}, \ldots, W_{y_p}\}$. Sea $\beta > 0$ el número de Lebesgue de la

cobertura finita, el cual tiene la propiedad de que si $y \in Y$ existe algún elemento W_{y_j} de la cobertura finita tal que la bola cerrada de radio β está contenida en W_{y_j}, o sea $\overline{B(y,\beta)} \subset W_{y_j}$. Ahora vamos a probar que

$$\frac{1}{n}\log(r_{sep,2\epsilon,f})) \leq \frac{1}{n}\log(r_{gen}(n,\beta,g)) + \frac{1}{m}\log(C) + \frac{1}{m}\log(C).$$

Para esto, necesitamos romper una órbita de f en segmentos de longitud m. Con efecto, dado un entero positivo n, existe un entero positivo ℓ tal que

$$(\ell-1)m < n < \ell m.$$

Sea $E_{sep}(n,2\epsilon,f) \subset X$ un conjunto $(n,2\epsilon)$-separado para f con

$$\#(E_{sep}(n,2\epsilon,f)) = r_{sep}(n,2\epsilon,f),$$

y $E_{gen}(n,\beta,g) \subset Y$ un conjunto minimal (n,β)-generador para g con

$$\#(E_{gen}(n,\beta,g)) = r_{gen}(n,\beta,g).$$

Para $y \in E_{gen}(n,\beta,g)$, sea $q(j,y) \in \{y_1,\ldots,y_p\}$ escogidos de tal manera que

$$\overline{B(f^j(y),\beta)} \subset W_{q(j,y)}.$$

Para dar una estimativa de $r_{sep}(n,2\epsilon,f)$ en términos de $r_{gen}(n,\beta,g)$, definimos el mapa

$$\varphi_\ell : E_{sep}(n,2\epsilon,f) \to E_{gen}(n,\beta,g) \times X^\ell$$

por $\varphi_\ell(x) = (y; x_0,\ldots,x_{ell-1})$ donde

(i) $d^Y_{n,f}(y,\phi(x)) \leq \beta$ y $y \in E_{gen}(n,\beta,f)$,

(ii) $x_s \in \phi^{-1}(q(sm,y))$ satisfacen que $d^X_{m,f}(f^{sm}(x),x_s) < \epsilon$ para $0 \leq s < \ell$. Note que esto siempre es posible, pues

$$\phi \circ f^{sm}(x) = g^{sm} \circ \phi(x) \in \overline{B(g^{sm}(y),\beta)} \subset W_{q(sm,y)},$$
$$f^{sm}(x) \in \phi^{-1}(W_{q(sm,y)}) \subset U_{q(sm,y),m,\epsilon}$$

y esto siempre es posible elegir x_s.

Afirmación: *El mapa φ_ℓ restricto a $E_{sep}(n, 2\epsilon, f)$ es uno a uno.*

Con efecto, si $\varphi_\ell(w) = \varphi_\ell(z) = (y; x_0, \ldots .x_{\ell-1})$, entonces, para $0 \leq t < m$, y $0 \leq s \leq \ell$ tenemos que

$$\begin{aligned} d^X(f^{sm+t}(w), f^{sm+t}(z)) &\leq d^X_{m,f}(f^{sm}(w), x_s) + d_{m,f}(x_s, f^{sm}(z)) \\ &\leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon. \end{aligned}$$

Como $n \leq m\ell$, obtenemos que $d^X_{n,f}(z, w) \leq 2\epsilon$. Luego, como $E_{sep}(n, 2\epsilon, f)$ es $(n, 2\epsilon)$-separado, tenemos que $w = z$. $\square$

Ahora usamos la afirmación para finalizar la demostración del teorema. Para $y \in E_{gen}(n, \beta, g)$ fijo, tenemos que

$$\begin{aligned} \#\Big(\varphi_\ell(E_{sep}(n, 2\epsilon, f) \cap (\{y\} \times X^\ell))\Big) &\leq \prod_{s=0}^{\ell-1} \#\Big(\phi^{-1}(q(sm, y))\Big) \\ &\leq C^\ell. \end{aligned}$$

Debido a que existe $r_{gen}(n, \beta, g)$ elecciones de $y \in E_{gen}(n, \beta, g)$,

$$\begin{aligned} r_{sep}(n, 2\epsilon, f) &= \#\Big(\varphi_\ell(E_{sep}(n, 2\epsilon, f)\Big) \\ &\leq r_{gen}(n, \beta, g)C^\ell. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log(r_{sep}(n, 2\epsilon, f)) &\leq \frac{1}{n}\log(r_{gen}(n, \beta, g)) + \frac{1}{n}\log(C^\ell) \\ &= \frac{1}{n}\log(r_{gen}(n, \beta, g)) + \frac{\ell m}{nm}\log(C) \\ &\leq \frac{1}{n}\log(r_{gen}(n, \beta, g)) + \frac{n+m}{nm}\log(C) \\ &\leq \frac{1}{n}\log(r_{gen}(n, \beta, g)) + \frac{1}{m}\log(C) + \frac{1}{n}\log(C). \end{aligned}$$

Luego aplicamos $\lim\sup$ cuando n tiende al infinito, obtenemos que

$$h_{sep}(2\epsilon, f) \leq h_{gen}(\beta, g) + \frac{1}{m}\log(C) \leq h_{top}(g) + \frac{1}{m}\log(C).$$

Como esta desigualdad vale para todo $m \geq 1$, tenemos que $h_{sep}(2\epsilon, f) \leq h_{top}(g)$. Finalmente,

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \to 0^+} h_{sep}(2\epsilon, f) \leq h_{top}(g).$$

$\square$

3.2 Sistemas caóticos clásicos

Se ha observado que en contextos más complicados que las expansiones circulares, la construcción de dinámicas simbólicas es útil y en muchos casos indispensable para analizar la dinámica en cuestión, como es el caso de la Herrradura de Smale, especialmente en relación con propiedades básicas como la transitividad. y existencia (o número) de puntos periódicos, una vez que se ha establecido una conjugación topológica entre dos espacios, uno de ellos es un espacio de desplazamiento, todas las propiedades y resultados obtenidos en la dinámica simbólica se pueden transportar al otro sistema dinámico en cuestión a través de la conjugación.

3.2.1 Caos en dinámicas en S^1

El círculo unitario es usualmente conocido como un subconjunto del palo $\mathbb{R}^2$:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}.$$

Pero existen otras maneras de ver el círculo, y una de esas maneras será bien conveniente para nuestros propósitos.

Vamos a considerar el círculo S^1 como el intervalo unitario cerrado $[0, 1]$ pero con los puntos 0 y 1 identificados. Esto es, si vamos hacia la derecha partiendo desde el punto 0 y cuando llegamos a 1 automáticamente somos teletransportados hacia el punto 0. Una manera elegante de explicar eso es que el círculo es el conjunto de los números reales *módulo Z*(simplemente *módulo 1*), o sea

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Geométricamente, vamos a representar el círculo con el punto cero como "polo sur", con las coordenadas aumentando en sentido anti-horario.

En el intervalo $[0, 1]$, los punto 0 y 1 no son el mismo punto, de hecho la distancia usual entre ellos es $|1 - 0| = 1$. Pero en el círculo, 0 y 1 representan el mismo punto, puesto que estos dos puntos están identificados y por lo tanto la distancia entre ellos tendría que ser igual a cero. Note que si I es un arco

cerrado en S^1, este puede ser visto como subconjunto de $[0,1]$ pero como 0 y 1 representan el mismo punto en S^1 entonces I como subconjunto de $[0,1]$ o es un intervalo cerrado o unión de dos intervalos cerrados. Cuando I representado en $[0,1]$ es un intervalo $[a,b]$ entonces la longitud de ese arco es igual al tamaño del intervalo $[a,b]$, o sea $\ell(I) = b - a$; en el segundo caso, cuando el arco I es unión de dos intervalos cerrados $[a,b] \cup [c,d]$ entonces la longitud del arco es $\ell(I) = (b-a) + (d-c)$. En el caso de un arco abierto o semi abierto I, tome $\ell(I) = \ell(\overline{I})$. En base a lo anterior vamos a definir una distancia en S^1, $d : S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}_0^+$ de la siguiente manera: dados dos puntos $x, y \in S^1$ automáticamente obtenemos dos arcos I y I^c ambos con extremos en x e y, entonces definimos la distancia de x y, como

$$d(x,y) = \text{mín}\{\ell(I), \ell(I^c)\} = \text{mín}\{\ell(I), 1 - \ell(I)\}.$$

Claramente d es una distancia, de hecho:

(i) $x = y$ si y solamente si el arco cerrado con extremos en x e y es todo S^1, esto ocurre si y solamente si $d(x,y) = \text{mín}\{\ell(S^1), 1 - \ell(S^1)\} = \text{mín}\{1, 0\} = 0$.

(ii) Sean $x, y \in S^1$, y sean I y I^c los dos arcos con extremos x e y, por lo tanto

$$d(x,y) = \text{mín}\{\ell(I), \ell(I^c)\} = d(y,x).$$

(iii) Sean $x, y, z \in S^1$, y sea I el arco con extremos x e y tal que $d(x,y) = \ell(I)$ y se y J el arco con extremos y y z tal que $d(y,z) = \ell(J)$, note que $I \cup J$ es un arco conexo con extremos x y z, por lo tanto

$$d(x,z) = \text{mín}\{\ell(I \cup J), 1 - \ell(I \cup J)\} \leq \ell(I \cup J) \leq \ell(I) + \ell(J) = d(x,y) + d(y,z).$$

Una clase de dinámicas definidas en S^1 son los *Mapas Expansivos*, definidos para cada entero $m \geq 2$ por la aplicación $f_m : S^1 \to S^1$ donde $f_m(x) = mx(mód 1)$. Estas dinámicas tienen entropia positiva, en realidad $h_{top}(f_m) = \log(m)$, aqui demostraremos para $m = 2$. La demostración para los otros valores de m es enteramente análogo. En las notaciones, cada vez que tomamos un punto $x \in S^1$, la suma y producto respectivo son tomados con módulo 1, el cual omitiremos.

Proposición 3.4. *Sea $f : S^1 \to S^1$ tal que $f(x) = 2x$, entonces*

$$h_{top}(f) = \log 2.$$

Demostración. Tomando $\epsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$. Dado $n > 0$, dos puntos $x, y \in S^1$ son (n, ϵ_k)- separados si $d(f^i(x), f^i(y)) = d(2^i x, 2^i y) > \epsilon_k$ para todo $0 \leq i \leq n-1$, entonces

$$d(x, y) > \epsilon_k 2^{-n+1} = 2^{-n-k+1}.$$

Por lo tanto un conjunto (n, ϵ_k)-separado debe tener una cantidad menor de $1/2^{-n-k+1}$ elementos, o sea $r_{sep}(n, \epsilon_k, f) < 2^{n+k-1}$. Tome $a = \dfrac{1}{2^{n+k-1}} + \dfrac{1}{2^{2(n+k-1)}}$, y

$$S(n, \epsilon_k) = \{0, a, 2a, 3a, \ldots, (2^{n+k-1} - 2)a\}.$$

Obviamente $S(n, \epsilon_k)$ es un conjunto (n, ϵ_k)-separado y, $\#S(n, \epsilon_k) = 2^{n+k-1} - 1$. Entonces

$$r_{sep}(n, \epsilon_k, f) = 2^{n+k-1} - 1,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
h_{top}(f) &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log r_{sep}(n, \epsilon, f)}{n} \\
&= \lim_{\epsilon_k \to 0^+} \limsup_{n \to +\infty} \frac{\log(2^{n+k-1} - 1)}{n} \\
&= \lim_{k \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} \frac{(n+k-1)}{n} \log(2 - 2^{-n-k+1}) \\
&= \lim_{k \to +\infty} \log 2 \\
&= \log 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $h_{top}(f) = \log 2$, o sea f es una aplicación caótica. □

A continuación, demostraremos que todo homeomorfismo definido en S^1 tiene entropía nula, o sea, sorprendentemente las dinámicas dadas por homeomorfismos en S^1 carecen de caos. Primero demostramos un lema el cual ayudará en la demostración del próximo teorema.

