UNIVERSIDAD NACIONAL
“PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN PARA EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA LEY DE CONSERVACIÓN EN EL ESPACIO UNIDIMENSIONAL”

Tesis
Para optar el título profesional de
Licenciado en Matemáticas

presentado por:

Bach. Mat. Sánchez Carranza José Alciviades
Bach. Mat. Recoba Sánchez Clemente

Asesor
Lic. Mat. Cornetero Capitán Juan Antonio

Lambayeque – Perú
2016

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Escuela Profesional De Matemática

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada "Existencia y unicidad de la solución para el problema de Cauchy asociado a una Ley de Conservación en el Espacio Unidimensional", presentado por el Bach. Mat. Sánchez Carranza José Alciviades y el Bach. Mat. Recoba Sánchez Clemente en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

M Sc. Manuel Augencio Sandoval Rodríguez
Presidente del Jurado

Lic. Mat. Rolando Javier Córdova Descalzi
Secretario del Jurado

Mg. Oscar Antonio Santamaría Santisteban
Vocal del Jurado

Fecha de defensa: 16 de Setiembre de 2016

Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

"EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN PARA EL PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA LEY DE CONSERVACIÓN EN EL ESPACIO UNIDIMENSIONAL"

Lic. Mat. Cornetero Capitán Juan Antonio

Asesor

Bach. Mat. Sánchez Carranza José Alciviades

Autor

Bach. Mat. Recoba Sánchez Clemente

Autor

Lambayeque – Perú

2016

Agradecimiento

Agradecemos en primer lugar a Dios quien nos da la vida y la ha llenado de bendiciones en todo este tiempo, a él que con su infinito amor nos ha dado la sabiduría suficiente para culminar nuestra carrera universitaria.

Así también debemos expresar nuestro más sincero agradecimiento, reconocimiento y cariño a nuestros padres por todo el esfuerzo que hicieron para darnos una profesión y hacernos una persona de bien, gracias por los sacrificios y la paciencia que demostraron todos estos años; gracias a ustedes hemos llegado hasta aquí.

Agradecemos también de manera especial a nuestro asesor de tesis: Lic. Mat. Juan Cornetero Capitan quién con sus conocimientos y apoyo supo guiar el desarrollo de la presente tesis desde el inicio hasta su culminación.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi madre Carranza Vergara Marina Rosalina y a la memoria de mi padre Sánchez Vásquez José Alciviades por brindarme su comprensión, paciencia, cariño, apoyo incondicional y por su esfuerzo en hacer de mi un profesional.

José Sánchez

A todos mis seres queridos, ya que por ellos he podido realizar mi anhelado sueño, obtener mi digna profesión.

Clemente Recoba

Resumen

En esta tesis, se hace una revisión bibliográfica acerca de la existencia y unicidad de la solución para el problema de Cauchy asociado a una ley de conservación en el espacio unidimensional.
En el primer capítulo, se estudia la Teoría Clásica para el siguiente Problema de Cauchy en un espacio unidimensional,

$$\left\{ \begin{array}{c} x'(t) = f(x,t), \qquad (x,t) \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} \tag{1.1}$$

y haciendo uso del Teorema de Arzela-Ascoli se demuestra que el Problema de Cauchy tiene solución única cuando la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o función del lado derecho, es una función continua.

En el segundo capítulo, estudiaremos la teoría referente a las Soluciones Generalizadas para el Problema de Cauchy con discontinuidad en el lado derecho en un espacio unidimensional, iniciamos definiendo las funciones de Caratheodory, que juntamente con la definición de función absolutamente continua nos permiten definir las soluciones en el sentido de Caratheodory. Además estudiaremos las funciones multivaluadas e inclusiones diferenciales que servirán para definir las soluciones en el sentido de Filippov.

En el tercer capítulo, presentaremos condiciones y resultados que garantizan la existencia y unicidad del Problema de Cauchy en un espacio unidimensional en el sentido de Caratheodory. También presentaremos resultados mediante los cuales la existencia de solución del Problema de Cauchy en un espacio unidimensional en el sentido de Filippov queda garantizada, aquí sin embargo la unicidad solo es posible para un caso particular, en cuya demostración usaremos leyes de conservación para el caso escalar.

Índice general

Capítulo 1

Teoría Clásica del Problema de Cauchy en un Espacio Unidimensional

SECCIÓN 1.1

Problema de Cauchy: Teorema de Cauchy-Peano

Dado el siguiente Problema de Cauchy:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, como se sabe el llamado Problema de Cauchy consiste en hallar una función $x(t)$ que verifique

$$\left\{ \begin{array}{rcll} x'(t) & = & f(x,t) & \quad (x,t) \text{ en } \mathbb{R}^2 \\ x(t_0) & = & x_0 & \end{array} \right\} \tag{1.1}$$

Si $f(x,t)$ es una función discontinua, no se puede aplicar el Teorema de Peano, Para hallar una solución al Problema de Cauchy.
Para solucionar el problema anterior se necesita la noción de las llamadas "soluciones generalizadas", antes de definirlas se hará un breve recorrido por las definiciones y resultados que serán de utilidad para entender de mejor manera la definición de las "soluciones generalizadas".
El siguiente resultado sirve para demostrar que una función continua definida en un compacto en $\mathbb{R}^n$ puede ser aproximada por polinomios.

Teorema 1.1. Para una función continua f definida sobre el intervalo $[0,1]$ la sucesión

de polinomios
$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$
converge uniformemente hacia la función f.

Demostración. Denotando por $r_k(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ de donde se tiene
$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k(x) f\left(\frac{k}{n}\right)$$
Luego
$$\begin{aligned}
B_n(1)(x) &= \sum_{k=0}^{n} r_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1\\
B_n(x)(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right) r_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} = x\\
B_n(x^2)(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 r_k(x) = \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\
&= \frac{n-1}{n}x\sum_{j=0}^{n-1}\frac{j}{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j} + \frac{x}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j}\\
&= \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x
\end{aligned}$$
Con lo cual se muestra que el teorema se cumple si $f = 1,\ f = x;\ f = x^2$.

A continuación se muestra que el teorema es válido para una función continua f arbitraria.

Por ser el intervalo $[0,1]$ un compacto en $\mathbb{R}$ entonces es uniformemente continua en $[0,1]$, luego dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$: $|x-y| < \delta$ entonces $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Sean $x \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$ cualesquiera y considérese los conjuntos
$$I_1 = \{k : 0 \le k \le n;\ \left|x - \frac{k}{n}\right| \le \delta\};\qquad I_2 = I_1 = \{k : 0 \le k \le n;\ \left|x - \frac{k}{n}\right| > \delta\}$$
Entonces, usando el hecho que $\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = 1$, se tiene
$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) r_k(x)\right)\right| &\le \sum_{k\in I_1}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) + \sum_{k\in I_2}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x)\\
&\le \varepsilon + \sum_{k\in I_2}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x)
\end{aligned}$$

sea M una cota superior de la función f en $[0,1]$.
De la definición de I_2 se tiene que $k \in I_2$ si y solamente si $1 < \frac{1}{\delta^2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2$.
Usando estos hechos se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in I_2}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) &\leq \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k\in I_2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 r_k(x) \\
&\leq \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 r_k(x) \\
&= \frac{2M}{\delta^2}\left(x^2 - 2x^2 + \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x\right) \\
&= \frac{2M}{\delta^2 n}x(1-x) \\
&\leq \frac{2M}{\delta^2 n}
\end{aligned}$$

Ahora como $\frac{1}{n} \to 0$, cuando $n \to \infty$ se tiene que $\frac{2M}{\delta^2 n} \leq \frac{2M}{\delta}\varepsilon$ independiente de x.
De lo cual sin pérdida de generalidad se tiene

$$\sum_{k\in I_2}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| r_k(x) \leq \varepsilon$$