Lema 3.2. *Sean $x, z \in S^1$, entonces si existe un arco I con extremos en x y z tal que $\ell(I) \leq 1/4$, entonces*

$$d(x, z) = \ell(I).$$

Demostración. Con efecto como $\ell(I) \leq 1/4$, entonces $\ell(I^c) = 1 - \ell(I) \geq \dfrac{3}{4}$, o sea $\ell(I) < \ell(I^c)$, por lo tanto

$$d(x, z) = \min\{\ell(I), \ell(I^c)\} = \ell(I).$$

□

Teorema 3.11. *Todo homeomorfismo $f : S^1 \to S^1$ tiene entropía topológica igual a cero, o sea*

$$h_{top}(f) = 0.$$

Demostración. Considere (S^1, d), o círculo con la distancia usual. Como f es homeomorfismo y S^1 compacto, entonces f^{-1} es uniformemente continua, entonces existe un entero $k > 0$ tal que si $d(x, y) \leq k^{-1}$ entonces $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq \frac{1}{4}$.

Afirmación 1: Tomando $\epsilon_k = k^{-1}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$r_{gen}(n, \epsilon, f) \leq n(k + 1).$$

Con efecto, demostraremos por inducción. Para $n = 1$ es directo, pues si $d_{1,f}(x, y) \leq \epsilon_k$ si y solamente si $d(x, y) \leq \epsilon_k$, entonces el conjunto

$$G_1 = \{0, k^{-1}, 2k^{-1}, \ldots, (k - 1)k^{-1}, (k - 1/2)k^{-1}\}$$

claramente es un conjunto $(1, \epsilon_k)$-generador, por lo tanto

$$r_{gen}(n, \epsilon, f) \leq \#(G_1) = k + 1.$$

Ahora supongamos que la afirmación es verdadera para un entero $n > 0$, o sea que $r_{gen}(n, \epsilon_k, f) \leq n(k+1)$, entonces debemos demostrar que $r_{gen}(n+1, \epsilon_k, f) \leq (n+1)(k+1)$. Con efecto, tomemos el conjunto $G_{n+1} = G_n \cup f^{-n}(G_1)$,tenemos que

$$\#(G_{n+1}) \leq \#(G_n) + \#(G_1) = n(k + 1) + (k + 1) = (n + 1)(k + 1).$$

Ahora demostraremos que G_{n+1} es un conjunto $(n+1, \epsilon_k)$-generador para S^1. Con efecto, sea $x_0 \in S^1$ entonces como G_n es un conjunto (n, ϵ_k)-generador, existe $x \in G_n$ tal que $d(f^i(x_0), f^i(x)) \leq \epsilon_k$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n - 1$. Si $d(f^n(x_0), f^n(x)) > \epsilon_k$ tome el intervalo I de tamaño $\ell(I) \leq \epsilon$ con extremos en $f^{n-1}(x_0)$ y $f^{n-1}(x)$ como $d(f^n(x_0), f^n(x)) > \epsilon_k$ entonces el intervalo $f(I)$ con extremos $f^n(x_0)$ y $f^n(x)$ tiene longitud mayor que ϵ, o sea $\ell(f((I)) > \epsilon$, luego tome $y \in G_1$ tal que $y \in f(I)$ y $d(x_0, y) \leq \epsilon_k$. Observe que como $\ell(I) \leq \epsilon$ entonces $\ell(f^{-1}(I)) \leq \dfrac{1}{4}$ entonces por el Lemma 3.2 $\ell(f^{-1}(I)) = d(f^{n-2}(x_0), f^{n-2}(x)) \leq \epsilon_k$, de la misma manera como $\ell(f^{-1}(I)) \leq \epsilon_k$ entonces $\ell(f^{-2}(I)) \leq \dfrac{1}{4}$ y por lo tanto $\ell(f^{-2}(I)) \leq \epsilon_k$, así sucesivamente obtenemos que $\ell(f^{-j}(I)) \leq \epsilon_k$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Notemos que como $f^{-1}(y) \in I$ entonces $f^{-i}(f^{-1}(y)) \in f^{-i}(I)$,

por lo tanto si $z = f^{-n}(y)$ y $J = f^{-(n-1)}(I)$, entonces tenemos que $f^i(z), f^i(x_0) \in f^i(J)$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$ por lo tanto

$$d(f^i(z), f^i(x_0)) \leq \ell(f^i(J)) \leq \epsilon \text{ para todo } \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

y

$$d(f^n(z), f^n(x_0)) = d(f^n(f^{-n}(y)), f^n(x_0)) = d(y, f^n(x_0)) \leq \epsilon_k$$

Por lo tanto $d_{n+1}(x_0, z) \leq \epsilon$, donde obviamente $z \in G_{n+1}$, como x_0 es un punto arbitrario de S^1, concluimos que G_{n+1} es un conjunto $(n+1, \epsilon_k)$-generador. Esto concluye la afirmación.

Regresando a la demostración del teorema, tenemos que

$$\begin{aligned} h_{top}(f) &= \lim_{k\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log\Big(r_{gen}(n, \epsilon, f)\Big)}{n} \\ &\leq \lim_{k\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log\Big(n(k+1)\Big)}{n} \\ &\leq \lim_{k\to+\infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.2. *Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ el flujo en $\mathbb{S}^2$ como en el siguiente gráfico*
Como $\Omega(F) = D \cup \{N, S\}$, entonces para cualquier tiempo $t_0 \in \mathbb{R} \neq 0$ tenemos para $F_{t_0} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ el conjunto no errante $\Omega(F_{t_0}) = D \cup \{N, S\}$, entonces por el Teorema 3.5 tenemos que

$$h_{top}(F_{t_0}) = h_{top}(F_{t_0}|D \cup \{S, N\}).$$

Como $\{S, N\}$ es un conjunto finito $h_{top}(F_{t_0}|\{S, N\}) = 0$; además F_{t_0} restricto a D es un homeomorfismo en el círculo $S^1 \cong D$, entonces por el Teorema 3.11 tenemos $h_{top}(F_{t_0}|D\}) = 0$. Finalmente, como la distancia entre D y $\{S, N\}$ es positiva, por el Teorema 3.3 tenemos que

$$h_{top}(F_{t_0}) = \text{máx}\{h_{top}(F_{t_0}|D), h_{top}(F_{t_0}|\{S, N\})\} = \text{máx}\{0, 0\} = 0.$$

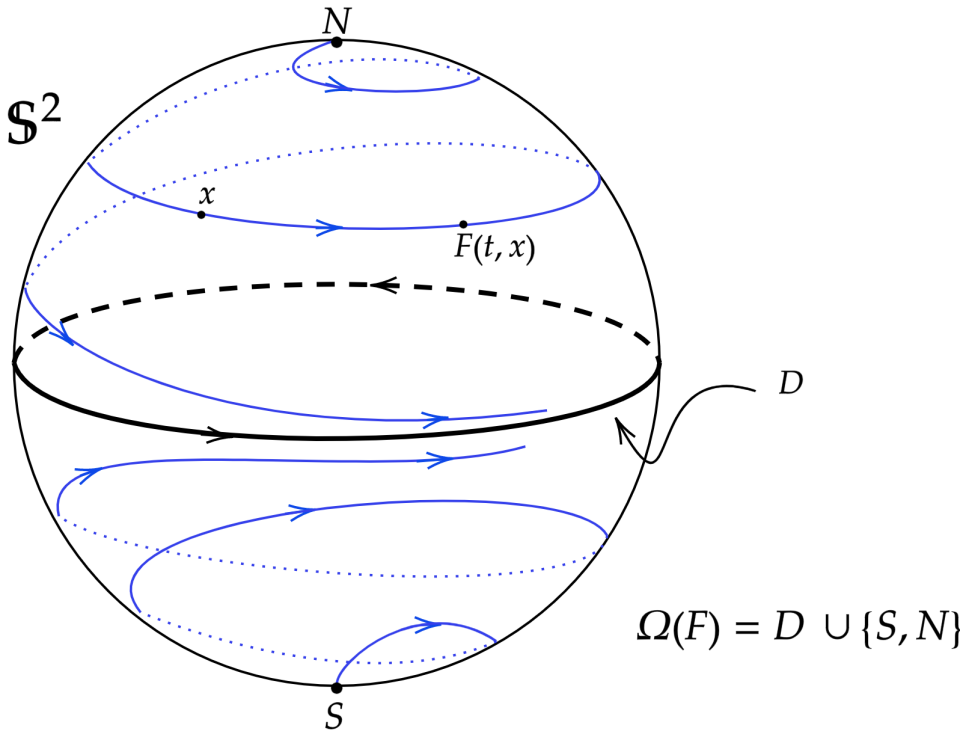


Figura 3.4: Órbitas del flujo F.

3.2.2 Caos en dinámica simbólica

Proposición 3.5. *Sean Σ_N^+ el espacio unilateral de N-símbolos y Σ_N el espacio bilateral de N-símbolos. Sean $a, b \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, considere la aplicación delta, como*

$$\delta(a,b) = \begin{cases} 1, & si\ a \neq b, \\ 0, & si\ a = b \end{cases}$$

Dado $\lambda > 1$, entonces

(1) Si $\omega, \eta \in \Sigma_N^+$ las métricas d^+ y d_λ^+ definidas como

$$d^+(\omega,\eta) = \sum_{j\geq 0} \frac{|\omega_j - \eta_j|}{2^j} \ \ y \ \ d_\lambda^+(\omega,\eta) = \sum_{j\geq 0} \frac{\delta(\omega_j,\eta_j)}{\lambda^j},$$

son equivalentes.

(2) Si $\omega, \eta \in \Sigma_N$ las métricas d y d_λ definidas como

$$d(\omega,\eta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{|\omega_j - \eta_j|}{2^{|j|}} \;\; y \;\; d_\lambda(\omega,\eta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\delta(\omega_j,\eta_j)}{\lambda^{|j|}},$$

son equivalentes.

Demostración. *(1) Dado $\epsilon > 0$, como $\lambda > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} = 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\lambda^{-n_0}}{\lambda - 1} < \epsilon$. Tome $\delta = 2^{-n_0}$, entonces $d^+(\omega,\eta) < \delta$ implica que $\omega_j = \eta_j$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n_0 + 2$. Por lo tanto*

$$d^+_\lambda(\omega,\eta) = \sum_{j>n_0+2} \frac{\delta(\omega_j,\eta_j)}{\lambda^j} < \sum_{j>n_0} \frac{1}{\lambda^j} = \frac{\lambda^{-n_0}}{\lambda - 1} < \epsilon. \tag{3.5}$$

Por otro lado, Dado $\epsilon > 0$, como $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0}N < \epsilon$. Tome $\delta = \lambda^{-n_0}$, entonces $d^+_\lambda(\omega,\eta) < \delta$ implica que $\omega_j = \eta_j$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n_0$. Por lo tanto

$$d^+(\omega,\eta) = \sum_{j\geq n_0+1} \frac{|\omega_j - \eta_j|}{\lambda^j} < \sum_{j>n_0} \frac{N}{2^j} = 2^{-n_0}N < \epsilon. \tag{3.6}$$

De 3.5 y 3.6 concluimos que d^+ y d^+_λ son equivalentes.

(2) La prueba del Ítem (2) es análoga. De hecho, dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2(\dfrac{\lambda^{-n_0}}{\lambda - 1}) < \epsilon$. Tome $\delta = 2^{-n_0}$, entonces $d(\omega,\eta) < \delta$ implica que $\omega_j = \eta_j$ para todo $j = -(n_0 + 2), -(n_0 + 1), \ldots, n_0 + 2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d_\lambda(\omega,\eta) = \sum_{|j|>n_0+2} \frac{\delta(\omega_j,\eta_j)}{\lambda^j} &< \sum_{|j|>n_0} \frac{1}{\lambda^j} \\ &= 2\sum_{j>n_0} \frac{1}{\lambda^j} \\ &= 2\frac{\lambda^{-n_0}}{\lambda - 1} < \epsilon. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Por otro lado, dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0+1}N < \epsilon$. Tomando $\delta = \lambda^{-n_0}$, entonces $d_\lambda(\omega,\eta) < \delta$ implica que $\omega_j = \eta_j$ para todo $j = -n_0, -n_0 + 11, \ldots, n_0$. Por lo tanto

$$d(\omega,\eta) = \sum_{|j|\geq n_0+1} \frac{|\omega_j, \eta_j|}{\lambda^j} < 2\sum_{j>n_0} \frac{N}{2^j} = 2^{-n_0+1}N < \epsilon. \tag{3.8}$$

De 3.7 y 3.8 concluimos que d y d_λ son equivalentes.

Lema 3.3. *Sea Σ_N el espacio bilateral de N-símbolos con la métrica $d = d_4$, o sea*

$$d(\omega,\eta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{\delta(\omega_j,\eta_j)}{4^j}.$$

(i) $d(\omega,\eta) > \dfrac{3}{4}$ *si y solamente si* $\omega_0 \neq \eta_0$.

(ii) Dado un entero $k \geq 2$*, entonces* $d(\omega,\eta) > \dfrac{3}{4}4^{-k}$ *si y solamente si* $\omega_j \neq \eta_j$ *para algún* $j \in \{-k, -k+1, \ldots, k\}$.

Demostración. (i) Con efecto, suponga primero que $d(\omega,\eta) > \dfrac{3}{4}$, y que $\omega_0 = \eta_0$ entonces

$$d(\omega,\eta) = \sum_{|j|\geq 1} \frac{\delta(\omega_j,\eta_j)}{4^j} \leq \sum_{|j|\geq 1} \frac{1}{4^j} = 2\sum_{j\geq 1} \frac{1}{4^j} = \frac{2}{3} < \frac{3}{4},$$

obteniendose una contradicción. Ahora, si $\omega_0 \neq \eta_0$ es claro que

$$d(\omega,\eta) \geq \delta(\omega_0,\eta_0) = 1 > \frac{3}{4}.$$

(ii) Con efecto, primero supongamos que $d(\omega,\eta) > \dfrac{3}{4}4^{-k}$. Si $\omega_j = \eta_j$ para todo $j \in \{-k, -k+1, \ldots, k\}$, entonces

$$\begin{aligned} d(\omega,\eta) = \sum_{|j|\geq 0} \frac{\delta(\omega_j,\eta_j)}{4^j} &= \sum_{|j|\geq k+1} \frac{\delta(\omega_j,\eta_j)}{4^j} \\ &\leq 2\sum_{j\geq k+1} \frac{1}{4^j} \\ &= 2\frac{4^{-k}}{3} < \frac{3}{4}4^{-k}. \end{aligned}$$

Ahora, supongamos que existe $j_0 \in \{-k, -k+1, \ldots, k\}$ tal que $\omega_{j_0} = \eta_{j_0}$, entonces

$$d(\omega,\eta) = \sum_{|j|\geq 0} \frac{\delta(\omega_j,\eta_j)}{4^j} \geq \frac{\delta(\omega_{j_0},\eta_{j_0})}{4^{|j_0|}} = \frac{1}{4^{|j_0|}} \geq \frac{1}{4^k} > \frac{3}{4}4^{-k}.$$

□

Teorema 3.12. *[4] Sea* $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ *el shift de* N*-símbolos. Asuma que* $X \subset \Sigma_N$ *es un conjunto cerrado e invariante. Sea* μ_n *el número de palabras de tamaño* n *en* X*, o sea, si*

$$\Omega_n = \{(s_0, \ldots, s_{n-1}) : s_j = x_j \textit{ para } 0 \leq j \leq n-1 \textit{ para algún } x \in X\},$$

$\mu_n = \#(\Omega_n)$*, entonces*

$$h(\sigma|_X) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log(\mu_n)}{n}.$$

Demostración. Para demostrar este teorema, vamos a construir una secuencia $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de números positivos tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \epsilon_k = 0.$$

Para $k = 1$, tome $\epsilon_1 = \dfrac{3}{4}$. Dados $s, t \in X$, por el Lemma 3.3, $d(s,t) > \epsilon_1$ si y solamente si $s_0 \neq t_0$. Entonces, para cualquier $j \in \mathbb{N}$ tenemos, que $d(\sigma^j(s), \sigma^j(t)) > \epsilon_1$ si y solamente $t_j \neq s_j$ para algún j tal que $0 \leq j < n$.

Dado $s \in X$, consideremos la proyección π_n, donde $\pi_n(s) = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1})$, $s = (s_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, obviamente $\pi_n(s) \in \Omega_n$ para todo $s \in X$. Sea S un conjunto (n,ϵ)-separado, entonces la aplicación $\pi_n|_S : S \to \Omega_n$ inyectiva. Con efecto, si $s, t \in S$, como S es un conjunto (n,ϵ)-separado entonces $s_{j_0} \neq t_{j_0}$ para algún $j_0 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, o sea $\pi_n(s) \neq \pi_n(t)$, entonces $\pi_n|_S$ es inyectiva, y como consecuencia, tenemos que

$$\#(S) \leq \#(\Omega_n). \tag{3.9}$$

Ahora definamos el conjunto $S(n, \epsilon_1, \sigma)$ tomando para cada elemento $z \in \Omega_n$ un único elemento η_z de X tal que $\pi_n(\eta_z) = z$. Claramente $S(n, \epsilon_1, \sigma)$ es un conjunto (n, ϵ_1)-separado tal que

$$\#(S(n, \epsilon_1, \sigma)) = \#(\Omega_n). \tag{3.10}$$

De 3.9 y 3.10, tenemos que $r_{sep}(n, \epsilon_1, X) = \#(\Omega_n) = \mu_n$. Por lo tanto,

$$h_{sep}(\epsilon_1, \sigma|X) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log(\mu_n)}{n} \tag{3.11}$$

Ahora, para $k \geq 2$ tome $\epsilon_k = \dfrac{3}{4}4^{-k}$, luego por el Lemma 3.3, tenemos que

$$d_{n,\sigma}(s,t) > 4^{-k}$$

si y solamente si $s_j \neq t_j$ para algún $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n+k-1\}$. Por lo tanto

$$r_{sep}(n, \epsilon_k, \sigma, X) = r_{sep}(n+k, \epsilon_1, \sigma, X),$$

y

$$\begin{aligned}
h_{sep}(\epsilon_k, \sigma, X) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\Big(r_{sep}(n, \epsilon_k, \sigma, X)\Big)}{n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\Big(r_{sep}(n+k, \epsilon_1, \sigma, X)\Big)}{n} \\
&= \limsup_{n\to\infty} \Big(\frac{n+k}{n}\Big) \frac{\log\Big(r_{sep}(n+k, \epsilon_1, \sigma, X)\Big)}{n+k} \\
&= h_{sep}(\epsilon_1, \sigma, X)
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} h_{top}(\sigma|_X) &= \lim_{k\to\infty} h_{sep}(\epsilon_k, \sigma, X) && (3.12)\\ &= \lim_{k\to\infty} h_{sep}(\epsilon_1, \sigma, X) && (3.13)\\ &= h_{sep}(\epsilon_1, \sigma, X) && (3.14)\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\mu_n)}{n}. && (3.15) \end{aligned}$$

□

Corolario 3.4. *Sea $X \subset \Sigma_N^+$ un conjunto cerrado e invariante, si*

$$\Omega_n = \{(s_0, \ldots, s_{n-1}) : s_j = x_j \text{ para } 0 \le j \le n-1 \text{ para algún } x \in X\},$$

y $\mu_n = \#(\Omega_n)$, entonces

$$h(\sigma^+|X) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log(\mu_n)}{n}.$$

Demostración. Suficiente demostrar el resultado análogo del Lema 3.3 y luego proseguimos exactamente como en el teorema anterior. De hecho, tomando $d = d_4^+$, tenemos que

(i) Como $d(\omega, \eta) \ge \delta(\omega_0, \eta_0)$, entonces $\omega_0 \ne \eta_0$ si y solamente si $\delta(\omega_0, \eta_0) = 1$, o sea

$$d(\omega, \eta) \ge 1 > \frac{3}{4}.$$

(ii) $d(\omega, \eta) > \frac{3}{4}4^{-k}$ si y solamente si $\omega_j = \eta_j$ para algún $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Con efecto, supongamos primero que existe $j_0 \in \{0, 1, \ldots, k\}$ tal que $\omega_{j_0} = \eta_{j_0}$, entonces

$$d(\omega, \eta) = \sum_{j\ge 0} \frac{\delta(\omega_j, \eta_j)}{4^j} \ge \frac{\delta(\omega_{j_0}, \eta_{j_0})}{4^{j_0}} = \frac{1}{4^{j_0}} \ge \frac{1}{4^k} > \frac{3}{4}4^{-k},$$

Ahora, supongamos que $d(\omega, \eta) > \frac{3}{4}4^{-k}$. Si $\omega_j = \eta_j$ para todo $j = 0, 1, \ldots, k$, entonces

$$d(\omega, \eta) = \sum_{j\ge k+1} \frac{\delta(\omega_j, \eta_j)}{4^j} \le \sum_{j\ge k+1} \frac{1}{4^j} = \frac{4^{-k}}{3} < \frac{3}{4}4^{-k}.$$

Luego, la demostración de este corolario es exactamente igual a la demostración del Teorema 3.12. □