Por lo tanto $\left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) r_k(x)\right)\right| \leq \varepsilon$, de lo cual se deduce que la sucesión $B_n(f)$ converge uniformemente hacia f.
Ahora se generaliza hacia el compacto $[a,b]$.
Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y defínase la función

$$\varphi(x) = (b-a)x + a$$

De donde: $f(x) = g(\varphi(x))$. Si $B_n(f)$, entonces $B_n(g) = B_n(f) \circ \varphi^{-1}$ converge uniformemente a g y de donde se obtiene

$$B_n(g)(x) = \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left((b-a)\frac{k}{n} + a\right)(x-a)^k(b-x)^{n-k}$$

$\square$

Teorema 1.2. Cada función continua $f : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida sobre un subconjunto compacto K de $\mathbb{R}^n$ puede ser aproximado uniformemente en el compacto por un polinomio.

Demostración. Se define $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, donde cada f_i es una función real de variable real, usando el Teorema 1.1 se concluye la demostración del teorema. $\square$

Teorema 1.3 (Teorema de Arzela-Ascoli)**.** Sea K un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $C(K)$. Suponga que $\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinua; es decir: $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que:

$$d(x_1, x_2) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,\ \forall f \in \mathcal{F}$$

entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $C(K)$.

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, luego por hipótesis dado que $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$: si

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

Consideremos un cubrimiento abierto de K, formado por bolas abiertas centradas en cada punto $x \in K$, denotadas por $B(x, \delta)$ es decir $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, \delta)$, usando el hecho que K es compacto, se tiene que existe x_1, x_2, $\ldots$, $x_n \in K$ tal que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \delta)$. De la compacidad de K, se deduce también, la existencia de un subconjunto denso numerable, $L \subset K$. Por la densidad de L, podemos elegir los puntos x_k en L y de la numerabilidad de L, deducimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(f_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$, la cual converge en cada punto de L.

Definamos $g_i = f_{n_i}$, $i \in \mathbb{N}$, en lo que sigue demostraremos que la subsucesión $(g_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en K.

En efecto, $(g_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente en L, de lo cual deducimos que $(g_i(x_k))_{i\in\mathbb{N}}$ es también convergente, para cada $i \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que $(g_i(x_k))_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, para cada $i \in \mathbb{N}$ y para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, es decir dado $\varepsilon > 0$, existe $N_k > 0$: si $i > N_k$, $j > N_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ entonces

$$|g_i(x_k) - g_j(x_k)| < \varepsilon$$

Sea $N = \max_k N_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, entonces si $i > N$, $j > N$ se tiene que

$$|g_i(x_k) - g_j(x_k)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.3}$$

Sea $x \in K$, entonces existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x \in B(x_k, \delta) \rightarrow d(x, x_k) < \delta$, se sigue de (1.2)

$$|g_i(x) - g_i(x_k)| < \varepsilon \tag{1.4}$$

Ahora, usando la desigualdad triangular, juntamente con (1.3) y (1.4), para $i > N$, $j > N$, obtenemos

$$|g_i(x) - g_j(x)| \leq |g_i(x) - g_j(x_k)| + |g_i(x_k) - g_j(x_k)| + |g_i(x_k) - g_j(x)| < 3\varepsilon$$

De donde, se sigue $|g_i(x) - g_j(x)| < 3\varepsilon$, por lo cual $(g_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego por la completitud de $\mathbb{R}$, se deduce que la subsucesión $(g_i(x))_{i\in\mathbb{N}}$ converge en cada punto $x \in K$, por lo cual $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Por lo tanto $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $C(K)$, con lo cual el teorema queda demostrado. □

El siguiente teorema garantiza la solución del problema (1.1) sobre conjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$

Teorema 1.4 (Teorema de Cauchy-Peano)**.** Sea $\mathcal{R} = [t_0, a] \times [x_0, b]$ un subconjunto compacto en $\mathbb{R}^2$ y $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua sobre $\mathcal{R}$, entonces existe por lo menos una solución de la del problema de Cauchy (1.1).