Corolario 3.5. *Sean $\sigma : \Sigma_N \to \Sigma_N$ y $\sigma^+ : \Sigma_N^+ \to \Sigma_N^+$ el shift bilateral y unilateral respectivamente, entonces:*

$$h_{top}(\sigma) = h_{top}(\sigma^+) = \log N.$$

Demostración. Por el teorema 3.12, tomando $X = \Sigma_n$, tenemos que

$$h_{top}(\sigma) = \lim \sup_{n\to+\infty} \frac{\log(\mu_n)}{n} = \lim \sup_{n\to+\infty} \frac{\log(\#(\Omega_n)}{n},$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega_n &= \{(s_0, \ldots, s_{n-1}) : s_j = x_j \text{ para } 0 \leq j \leq n-1 \text{ para algún } x \in \Sigma_N\} \\ &= \{(s_0, \ldots, s_{n-1}) : s_j \in \{0, 1, \ldots, N-1\}, 0 \leq j \leq n-1\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\#(\Omega_n)$ es exactamente la cantidad de variaciones(con repetición) de tamaño n de N elementos, entonces

$$\#(\Omega_n) = N^n.$$

Por lo tanto,

$$h_{top}(\sigma) = \lim \sup_{n\to+\infty} \frac{\log(N^n)}{n} = \lim \sup_{n\to+\infty} n\frac{log(N)}{n} = \log(N).$$

Finalmente, por el corolario 3.4, podemos concluir que

$$h_{top}(\sigma) = h_{top}(\sigma^+) = \log N.$$

□

Corolario 3.6. *Sea $f|\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ la aplicación definida sobre la herradura de Smale, entonces*

$$h_{top}(f|\Lambda) = \log 2.$$

Demostración. Por el Teorema 2.9, sabemos que $f|\Lambda$ y $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ son topológicamente conjugadas. Luego por el Corolario 3.2, tenemos que $h_{top}(f|\Lambda) = h_{top}(\sigma)$. Finalmente por el Coralario 3.5, tenemos

$$h_{top}(f|\Lambda) = h_{top}(\sigma) = \log 2.$$

□

Definición 3.7. *Una matriz de transición A es llamada eventualmente positiva si existe un entero $n > 0$ tal que $a_{ij}^m > 0$ para todo $i, j = 0, 1, \ldots, N-1$.*

Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$, como las normas

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \text{ y } \|A\|' = \sup\{\frac{\|Av\|}{\|v\|} : v \in \mathbb{R}^k, v \neq 0\}$$

son equivalentes, por lo tanto la fórmula de Gelfand vale también para la primera norma, o sea,

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^k.$$

Note que si $\rho(A) \neq 0$, entonces la continuidad de la función logaritmo implica que

$$\log(\rho(A)) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\log \|A^k\|}{k}.$$

Corolario 3.7. *Si la matriz de transición A es eventualmente positiva, entonces la entropía topológica*

$$h_{top}(\sigma_A) = \log(\rho(A)),$$

donde $\rho(A)$ es el radio espectral de la matriz A.

Demostración. Con efecto, note que $\Omega_n(\Sigma_A)$ representa exactamente los caminos admisibles de tamaño $n-1$, por el Lema 2.1, tenemos que

$$\#(\Omega_n(\Sigma_A)) = \sum_{i,j=0}^{N-1} N_{ij}^{n-1} = \sum_{i,j=0}^{N-1} a_{ij}^{n-1} = \|A^{n-1}\|.$$

Tomando el límite y usando la fórmula de Gelfand, obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to+\infty} \frac{\log(\#(\Omega_n(\Sigma_A)))}{n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log \|A^{n-1}\|}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\frac{n-1}{n}) \frac{\log \|A^{n-1}\|}{n-1} \\
&= \log(\rho(A).
\end{aligned}$$

Así, finalmente por el Teorema 3.12 tenemos que

$$h_{top}(\sigma_A) = \log(\rho(A)).$$

□

3.2.3 Caos de la función Logística

La ecuación diferencial

$$x'(t) = ax(t)$$

puede usarse para modelar diversas situaciones, por ejemplo, si $a > 0$, puede modelar el crecimiento de una población con recursos ilimitados. Cuando está $a < 0$, puede modelar la desintegración radiactiva. La solución para este ecuación es

$$x(t) = x_0 e^{at},$$

donde x_0 es el valor inicial, o sea $x(0) = x_0$. Si $a > 0$, la solución converge para el infinito cuando t tiende al infinito, y si $a < 0$ converge para cero. El modelo anterior no es muy realista para describir el crecimiento de una población pobre en recursos, ya que predice una tasa de crecimiento constante y la población crece infinitamente o disminuye a cero. Un modelo más sofisticado que tiene en cuenta los límites del crecimiento utiliza la función

$$F_r(x) = rx(1 - x).$$

Para este caso asumimos que la tasa de crecimiento x'/x es constante, pero sin que esta cantidad decrezca conforme x crece, $x'/x = r(1 - x)$. Así obtenemos la ecuación

$$x' = (1 - x), \text{ donde } x = x(t)$$

la cual tiene solución

$$x(t) = \frac{x_0}{x_0 - e^{-rt}(x_0 - 1)}.$$

Como podemos ver, si $x_0 = 0$ o $x_0 = 1$, la solución es constante en el tiempo. Estas soluciones son llamadas estados estacionarios o puntos de equilibrio. Si x_0 se sitúa entre 0 y 1, entonces $x' > 0$ y la solución crece con el tiempo y se aproxima asintóticamente al punto de equilibrio $x = 1$. Análogamente, si $x_0 > 1$ entonces $x' < 0$ y la solución decrece con el tiempo, y se aproxima asintóticamente al punto de equilibrio $x = 1$. Entonces $x = 1$ y note que en estos casos el comportamiento asintótico no depende de la condición inicial $x_0 > 0$.

Como vimos en el ejemplo 1.2 el método $x_{n+1} = 1 + F_r(x_n)$ é un método numérico para aproximar o comportamiento asintótico de las soluciones de $x' = f(x)$. En el caso de la Ecuación Logística, tenemos que $x' = F_r(x)$, entonces

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + rx_n(1 - x_n) && (3.16) \\ &= (1 + r)x_n(1 - \frac{r}{1 + r}x_n) && (3.17) \\ & && (3.18) \end{aligned}$$

Ahora cambiando variables $y_n = \dfrac{r}{1+r}x_n$ y $\mu = 1 + r$, tenemos que

$$y_{n+1} = (1+r)y_n(1-y_n) = F_\mu(y_n). \tag{3.19}$$

$$y_{n+1} = (1+r)y_n(1-y_n) = F_\mu(y_n).$$

Debido a la ecuación 3.19, para estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación logística, será suficiente estudiar el comportamiento asintótico de F_μ.

Definición 3.8. *La función $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ es llamada de* ***función logística****.*

Ahora, sea $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x),$$

tenemos que, para cualquier μ, $F_\mu(0) - F_\mu(1) = 1 = 0$, además, el único punto de equilibrio es $x = 1/2$ con $h(1/2) = \mu/4$, entonces, si $0 \leq \mu \leq 4$, F_μ aplica dentro del intervalo $[0,1]$ en si propio. Por otro lado, se $\mu > 4$, existe una parte del intervalo que se escapa del intervalo y sus iteraciones convergen para $+\infty$. Vamos a verificar que el conjunto de puntos que quedan atrapados en el intervalo $[0,1]$ es un conjunto de cantor. Sea

$$\Lambda_n = \{x \in [0,1] : F_\mu^n(x) \in [0,1]\}.$$

Note que el conjunto

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$$

esta conformado por los puntos que se mantienen en $[0,1]$ para siempre.

Lema 3.4. *Si $\mu > 2 + \sqrt{5}$ entonces existe $\lambda > 1$ tal que $|F'_\mu(x)| > \lambda$ para todo $x \in I \cap f^{-1}(I)$.*

Demostración. Con efecto, sea $x \in I$, $F_\mu(x)) \leq 1$ si y solamente si $\mu x(1-x) \leq 1$ si y solamente si

$$(x - (1 - \sqrt{1 - 4/\mu})/2).(x - (1 + \sqrt{1 - 4/\mu})/2) \leq 1,$$

entonces tomando $I_0 = [0, x_-]$ y $I_1 = [x_+, 1]$, donde

$$x_- = (1 - \sqrt{1 - 4/\mu})/2 \ \text{ y } \ x_+ = (1 + \sqrt{1 - 4/\mu})/2.$$

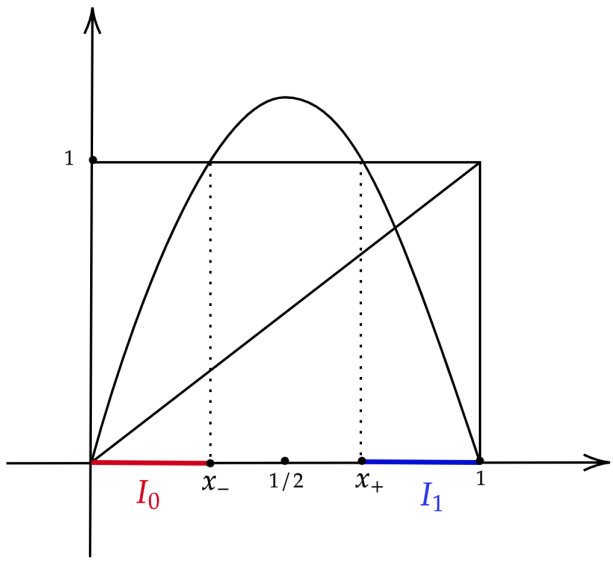


Figura 3.5: Conjuntos I_0 y I_1 para la función logística.

Entonces tenemos que $F_\mu(x) \in I$ si y solamente si $x \in I_0 \cup I_1$. Finalmente, si $\mu > 2 + \sqrt{5}$, tenemos que

$$F'_\mu(x_-) > 1 \text{ y } F'_\mu(x_+) < -1,$$

Además como, $F''_\mu(x) = -2\mu < 0$, luego F'_μ es estrictamente decreciente, entonces $|f'_\mu(x)| > 1$, por lo tanto, suficiente tomar $\lambda > 1$ de tal manera que

$$\lambda < \text{mín}\{|F'_\mu(x_-)|, |F'_\mu(x_+)|\}.$$

□

Teorema 3.13. *[4] La función logística $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, entonces si $\mu > 2\sqrt{5}$, existe un conjunto compacto invariante de $[0,1]$ tal que $F_\mu|\Lambda$ es topológicamente conjugado a shift unilateral σ^+ sobre el espacio Σ_2^+.*

Demostración. Tomando $I_0 = [0, x_-]$ y $I_- = [x_1, 1]$, x_- y x_+ como en el lema anterior, sabemos que $I \cap F_\mu^{-1}(I) = I_0 \cup I_1$. Definimos la secuencia de símbolos que corresponderá a una configuración del punto $x \in \Lambda$, de la siguiente manera

$$\omega_j = 0 \quad \text{si} \quad F_\mu^j(x) \in I_0 \tag{3.20}$$

$$\omega_j = 1 \quad \text{si} \quad F_\mu^j(x) \in I_1. \tag{3.21}$$

Entonces la aplicación $h : \Lambda \to \Sigma_2$ definida por $h(x) = \omega$, donde $\omega = (\omega_j)_{j\geq 0}$ y $F_\mu^j(x) \in I_{\omega_j}$. Demostremos que h es una conjugación topológica:

(i) $\mathbf{h} \circ \mathbf{F}_\mu = \sigma^+ \circ \mathbf{h}$: Es claro pues si $h(x) = \omega$ entonces $F_\mu^j(x) \in I)\omega_j$, o sea $F_\mu^{j-1}(F_\mu(x)) \in I)\omega_j$. Luego, como $F_\mu^j(x) \in I_{\omega_{j+1}}$ para todo $j = 0, q, \ldots$, tenemos que

$$h(f(x)) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) = \sigma^+(\omega) = \sigma \circ h(x).$$

(ii) h **es inyectiva:** Supongamos que existan $x, y \in \Lambda$ tal que $x \neq y$ y $h(x) = h(y) = \omega$. Por definición de ω, tenemos que $F_\mu^j(x) \in I_{\omega_j}$ y $F_\mu^j(y) \in I_{\omega_j}$, o sea $F_\mu^j(x), F_\mu^j(y) \in I_{\omega_j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pero como la longitud de I_0 y I_1 es menor que $1/2$, entonces

$$|F_\mu^j(x) - F_\mu^j(y)| < \frac{1}{2} \text{ para todo } j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Pero, como para todo $x \in I_0 \cup I_1$ tenemos que $|F'_\mu(x)| > \lambda > 1$ entonces $|F_\mu^j(x) - F_\mu^j(y)| > \lambda^j|x - y|$ para todo j, pero como $\lambda > 1$ entonces $\lambda^j|x - y|$ tiende al infinito cuando j también tiende al infinito, pero note que esto contradice el hecho que $\lambda^j|x - y| < |F_\mu^j(x) - F_\mu^j(y)| < \frac{1}{2}$. Por lo tanto $x = y$, o sea h es inyectiva.