Demostración. Puesto que la función $h(s) = st_0 + (1-s)a$, $s \in [0,1]$ define un homeomorfismo entre los intervalos $[0,1]$ y $[t_0, a]$, sin pérdida de generalidad, en la demostración usaremos el intervalo $[0,1]$ en lugar del intervalo $[t_0, a]$.
Definamos sobre $[0,1]$ una familia de funciones del modo siguiente:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0, \quad t \in [0,1] \\ x_2(t) &= \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ x_0 + \int_0^{t-1/2} f(s, x_2(s))ds, & 1/2 < t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

De manera sucesiva, para definir $x_k(t)$ se divide el intervalo $[0,1]$ en k subintervalos del mismo tamaño, y en cada uno de ellos se define $x_k(t)$ a partir de los valores ya definidos en el subintervalo anterior, de la forma

$$\begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq 1/k \\ x_0 + \int_0^{t-1/k} f(s, x_k(s))ds, & i/k < t \leq i + 1/k, \ i = 1, 2, \ldots, k-1 \end{cases}$$

La familia $\mathcal{F} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisface las hipótesis del teorema de Arzela-Ascoli, como se muestra a continuación:
$\mathcal{F} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada: dado $t \in [0,1]$ se tiene:

$$|x_k(t)| = \left| x_0 + \int_0^{t-1/k} f(x_k(s), s)dx \right| \leq |x_0| + \int_0^{t-1/k} |f(x_k(s), s)|ds$$

de donde se obtiene:

$$|x_k(t)| \leq |x_0| + M|t - 1/k| \leq |x_0| + M$$

con $M = \text{máx}\{|f(x,t)| : (x,t) \in \mathcal{R}\}$

$$|x_k(t)| \leq |x_0| + M \quad \forall\, t \in [0,1],\ \forall\ k \geq 1$$

Por lo tanto: $\mathcal{F} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada.
$\mathcal{F} = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es equicontinua: dados $t_0, t \in [0,1]$ y $k \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$|x_k(t) - x_k(t_0)| = \left|\int_0^{t-1/k} f(x_k(s),s)ds - \int_0^{t_0-1/k} f(x_k(s),s)ds\right| = \left|\int_{t_0-1/k}^{t-1/k} f(x_k(s),s)ds\right|$$

de donde:

$$|x_k(t) - x_k(t_0)| \leq M|t - t_0|$$

Luego dado $\varepsilon > 0$ basta elegir: $\delta = \varepsilon/M$ tal que si: $t_0,\ t \in [0,1]$ y $|t - t_0| < \delta$ entonces se tiene que: $|x_k(t) - x_k(t_0)| < \varepsilon$, $\forall\ x_k \in \mathcal{F}$.
Por lo tanto $\mathcal{F}$ es equicontinua.
Ahora usando el teorema de Arzela-Ascoli, existe una subsucesión $(x_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente en $C[0,1]$, es decir $\exists\ x \in C[0,1]$ tal que $x_{k_m}(t) \to x(t)$ uniformemente en $[0,1]$ Nótese que cada subsucesión x_{k_m} se puede escribir en la forma

$$x_{k_m}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_{k_m}(s),s)ds - \int_{t-1/k_m} f(x_{k_m}(s),s)ds \tag{1.5}$$

Puesto que f es continua en $[0,1]$, y $x_{k_m}(t) \to x(t)$ uniformemente en $[0,1]$ se deduce que cuando $m \to \infty$

$$\int_0^t f(x_{k_m}(s),s) \to \int_0^t f(x(s),s)ds \tag{1.6}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\left|\int_{t-1/k_m} f(x_{k_m}(s),s)ds\right| \leq M\frac{1}{k_m}$$

entonces cuando $m \to \infty$

$$\left|\int_{t-1/k_m}^t f(x_{k_m}(s),s)ds\right| \to 0 \tag{1.7}$$

Luego, usando (1.6) y (1.7) en (1.5) se sigue que cuando $m \to \infty$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s),s)ds$$

es decir x satisface (1.1) y por lo tanto x es la solución buscada. □

Teorema 1.5 (Unicidad)**.** Bajo las mismas hipótesis del teorema de Cauchy-Peano, y si además para todo $t \in [t_0, a]$ y para todo x_1, $x_2 \in [x_0, b]$ se verifica que

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leq L\|x_1 - x_2\|$$

entonces el problema (1.1) tiene solución única.

Demostración. Sea $\alpha = \text{mín}\{a, b/M, 1/2L\}$, con $M = \text{máx}\{|f(x,t)| : (x,t) \in \mathcal{R}\}$;

$$E = C\left([t_0 - a, t_0 + a], [x_0 - b, x_0 + b]\right)$$

con norma $\|x\| = \text{máx}_{t \in [t_0, \alpha]} |x(t)|$, no es difícil comprobar que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Definamos el operador $T : E \to E$, con

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds$$

Primero, veamos que está bien definido

$$|T(x)(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds\right| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x(s), s)|ds \leq M|t - t_0| \leq M\alpha$$

Entonces, por definición de α, se sigue que

$$|T(x)(t) - x_0| \leq M\alpha \leq M(b/M) = b$$

y como por construcción T es un operador continuo, entonces T está bien definido. Por otra parte, sean x_1, $x_2 \in E$, entonces

$$\begin{aligned} |T(x_1)(t) - T(x_2)(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} f(x_1(s), s)ds - \int_{t_0}^{t} f(x_2(s), s)ds\right| \\ &= \left|\int_{t_0}^{t} [f(x_1(s), s) - f(x_2(s), s)]ds\right| \end{aligned}$$

de donde

$$|T(x_1)(t) - T(x_2)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(x_1(s), s) - f(x_2(s), s)|$$

usando la hipótesis adicional, se sigue que

$$|T(x_1)(t) - T(x_2)(t)| \leq \|x_1 - x_2\||t - t_0| \leq L\alpha\|x_1 - x_2\|$$

y así obtenemos

$$|T(x_1)(t) - T(x_2)(t)| \leq L\alpha\|x_1 - x_2\|$$

Por construcción de α se tiene que

$$\alpha < \frac{1}{L} \quad \Rightarrow \quad L\alpha < 1$$

Lo cual implica que T es una contracción, luego se satisfacen las hipótesis del teorema del punto fijo, por lo tanto la solución para la ecuación $Tx = x$ es único, lo cual implica que la solución del problema de Cauchy es única. □

Observación 1.

(I) Por construcción $x \in C[-\alpha, \alpha]$

(II) $x = f(x(t), t)$ entonces $x' \in C[-\alpha, \alpha]$

(III) De (i) y (ii) se tiene que $x \in C^1[-\alpha, \alpha]$

SECCIÓN 1.2

Funciones Absolutamente Continuas

En esta sección se presentan definiciones y resultados básicos de la teoría de Funciones Absolutas Continuas que serán de utilidad para el posterior estudio de las soluciones generalizadas de Caratheodory.

Definición 1.1 (Función absolutamente continua)**.** Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua sobre $[a, b]$ si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$$

Para cada colección finita $\{\langle x_i, x_i' \rangle\}$ de subintervalos no superpuestos con:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$$

Proposición 1.1. Toda función absolutamente continua es continua.