(iii) h **es sobreyectiva:** Dado una secuencia de símbolos $\omega \in \Sigma_2$, con $\omega = (\omega_o, \omega_1, \omega_2, \ldots)$ demostraremos que existe un punto $x \in \Lambda$ tal que $h(x) = \omega$.

Definamos

$$\begin{aligned} I_{\omega_0\omega_1\ldots\omega_n} &= \{x : x \in I_{\omega_0}, F_\mu(x) \in I_{\omega_1}, \ldots, F_\mu^n(x) \in I_{\omega_n}\} \\ &= I_{\omega_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{\omega_1}) \cap F_\mu^{-2}(I_{\omega_2}) \cap \ldots \cap F_\mu^{-n}(I_{\omega_n}) \end{aligned}$$

Ahora, solo combinando las definiciones vemos que, también

$$I_{\omega_0\omega_1\ldots\omega_n} = I_{\omega_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n})$$

porque estos son exactamente los conjuntos de puntos para los cuales $F_\mu^j(x) \in I_{\omega_j}$ para todo $0 \leq j \leq n$.

Ahora usaremos el principio de inducción para probar que, si $I_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}$ es un intervalo compacto no vacio, entonces $F_\mu^{-1}(I_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n})$ consiste de dos intervalos cerrados de tal manera que $I_{\omega_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n})$ es exactamente uno de esos intervalos. Por lo tanto, inductivamente, $I_{\omega_0\omega_1\ldots\omega_n} = I_{\omega_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n})$ es un intervalo cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta manera tenemos que

$$I_0 \supset I_{\omega_0\omega_1} \supset I_{\omega_0\omega_1\omega_3} \supset \ldots \supset I_{\omega_0\omega_1\ldots\omega_n} \supset I_{\omega_0\omega_1\ldots\omega_{n+1}}$$

es una secuencia decreciente de conjuntos compactos encajados, por lo tanto

$$I_\omega = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_{\omega_0 \ldots \omega_n} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto, existe $x \in I_\omega$, por lo tanto $F_\mu^n(x) \in I_{\omega_n}$, y como h es inyectiva, entonces $I_\omega = \{x\}$.

(iv) h **es continua:** Dado $\epsilon > 0$ tome $n > 0$ tal que $\epsilon > 1/2^n$. Sea $x \in \Lambda$, como $|F'_\mu(x)| > \lambda > 1$ y por la continuidad de F_μ podemos tomar $\delta > 0$ tal que $|f^j(x) - f^j(y)| \leq 1/$ para todo $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, por lo tanto, $F^j(x)$ y $F^j(y) \in$ están en el mismo intervalo I_0 o I_1, o sea si $h(x) = \omega$ y $h(y) = \eta$ entonces $\omega_j = \eta_j$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$. Así,

$$d(\omega, \eta) \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Por lo tanto, h es continua.

□

Corolario 3.8. *Sea la función logística dada por $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, si $\mu > 2\sqrt{5}$, entonces:*

$$h_{top}(f|\Lambda) \geq 0.$$

Demostración. Por los Teoremas 3.13 y 3.2, tenemos que

$$h_{top}(f_\mu|_\Lambda) = h_{top}(\sigma^+).$$

Finalmente, por el Corolario 3.5, tenemos que

$$h_{top}(f_\mu|_\Lambda) = h_{top}(\sigma^+) = \log(2) > 0.$$

□

Note que a pesar que F_μ parece ser una aplicación muy simple, su comportamiento asintótico es complejo. A raíz de esto, podemos concluir que:

- La naturaleza algebraica simple de una función no garantiza que la dinámica sea simple, sino que exhibe propiedades caóticas.
- La evolución de un estado es determinista, es decir, hay una regla muy clara que determina el siguiente estado a partir del presente. Sin embargo, considerando muchas iteraciones, la evolución del estado puede ser errática.
- El comportamiento errático no necesariamente resulta de cambios en las fuerzas internas o efectos estocásticos, sino que también puede ser el resultado de la naturaleza no lineal del sistema determinista.

3.3 Existencia de caos para difeomorfismos con puntos homoclínicos transversales

3.3.1 Órbitas homoclínicas

En la mayoría de aplicaciones podemos encontrar comportamientos "extraños" en la dinámica como por ejemplo, las variedades estable y la inestable intersectandose formando lo que llamamos una *intersección homoclínica*. Note que cuando $p \in M$ es un punto fijo hiperbólico, tenemos que

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{x \in M | \lim_{n\to+\infty} f^n(x) = p\} \text{ y} \\ W^u(p) &= \{x \in M | \lim_{n\to+\infty} f^{-n}(x) = p\}. \end{aligned}$$

Definición 3.9. *[4] Sea $f : M \to M$ una aplicación homoclínica de clase C^1 y $p \in M$ un punto fijo hiperbólico para f. Un punto $q \in M$, $q \neq p$ es llamado de* ***punto homoclínico*** *para p si*

$$q \in W^s(p) \cap W^u(p),$$

o sea, $\lim_{n\to\pm\infty} f^n(q) = p$.

Un punto homoclínico q es llamado punto homoclínico transversal si $W^s(p)$ y $W^u(p)$ se intersectan transversalmente en q, o sea

$$T_qM = T_q(W^s(p)) \oplus T_q(W^u(p)).$$

Aquí, $T_q(W^\sigma(p))$ representa el espacio generado(en T_qM) por los vectores $W^\sigma(p)$ en el punto q, para $\sigma = s, u$.

Observación: Note que si q es un punto homoclínico, entonces para todo $k_0 \in \mathbb{Z}$, el punto $f^{k_0}(q)$ también es un punto homoclínico, pues

$$\lim_{n\to\pm\infty} f^n(f^{k_0}(q)) = \lim_{n\to\pm\infty} f^{n+k_0}(q) = p.$$

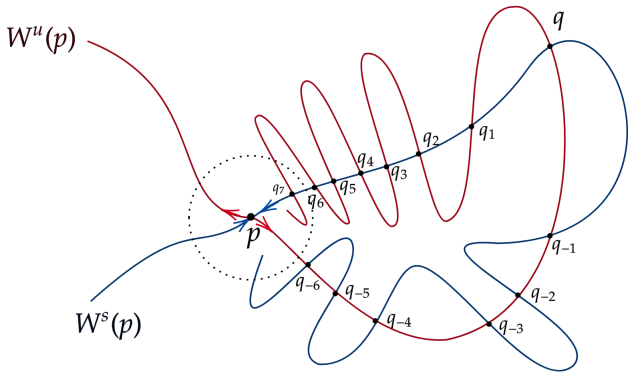


Figura 3.6: Punto homoclínico transversal.

Ejemplo 3.3. *Tome o Anosov lineal* $f_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ *inducido por la matriz* $A \in SL(\mathbb{Z}, n)$ *con* $det(A) = 1$, *por la observación 2.2 sabemos que el punto* $\pi(0)$ *es un punto fijo hiperbólico cuyas variedades estables e inestables* $W^s(\pi(0), f_A))$ *y* $W^u(\pi(0), f_A)$ *son las proyecciones de las variedades estables e inestables* $W^s(0, A))$ *y* $W^u(0, A)$ *respectivamente, o sea*

$$\begin{aligned} W^s(\pi(0), f_A) &= \pi(W^s(0, A))) \quad y \\ W^u(\pi(0), f_A) &= \pi(W^u(0, A))). \end{aligned}$$

En este caso tenemos como $W^s(0, A))$ *y* $W^u(0, A)$ *son transversales entonces sus respectivas proyecciones también son transversales.*

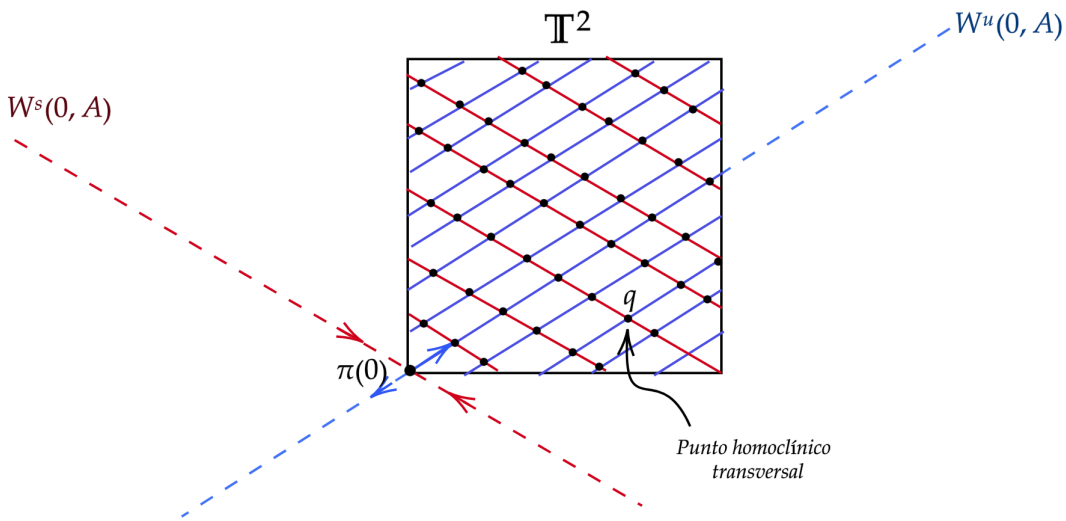


Figura 3.7: Puntos homoclínicos de una transformación hiperbólica.

Notemos también que existen infinitas intersecciones, o sea los puntos homoclínicos para el punto fijo hiperbólico $p = \pi(0)$ forman un conjunto infinito (puede ser demostrado que en verdad forman un conjunto denso en $\mathbb{T}^n$).