Demostración. Sea f una función absolutamente continua sobre $[a, b]$, y $\varepsilon > 0$.
Sean x y x_0 en $[a, b]$. Entonces el subintervalo $]x, x_0[\subset [x, x_0]$, el cual es compacto, luego podemos construir por el axioma de elección una colección de subintervalos no

superpuestos $\{]x_i, x_i'[\}$ de modo que $]x, x_0[\subset\ [x, x_0]\{]x_i, x_i'[\}$, de donde se sigue que $]x, x_0[\subset \{]x_i, x_i'[\}$ una colección finita de subintervalos no superpuestos con

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$$

de donde $|x - x_0| < \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$ entonces $|x - x_0| < \delta$.
Por ser f una función absolutamente continua sobre $[a, b]$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$$

de donde $|f(x) - f(x_0)| < \sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Es decir dado $\varepsilon > 0$ se tiene que existe $\delta > 0$ tal que si:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Luego f es continua en un punto arbitrario x_0 de $[a, b]$.
Por lo tanto f es continua en $[a, b]$. □

En lo que sigue dado $A \subset E$, a su medida se le denotará por mA

Proposición 1.2. Sea f una función no negativa integrable sobre un conjunto E. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto $A \subset E$ con $mA < \delta$ se cumple que:

$$\int_A f dm < \varepsilon$$

Demostración. Si f es acotada entonces $f(x) \leq k$, $\forall\ x \in E$ entonces $\int_A f dm \leq \int_A k dm = kmA$.
De donde dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \frac{\varepsilon}{k}$ tal que si $mA < \delta = \frac{\varepsilon}{k}$ se cumple

$$\int_A f dm \leq kmA < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \int_A f dm < \varepsilon$$

Si f no es acotada, para cada $n \in \mathbb{N}$, defínase:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n \\ n, & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Nótese que por construcción cada f_n es acotada y además también cada f_n converge hacia f en cada punto, entonces se cumplen las hipótesis del teorema de la convergencia monótona, por lo tanto existe N tal que

$$\int_E f_N dm > \int_E f dm - \frac{\varepsilon}{2}$$

De donde

$$\int_E (f - f_N) dm < \frac{\varepsilon}{2}$$

Escogiendo $\delta < \frac{\varepsilon}{2N}$ si $mA < \delta < \frac{\varepsilon}{2N}$ se tiene que

$$\int_A f dm = \int_A (f - f_N) dm + \int_A f_N dm < \int_E (f - f_N) dm + NmA < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de donde $\int_A f dm < \varepsilon$. □

Ejemplo 1.1. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable positiva, I un intervalo real no trivial y $f_I \to \mathbb{R}$ una función tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_x^y g(t) dt \qquad \forall\ x, y \in I$$

Entonces f es una función absolutamente continua en I además, para algún $z \in [x, x+h]$ se tiene que $f'(x) \leq g(z)$ para casi todo $x \in I$.

Demostración. Usando la proposición anterior se tiene que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que

$$\int_E g \leq \varepsilon \qquad \forall\, E \subseteq \mathbb{R} \text{ medible}$$

tal que $|E| \leq \delta$.

Entonces si $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_n < y_n$ son un conjunto finito de puntos de I, tales que

$$\sum_{i=1}^n |y_i - x_i| \leq \delta$$

tenemos que:

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{y_i} g(t) dt = \int_{\cup_I [x_i, y_i]} g \leq \varepsilon$$

de donde se sigue que

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| \leq \varepsilon,$$

por lo cual f es absolutamente continua. Por otra parte, si en la hipótesis hacemos $y = x + h$, y luego dividimos por h, obtenemos

$$\frac{1}{h}|f(x) - f(x+h)| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} g(t)dt \qquad (*)$$

Luego, usando el teorema del valor medio para integrales, existe $z \in [x, x+h]$ tal que

$$g(z) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} g(t)dt$$

De lo cual obtenemos que

$$\frac{1}{h}|f(x) - f(x+h)| \leq g(z)$$

Por último pasando al límite cuando $h \to 0$ tenemos que

$$f'(x) \leq g(z)$$

$\square$

Para obtener una cota de una función integrable se necesita las siguientes definiciones:

Definición 1.2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y considérese una colección enumerable de intervalos abiertos $\{I_n\}$ que cubren al conjunto A, es decir $A \subset \cup I_n$, se llama **medida exterior de** A, denotada por m^*A al ínfimo de todas las sumas de cada colección $\{I_n\}$ que cubre al conjunto A. Es decir:

$$m^*A = \inf_{A \subset \cup I_n} \sum l(I_n)$$

Ejemplo 1.2. Sea $A = \emptyset$, entonces considérese $I = \langle a, a \rangle$ luego $A \subset I$. Puesto que $\emptyset \subset J$, $\forall\ J \subset \mathbb{R}$, entonces $\inf_{A \subset \cup I_n} \sum l(I_n) \leq l(I) = a - a = 0$ entonces $m^*A = 0$.

Nota. Si $A \subset B$ entonces $m^*A \leq m^*B$

Definición 1.3. Una colección ζ de intervalos se dice que cubre al conjunto E en el **sentido de Vitalli**, si para cada $\varepsilon > 0$ y cualquier $x \in E \subset \mathbb{R}$ existe un intervalo $I \in \zeta$ tal que $x \in l$ y $l(I) < \varepsilon$.

Lema 1.1 (Lema de Vitalli)**.** Sea E un conjunto con $m^*E < \infty$ e ζ una colección de intervalos que cubren a E en el sentido de Vitalli. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe una colección disjunta finita $\{I_1, I_2, \ldots, I_N\} \subset \zeta$ tal que:

$$m^*\left(R - \bigcup_{n=1}^{N} I_n\right) < \varepsilon$$

Demostración. Será suficiente probar el lema cuando cada intervalo en ζ es cerrado, puesto que si no es así se reemplaza cada intervalo por su cerradura y como el conjunto de los extremos de I_1, I_2, ..., I_N tiene medida exterior cero, el resultado es valido.
Sea O un conjunto abierto de medida exterior finita conteniendo al conjunto E. Por hipótesis se tiene que ζ es un cubrimiento de Vitalli, se asume sin perdida de generalidad que cada I de ζ está contenido en O.
Se escoge una sucesión $\langle I_n \rangle$ de intervalos disjuntos de ζ por inducción como sigue:
Sea I_1 cualquier intervalo en ζ y supóngase que I_1, I_2, ..., I_N ya se han elegido. Sea k_n el supremo de las longitudes de los intervalos de ζ que no son ninguno de los intervalos I_1, I_2, ..., I_N. Como cada I está contenido en O se tiene que $k_n \leq m^*O < \infty$.
A menos que $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ se puede hallar I_{n+1} en ζ con $l(I_{n+1}) > \frac{1}{2}k_n$ y I_{n+1} disjunto de I_1, I_2, ..., I_N.
Así se obtiene una sucesión $\langle I_n \rangle$ de intervalos disjuntos de ζ y como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset O$ entonces $\sum l(I_n) \leq m^*O < \infty$ de donde se puede hallar un entero N tal que

$$\sum_{N+1}^{\infty} l(I_n) < \frac{\varepsilon}{5}$$

Sea $R = E - \bigcup_{n=1}^{N} I_n$.
De lo anterior se tiene que el lema queda probado si $m^*R < \varepsilon$.
En efecto
Sea x un punto arbitrario de R. Como $\bigcup_{n=1}^{N} I_n$ es un conjunto cerrado que no contiene a x se puede hallar un intervalo I de ζ que contenga a x y cuya longitud es tan pequeña que por lo tanto I no es ninguno de los intervalos I_1, I_2, ..., I_N. Si $I \cap I_i = \emptyset$, $i \leq n$, debemos tener

$$l(I) \leq k_n < 2l(I_{n+1})$$

Ahora como $\lim_{n\to\infty} l(I_n) = 0$ se tiene que el intervalo I debe ser alguno de los intervalos I_n. Sea n el menor entero tal que I es I_n. Se tiene que $n > N$ y $l(I) \leq k_{n-1} \leq 2l(I_n)$.
Como $x \in I$, entonces I tiene un punto en común con I_n, de lo cual se sigue que la distancia de x hacia el punto medio de I_n es como máximo $l(I) + \frac{1}{2}l(I_n) \leq \frac{5}{2}l(I_n)$, así x pertenece al intervalo J_n teniendo el mismo punto medio que I_n y cinco veces su longitud. Por lo tanto hemos demostrado que

$$R \subset \bigcup_{N+1}^{\infty} J_n$$

de donde $m^*R \leq \sum_{N+1}^{\infty} l(J_n) = 5\sum_{N+1}^{\infty} l(J_n) < \varepsilon$. $\square$