3.3.2 Teorema de Smale

El caos de un sistema esta estrechamente relacionado con la existencia de puntos hiperbólicos, mas precisamente cuando existen puntos homoclínicos transversales de puntos periódicos hiperbólicos. El teorema 1.2 caracteriza tanto los puntos que se aproxima y se alejan de un punto fijo hiperbólico, los cuales forman dos sub-variedades de M, W^s y W^u tangentes a los sub espacios E^s y E^u respectivamente, cuando estas variedades se intersectan transversalmente, es posible obtener un subconjunto invariante por la dinámica, en el cual la dinámica es muy similar a la dinámica en la herradura de Smale y por lo tanto podemos relacionarlo con una dinámica simbólica por medio de conjugaciones topológicas.

En lo que sigue, cambiaremos de alfabeto, o sea, en ves de trabajar con $\sigma_N = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ trabajaremos con $\sigma_N = \{1, \ldots, N\}$, para que así los índices de una matriz de transición A empiecen desde 1.

Teorema 3.14. *[4] Sea $q \in M$ es un punto homoclínico transversal para un punto periódico hiperbólico $p \in M$ para un difeomorfismo $f : M \to M$.*

(a) *Para cada vecindad U de $\{p, q\}$, existe un entero positivo n tal que f^n tiene un conjunto invariante hiperbólico $\Lambda \subset U$ con $p, q \in \Lambda$ para el cual f^n es topológicamente conjugado a la aplicación shift bilateral en el espacio de dos símbolos, σ en Σ_2. Así, $\Lambda \subset \mathrm{cl}(\mathrm{Per}(f)) \subset \Omega(f)$ e $q \in \mathrm{cl}(\mathrm{Per}(f))$.*

(b) *Sea V una vecindad de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$. Entonces existe una vecindad menor $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ de $\mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$ con $n \geq 2$, $B \subset V$, tal que $\Lambda_B = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f^j(B) \subset V$ es un conjunto invariante hiperbólico para f y $f|_{\Lambda_B}$ es topológicamente conjugado con la aplicación shift σ_A sobre un sub-shift transitivo bilateral de tipo finito con n símbolos, $\Sigma_A \subset \Sigma_n$. Además si $q \in \mathrm{cl}(\mathrm{Per}(f))$ y p es un punto fijo entonces la matriz de transición $A = (a_{i,j})$ para el sub-shift de tipo finito es*

dada por

$$a_{1,j} = \begin{cases} 1 \ \textit{para } j = 1,2 \\ 0 \ \textit{para } j \neq 1,2 \end{cases}$$

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 \ \textit{para } j = i+1, \ 2 \leq i < n \\ 0 \ \textit{para } j \neq i+1, \ 2 \leq i < n \end{cases}$$

$$a_{n-1,j} = \begin{cases} 1 \ \textit{para } j = 1 \\ 0 \ \textit{para } j \neq 1 \end{cases}$$

Demostración. Sea $\Lambda_q = \mathcal{O}(p) \cup \mathcal{O}(q)$, este conjunto obviamente es invariante y cerrado pues $\alpha(q) = \omega(q) = \mathcal{O}(p)$. El primer paso es demostrar que Λ_q tiene una estructura hiperbólica. El segundo paso es demostrar que si V es una vecindad suficientemente pequeña de Λ_q, entonces el conjunto invariante maximal definido a partir de V, $\Lambda_V = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(V)$, también tiene estructura hiperbólica. El tercer paso, será demostrar los ítems (a) y (b) usando cajas contenidas en los espacios respectivos, estas cajas son similares a las utilizadas para la herradura de Smale. Para la parte (a), encontramos dos cajas disjuntas V_0 y V_1 contenidos en V y $n > 0$ de modo que cada una de las imágenes $f^n(V_i)$ intersectan V_1 y V_2, así deducimos que f^n restringido a $\Lambda = \bigcap_{m=-\infty}^{\infty} f^{mn}(V_1 \cup V_2)$ es topologicamente conjugada con el subshift bilateral de dos símbolos. Para el ítem (b), usamos cajas cerradas disjuntas $B_i \subset V$ de modo que la unión $B = \bigcup_i B_i$ es una vecindad de Λ_q. Este vecindad B está contenido dentro de V, por lo que $\Lambda_B = \bigcap_{m\in\mathbb{Z}} f^m(B) \subset \Lambda_V$ tiene estructura hiperbólica. Una de las diferencias del ítem (b) y el ítem (a) es que es que la imagen de cada $f(B_i)$ no se cruza con los demás B_j. Sin embargo, cada intersección no vacía $f(B_j) \cap B_j$ atraviesa completamente B_j, por lo que se puede mostrar que Λ_B es conjugado con un subshift de tipo finito.

Asumamos que p es punto fijo, para el caso en que p es punto periódico hacemos el mismo proceso para $f^{k_0}(p)$ donde k_0 es el periodo de p y por lo tanto $f^{k_0}(p)$ es punto fijo hiperbólico. Ahora como estamos asumiendo que p es punto fijo, $\Lambda_q = \mathcal{O}(q) \cup \{p\}$, tomemos $q_m = f^m(q)$.

- **Hiperbolicidad de Λ_q:**

  Para cada punto $x \in \Lambda_q$ y para $\sigma = s, u$ sea $\mathbb{E}_x^\sigma = T_x(W^\sigma(p))$. Como el conjunto $\mathcal{O}(q) = \{q_m = f^m(q) : m \in \mathbb{Z}\}$ es un conjunto discreto, obviamente la descomposición $\mathbb{E}_x^\sigma = T_x(W^\sigma(p))$ es contínua en $\mathcal{O}(q)$, pues $\mathcal{O}(q)$ es un conjunto discreto. Para verificar que esas descomposiciones son continuas en $\Lambda_q = \mathcal{O}(q) \cup \{p\}$ debemos probar que si $x \in \mathcal{O}(q)$ se aproxima a p entonces la descomposición en el punto x se aproxima a la descomposición en el

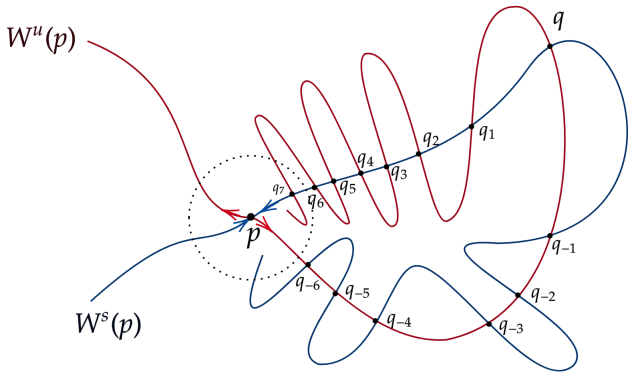


Figura 3.8: Construcción del conjunto Hiperbólico Λ_q.

punto p. Con efecto, considere q_m cuando m tiende al infinito, entonces q_m se aproxima a p y como por el Teorema 1.2 el conjunto $W^s(p)$ es una subvariedad de clase C^1, entonces

$$\lim_{m\to+\infty} T_{q_m}W^s(p) = T_pW^s(p) = E^s_p$$

por lo tanto $\lim_{m\to+\infty} \mathbb{E}^s_{q_m} = E^s_p$. Por otro lado, por el Lema 1.4 tenemos que el fibrado inestable $\mathbb{E}^u_{q_m} = T_{q_m}(W^u(p))$ se aproxima a $\mathbb{E}^u_p$, por lo tanto

$$\lim_{n\to+\infty} T_{q_{-m}}E^u_{q_{-m}} = E^u_p.$$

Ahora verificaremos que los vectores en $\mathbb{E}^s|\Lambda_q$ son uniformemente contraídos. Podemos tomar uma métrica adaptada para que en $\mathbb{E}^s_p$ la derivada sea una contracción. $\|Df_p|\mathbb{E}^s_p\| < \lambda < 1$. Por continuidad, existe uma vecindad U_p de p tal que $\|Df_{q_m}|\mathbb{E}^s_{q_m}\| < \lambda$ para todo $q_m \in U_p$, luego como existe solo um número finito de $q_m \in \Lambda_q \setminus U_p$. Entonces existen enteros positivos n_0, m_0 tales que $\Lambda_q \setminus U_p = \{q_{-n_0}, q_{-n_0+1} \dots q_{m_0}\}$, luego para cada $x \in \Lambda_q \setminus U_p$ tenemos que $f^{m_0+n_0+1} \in U_p$, luego tomemos

$$C = \lambda^{-(m_0+n_0+1)} \max_{-n_0\le j\le m_0} \|Df_{q_j}\|,$$

Por lo tanto, dado $q_m \in \Lambda_q \setminus U_p$ y $v \in \mathbb{E}^s_{q_m}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|Df^n_{q_m}(v)\| = \|Df^{n+m}_q(Df_{q_{-m}}v)\| &= \|Df^{n+m-m_0-1}_{f^{m_0+1}(q)}(Df_{q_{-m+m_0+1}}v)\| \\
&= \|Df^{n+m-m_0-1}_{q_{m_0+1}}(Df_{q_{-m+m_0+1}}v)\| \\
&\le \lambda^{n+m-m_0-n_0-1}\|Df_{q_{-m+m_0+1}}v\| \\
&\le \lambda^{n+m-m_0-n_0-1}\|Df_{q_{-m+m_0+1}}\|.\|v\| \\
&\le \lambda^{n+m-m_0-n_0-1}C\lambda^{m_0+n_0+1}\|v\| \\
&= C\lambda^n\|v\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|Df^n_{q_m}|\mathbb{E}^s_{q_m}\| \leq C\lambda^n$ para cualquier $q_m \in \Lambda_q$ y todo entero $n > 0$. Las estimativas para $\mathbb{E}^u|\Lambda_q$ son similares, solo debemos intercambiar f por f^{-1}. Esto demuestra la hiperbolicidad de Λ_q.

- **Hiperbolicidad de Λ_V:**

Por simplicidad, tomamos la métrica adaptada en Λ_q como en el Lema 1.3, de tal manera que $C = 1$, o sea, con la métrica adaptada tenemos para $x \in \Lambda_q$, Df_x es una contração en $\mathbb{E}^s_x$ y una expansión en $\mathbb{E}^u_x$. Extenderemos la descomposición $\mathbb{E}^s_x \oplus \mathbb{E}^u_x$ en Λ_q a una descomposición contínua (probablemente no invariante) $\widehat{\mathbb{E}}^s_x \oplus \widehat{\mathbb{E}}^u_x$ en una vecindad V de Λ_q. Para eso usamos conos C^s y C^u para demostrar que existe una descomposición invariante que se aproxima a $\widehat{\mathbb{E}}^s_x \oplus \widehat{\mathbb{E}}^u_x$ y extiende la descomposición $\mathbb{E}^s_x \oplus \mathbb{E}^u_x$ en Λ_q. Usando la métrica adaptada, para $x \in V$, sea

$$C^s(x) = \{(\xi, \eta) \in \widehat{\mathbb{E}}^s_x \oplus \widehat{\mathbb{E}}^u_x : |\eta| \leq \mu|\xi|\}$$

y

$$C^u(x) = \{(\xi, \eta) \in \widehat{\mathbb{E}}^s_x \oplus \widehat{\mathbb{E}}^u_x : |\xi| \leq \mu|\eta|\}$$

para algún $0 < \mu < 1$. Por la hiperbolicidad en Λ_q y la continuidad, existe uma vecindad V de Λ_q tal que

$$\begin{aligned}
&Df_x C^u(x) \subset C^u(f(x)) \quad \text{para } x, f(x) \in V,\\
&Df_x^{-1} C^s(x) \subset C^s(f^{-1}(x)) \quad \text{para } x, f^{-1}(x) \in V,\\
&|Df_x^m v^u| \geq \lambda^{-m}|v^u| \quad \text{para } f^i(x) \in V \text{ para } 0 \leq i < m, \quad \text{y}\\
&|Df_x^{-m} v^s| \geq \lambda^{-m}|v^s| \quad \text{para } f^{-i}(x) \in V \text{ para } 0 \leq i < m
\end{aligned}$$

para cualquier $v^u \in C^u(x)$ e $v^s \in C^s(x)$. Sea $\Lambda_V = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(V) \supset \Lambda_q$, para este vecindad V y $x \in \Lambda_V$, definamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^u_x &= \bigcap_{i\geq 0} Df^i_{f^{-i}(x)} C^u(f^{-i}(x))\\
\mathbb{E}^s_x &= \bigcap_{i\geq 0} Df^{-i}_{f^i(x)} C^s(f^i(x))
\end{aligned}$$

Devido a las estimativas de expansión, estos son sub espacios para cada $x \in \Lambda_V$ que dependen continuamente de x, y tienen las propriedades usuales de invariancia e satisfacen $\mathbb{E}^s_x \oplus \mathbb{E}^u_x = T_xM$. Por las desigualdades para todos los vetores en los conos, los vectores en $\mathbb{E}^u_x$ y $\mathbb{E}^s_x$ son expandidos e contraídos, respectivamente, de modo que por el Teorema 1.5, Λ_V es un conjunto invariante hiperbólico.

- **Existencia de una herradura de Smale:**

  Para obtener el conjunto invariante tal que f restricto a ese conjunto sea conjugado al subshift, construímos cuidadosamente una vecindad menor de Λ_q, $B \subset V$, como una unión finita de "cajas". Cada caja B_i corresponde a um símbolo del subshift. Las transiciones permitidas en este subshift son exatamente aquellas para las cuales $f(B_i) \cap B_j \neq \emptyset$. Las imágenes de las cajas B_i están correctamente alineadas de modo que una sucesión de símbolos es permitida si y solamente si existe un punto cuya órbita pasa por esa secuencia de cajas. Como $B \subset V$, $\Lambda_B \subset \Lambda_V$, así Λ_B tiene una estructura hiperbólica.

  Por el teorema 1.4 podemos tomar coordenadas próximas a p inducidas por la descomposición hiperbólica. De hecho, podemos tomar coordenadas para que una vecindad pueda ser considerada como um subconjunto de $\mathbb{E}^s_p \times \mathbb{E}^u_p$, y las variedades locales estables y inestables son discos en los subespacios dados por la descomposición, o sea, localmente tenemos las siguientes identificaciones

  $$W^s_r(p) \cong \mathbb{E}^s_p(r) \times \{0\} \ \text{ y } \ W^u_r(p) \cong \{0\} \times \mathbb{E}^u_p(r).$$

  Para $\delta_s, \delta_u > 0$, sean $D^s = W^s_{\delta_s}(p)$ e $D^u = W^u_{\delta_u}(p)$. Considerando también $D^s = \mathbb{E}^s_p(\delta_s)$ y $D^u = \mathbb{E}^s_p(\delta_u)$ y tomamos su produto cartesiano en coordenadas locales cerca de p. Podemos tomar $\delta_s, \delta_u > 0$ y $k > 0$ tal que

  $$q \in \text{int}[f^{-k}(D^s) \setminus f^{-(k-1)}(D^s)]$$
  $$q \in \text{int}[f^{k}(D^s) \setminus f^{(k-1)}(D^s)],$$

  donde el interior de los conjuntos son tomados en relación a $W^s(p)$ y $W^u(p)$, respectivamente. Ver Figura 3.10. Podemos también asegurar que $D^s \times D^u \subset V$ (resp. U) donde V (resp. U) es la vecindad de Λ_q (resp. $\{p, q\}$) dada en la afirmación de la parte (b) (resp. en la parte (a)). Para el mismo entero k trabajamos tanto para el tiempo futuro y para el tiempo pasado, los tamaños relativos de δ_s y δ_u necesitan ser ajustados.

  Como k es fijo, tome $j_1 \geq 0$ de tal modo que para $j \geq j_1$, $f^k(D^u)$ cruza $f^{-k}(D^s \times f^{-j}(D^u))$ transversalmente en cada componente de la intersección conteniendo a q y p. Por transversalmente, queremos decir que cruza transversalmente cada "fibra horizontal"$f^{-k}(D^s \times \{y\})$ una vez para cada $y \in f^{-j}(D^u)$. Así $f^k(D^u)$ es un "disco vertical"pasando por q, ver Figura 3.10.

  Para $j \geq j_1$, por el Lema de la inclinación tenemos quer el conjunto

  $$f^{2k+j} \circ f^{-k}(D^s \times f^{-j}(D^u)) = f^{k+j} D^s \times f^j(D^u)$$

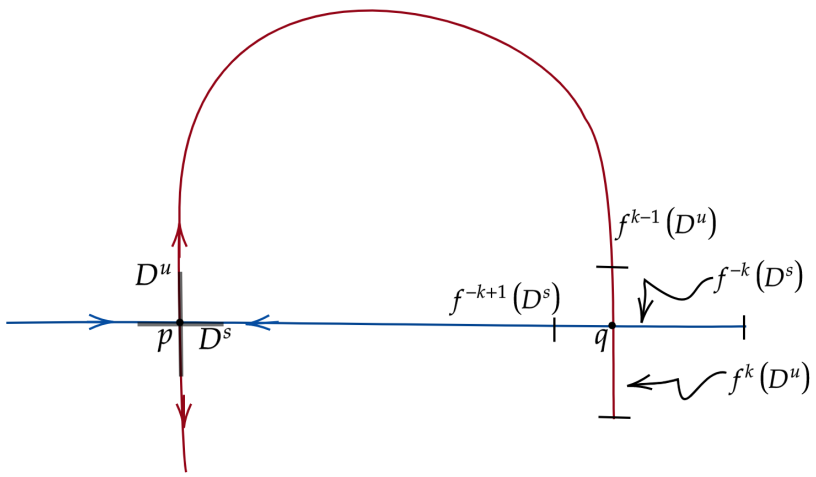


Figura 3.9: Imágenes de discos D^s e D^u

es una vecindad mas fina de $f^k(D^u)$. Por lo tanto, para $j \geq j_1$ lo suficientemente grande, $f^{k+j}(D^s \times f^{-j}(D^u))$ cruza transversalmente a $f^{-k}(D^s \times f^{-j}(D^u))$ en dos componentes, una conteniendo a p y la otra conteniendo a q. En particular, cada "fibra"$f^{k+j}(\{x\} \times f^{-j}(D^u))$ cruza a cada $f^{-k}(D^s \times \{y\})$ solo una vez para cada $x \in D^s$ e $y \in f^{-j}(D^u)$. Note la similitud con la herradura de Smale:

Fijemos un $j \geq j_1$ suficientemente grande para satisfazer las condiciones mencionadas anteriormente. Sea $n = 2k + j$,

$$\begin{aligned} B_1 &= D^s \times f^{-j}(D^u), \text{ y} \\ \mathcal{D} &= f^{-k}(B_1). \end{aligned}$$

Haciendo $\text{comp}_z(B)$ la componente conexa de B pasando por z, junto con

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{comp}_p(\mathcal{D} \cap f^n(\mathcal{D})) \subset B_1, \\ V_2 &= \text{comp}_q(\mathcal{D} \cap f^n(\mathcal{D})), \text{ y} \\ B_i &= f^{i-1-k-j}(V_2) \end{aligned}$$

para $2 \leq i \leq n$. El conjunto de cajas $\{V_1, V_2\}$ es usado para la demostración de la parte (a), y el conjunto de cajas $\{B_i : 1 \leq i \leq n\}$ es usado en la prueba de la parte (b).

Demostración del Item (b):

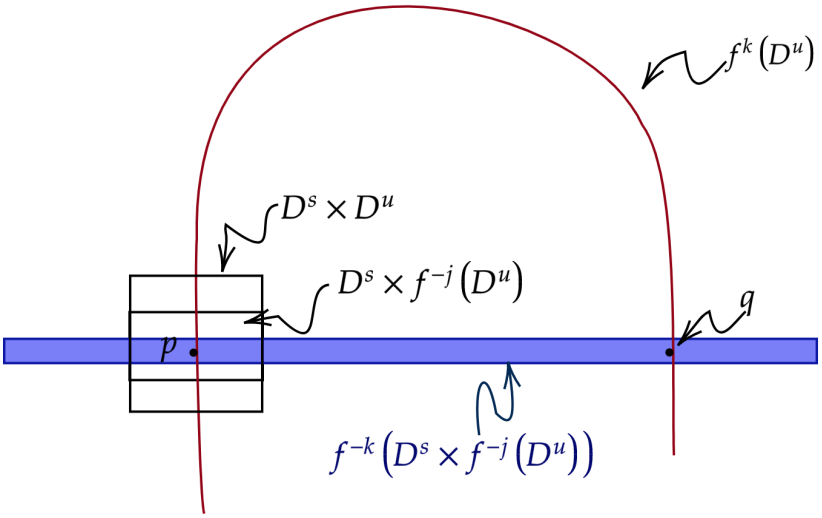


Figura 3.10: Elección de $f^{-k}(D^s \times f^{-j}(D^u))$

Sea $B = \bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i$, ara j suficientemente grande, $B \subset V$. Luego tomamos

$$\Lambda_B = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(B),$$

el conjunto Λ_B es el conjunto invariante maximal en B, donde $\Lambda_B \subset \Lambda_V \subset V$, y además de eso Λ_B tiene estrutura hiperbólica.

Ahora demostraremos que las cajas B_i pueden ser usadas como símbolos, así Λ_B será conjugado a un subshift de tipo finito. Con efecto, por construcción, $f^{-k}(B_1)$ y $f^{k+j}(B_1) = f^n(\mathcal{D})$ cruzan V_1, pero $f^l(B_1) \cap V_2 = \emptyset$ para $-k \leq \ell \leq k + j$. Sigue que

(i) $f(B_1)$ cruza B_1 e $f^{-k-j+1}(V_2) = B_2$ pero no cruza a B_i, para $i > 2$,

(ii) $f^k(V_2) = f \circ f^{2k+j-1-k-j}(V_2) = f(B_n)$ pasa por B_1, y

(iii) $f^\ell(V_2) \cap B_1 = \emptyset$ para $-k - j < \ell < k$, así $B_i \cap B_1 = \emptyset$ para $2 \leq i \leq n$.

Así, construímos las cajas disjuntas deseadas para los símbolos. El primer símbolo, B_1, va para el mismo o B_2. Los otros símbolos solo pueden ir para el próximo símbolo: B_i, va para B_{i+1} para $2 \leq i < n$ y B_n va para B_1. Por lo tanto, la matriz de transición para el subshift es dado como en el enunciado del teorema.

En la construcción de estas cajas, ellas están correctamente alineadas: cada una de esas cajas pueden ser atribuidas coordenadas de modo que la imagen de un disco inestable en B_i cruza B_{i+1} en la direção inestable y las imágenes inversas de um disco estable B_i cruza B_{i-1} en la dirección estable.

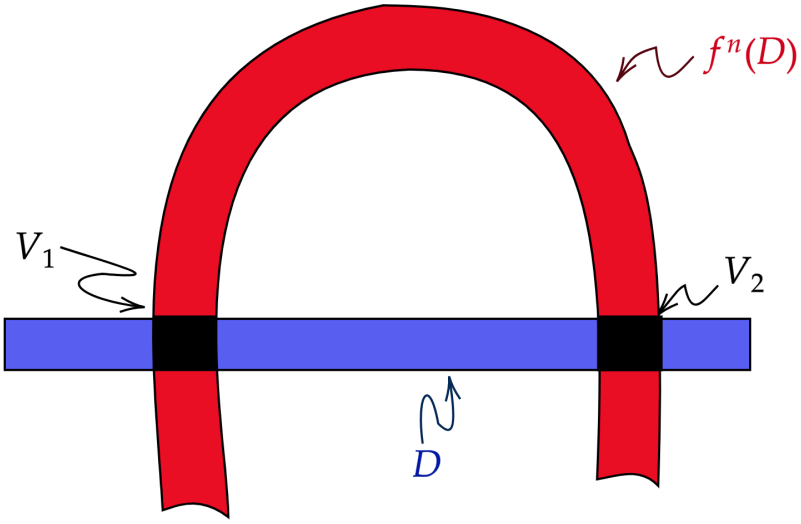


Figura 3.11: D y $f^n(D) = f^{2k+j}(D)$ para $D = f^{-k}(D^s \times f^{-j}(D^u))$.

Definamos $h : \Lambda_B \to \Sigma_A$ como la função itinerário por $h(x) = \omega$ donde $f^i(x) \in B_{\omega_i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Como las cajas son disjuntas, h está bien definido. Fije cualquier símbolo $\omega \in \Sigma_A$. Para cualquier $m \geq 0$, como las imágenes de las cajas tienen un alineamiento topológico correcto, $\bigcap_{i=0}^{m} f^i(B_{\omega_{-i}})$ es una subcaja no vacía de B_{ω_0} lo cual se extiende por todo el camino através de la dirección inestable. De la misma forma, $\bigcap_{i=-m}^{0} f^i(B_{\omega_{-i}})$ es una sub caja não vacía de B_{ω_0} que se extiende por todo el camino através de la dirección estable. Por lo tanto, $\bigcap_{i=-m}^{0} f^i(B_{\omega_{-i}})$ y $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(B_{\omega_{-i}})$ son no vacías. Así, h es sobreyectiva. Por um argumento como usamos antes, $h \circ f|\Lambda_B = \sigma \circ h$, entonces h es una semi-conjugación. La inyectividad de h es consecuencia del hecho de que f tiene una estrutura hiperbólica en Λ_B. La contracción y expansión implican que para cualquier secuencia de símbolos $\omega \in \Sigma_A$ existe solo un punto en la intersección $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} f^i(B_{\omega_{-i}})$, o sea, existe solo un punto $x \in \Lambda$ tal que $f^i(x)$ está en la V_{ω_i} para todo i, por lo tanto, h é inyectiva.

Demostración del Item (a):

Sea U una vecindad abierta de p y q contenidas en el conjunto V definido anteriormente. Ahora, fijemos $k, j, n = 2k + j, \delta_s$, y δ_u como anteriormente. Por las elecciones anteriores, V_1 y V_2 son dos conjuntos correctamente alineados, y $V_1 \cup V_2 \subset U$. Por el hecho de que las imágenes de V_1 e V_2 por f^n se extienden verticalmente en $\mathcal{D}$,

$$S_0^{m-1} = \bigcap_{i=0}^{m-1} f^{in}(V_1 \cup V_2) = \bigcap_{i=0}^{m} f^{in}(\mathcal{D})$$

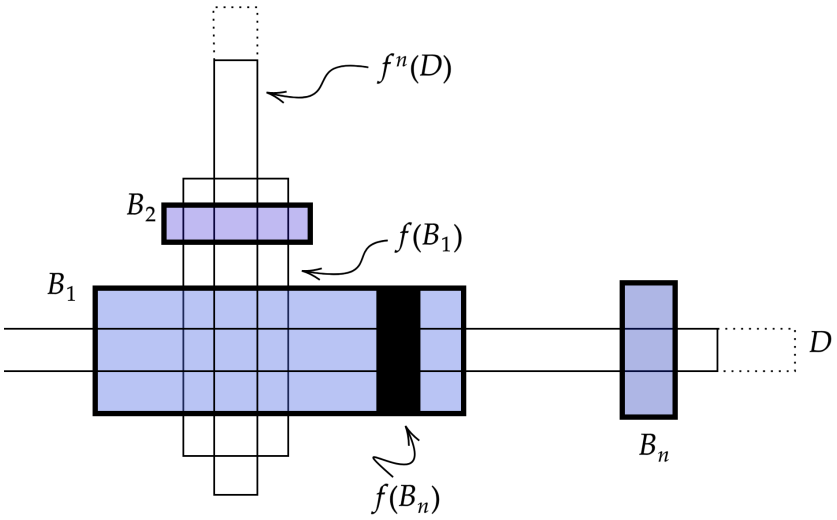


Figura 3.12: Elección de $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$

tiene 2^m componentes cada uno de los cuales se estiran verticalmente en $\mathcal{D}$. Análogamente

$$S_{-m}^{-1} = \bigcap_{i=-m}^{-1} f^{in}(V_1 \cup V_2) = \bigcap_{i=-m}^{0} f^{in}(\mathcal{D})$$

tiene 2^m componentes cada uno de los cuales se estiran horizontalmente en $\mathcal{D}$ transversalmente a las fibras verticales. Combinando

$$S_{-m}^{m-1} = \bigcap_{i=-m}^{m-1} f^{in}(V_1 \cup V_2)$$

tiene 2^{2m} componentes. (Hasta ahora no demostramos que el máximo de los diámetros de esas componentes tiende para cero cuando m va para infinito). Por argumentos como los de la herradura de Smale, existe una semi-conjugación $h : \Lambda \to \Sigma_2$, donde

$$\Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^{in}(V_1 \cup V_2),$$

que es sobreyectiva y tal que $h \circ f^n|\Lambda = \sigma \circ h$.

La inyectividad de h es consecuencia de que f^n tiene estructura hiperbólica en Λ: a contracción y expansión implica que para cualquier secuencia de símbolos s, existe un único punto $x \in \Lambda$ tal que $f^{in}(x)$ esta en la caja V_{s_i}, para todo $i \in \mathbb{Z}$. □

Corolario 3.9. *Supongamos que $q \in M$ es un punto homoclínico transversal para un punto periódico hiperbólico $p \in M$ de periódo m, para un difeomorfismo $f : M \to M$. Entonces:*

$$h_{top}(f) > 0.$$

Demostración. Por el Teorema 3.14 existe un conjunto invariante $\Lambda \subset M$, para el cual $f^m|_\Lambda$ es topologicamente conjugado al shift de Bernoullí del espacio de dos símbolos $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, luego por los Teoremas 3.2 y 3.5 tenemos que

$$h_{top}(f^m) \geq h_{top}(f^m|_\Lambda) = h_{top}(\sigma) = \log(2).$$

Finalmente, por el Teorema 3.1, tenemos que

$$h_{top}(f) = \frac{1}{m} h_{top}(f^m) \geq \frac{1}{m} \log(2) > 0.$$

□

Ejemplo 3.4. *Sea el Anosov lineal $f_A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, como en el Ejemplo 3.3 entonces como tenemos existencia de intersecciones homoclínicas transversales para el punto fijo $p = \pi(0)$, entonces por el Teorema 3.14 existe un conjunto compacto invariante $\Lambda \subset \mathbb{T}_2$ tal que $f|\Lambda$ es topologicamente conjugado con el shift bilateral de dos símbolos $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, entonces por los Teoremas 3.2 y 3.5 tenemos que*

$$h_{top}(f|\Lambda) = h_{top}(\sigma) = \log(2).$$

Luego, como $\Lambda \subset \mathbb{T}^2$ entonces $h_{top}(f) \geq h_{top}(f|\Lambda)$, por lo tanto, todo Anosov lineal es caótica, pues

$$h_{top}(f) \geq \log(2).$$

Capítulo 4:

Conclusiones

- Siempre es posible determinar la caoticidad de un sistema dinámico a partir de su conjugado.
- El sistema dinámico generado por la función logística es caótica, pues existe una restricción a un conjunto invariante de este sistema que es topológicamente conjugado a un sistema dinámico simbólico de dos símbolos.
- Cada vez que exista un punto homoclínico transversal para un punto periódico hiperbólico de una dinámica dada por un difeomorfismo, definido en una variedad Riemanniana compacta, se concluye que:
    - Existe una herradura de Smale invariante por una iterada de dicha dinámica, inmersa en la variedad. Dicha iterada de la dinámica restricta a la herradura de Smale es topológicamente conjugada al shift de Bernoullí de dos símbolos.
    - Le entropía topológica del difeomorfismo es positiva, o sea, el difeomorfismo es caótico.

Capítulo 5:

Sugerencias

Para estudios posteriores se sugiere tener en cuenta las siguientes interrogantes:

1. ¿Qué condiciones debería tener un difeomorfismo con un punto homoclínico tangencial para obtener el resultado análogo al Teorema de Smale?

2. ¿Qué relación tiene la entropía topológica con el conjunto hiperbólico que aparece en el Teorema de Smale?

3. En el caso de dimensión uno, ¿Cuales serían las condiciones necesarias para obtener el caos de un sistema haciendo conjugaciones con una dinámica simbólica?

4. ¿La caoticidad de una dinámica siempre está relacionado con la existencia de un conjunto de Cantor invariante?

Bibliografía

[1] Cartwright, M. L., Littlewood, J. E. *On non-linear differential equations of the second order I.*J. London Math. Soc. (1945) 20, 180–189.

[2] Palis Jr and J. Welington de Melo. *Geometric theory of dynamical systems: an introduction,* Rio de Janeiro,1975.

[3] P. Hartman. *Ordinary differential equations,* Willey, 1964.

[4] Robinson, C. *Dynamical systems: Stabilily, Symbolic Dynamics and Chaos*. Studies in advanced mathematics). ISBN G-8493·8493-1.

[5] R. A. Horn, C. R. Johnson *Matrix Analysis* Matrix Analysis. Cambridge University Press, 2007.

[6] Sambarino, Martın. *Hiperbolicidad y estabilidad.* XXII Escuela venezolana de matematicas (2009).

[7] Shub, Michael. *Global stability of dynamical systems.* Springer Science Business Media, 2013.

[8] Smale, S. *Difeomorphisms with many periodic points, Diferential and Combinatorial Topology.* Princeton Univ. Press, (1964) 63-80.

[9] Brin, M., and Stuck, G. *Introduction to dynamical systems.* Cambridge university press, 2002.