Para hablar de derivada de una función f, primero se definen un conjunto de cuatro cantidades llamadas derivadas de f como sigue:

$$\begin{aligned} D^+f(x) &= \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ D^-f(x) &= \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \\ D_+f(x) &= \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ D_-f(x) &= \underline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \end{aligned}$$

Claramente se tiene $D^+f(x) \geq D_+f(x)$ y $D^-f(x) \geq D_-f(x)$.
Si $D^+f(x) = D_+f(x) = D^-f(x) = D_-f(x) \neq \pm\infty$ se dirá que f es diferenciable en x y se define $f(x)$ como el valor común de los derivados en x.

El siguiente resultado proporciona una cota para una función integrable.

Teorema 1.6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces f es diferenciable c.t.p. en $[a, b]$. La derivada f' es medible y se cumple

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a)$$

Demostración. Vamos a demostrar que los conjuntos donde cualquiera de los dos derivados son distintos tiene medida cero.
Considérese solo el caso en que $D^+f(x) > D_-f(x)$, las otras combinaciones de los derivados se trabajan de manera similar. Sea $E = \{x : D^+f(x) > D_-f(x)\}$. Nótese que el conjunto E es la unión de los conjuntos $E_{u,v} = \{x : D^+f(x) > u > v > D_-f(x)\}$ para todo racional u y v, de donde es suficiente probar que $m^*E_{u,v} = 0$.
Sea $s = m^*E_{u,v}$ y escogiendo $\varepsilon > 0$ se incluye $E_{u,v}$ en un conjunto abierto, que denotaremos por O, con $m^*O < s + \varepsilon$ para cada $x \in E_{u,v}$, existe un intervalo arbitrariamente pequeño $[x - h, x] \subset O$ tal que

$$f(x) - f(x - h) < vh$$

Por el Lema de Vitalli se puede escoger de ellos una colección finita de intervalos $\{I_1, I_2, \ldots, I_N\}$ cuyos interiores cubren un subconjunto A de E de medida exterior mayor que $s-\varepsilon$, luego sumando sobre estos subintervalos se tiene que

$$\sum_{n=1}^{N}[f(x_n)-f(x_n-h_n)] < v\sum_{n=1}^{N}h_n < vm^*O < v(s-\varepsilon)$$

Ahora cada punto $y \in A$ es el extremo izquierdo de un intervalo $\langle y, y+k\rangle$ arbitrariamente pequeño el cual esta contenido en algún I_n y tal que

$$f(y+k)-f(y) > uk$$

Usando nuevamente el Lema de Vitalli se puede elegir una colección finita $\{J_1, J_2, \ldots, J_M\}$ de tales intervalos tal que su unión contenga un subconjunto de A de medida exterior mayor que $s-2\varepsilon$, entonces sumando sobre estos intervalos se tiene

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i+k_i)-f(y_i) > u\sum k_i > u(s-2\varepsilon)$$

Cada intervalo J_i esta contenido en algún intervalo I_n y si se suma sobre estos i para los cuales $J_i \subset J_n$ se tiene

$$\sum f(y_i+k_i)-f(y_i) \leq f(x_n)-f(x_n-h_n)$$

Puesto que f es creciente se tiene

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_n)-f(x_n-h_n) \geq \sum_{i=1}^{M} f(y_i+k_i)-f(y_i)$$

luego

$$v(s-\varepsilon) > \sum_{i=1}^{N} f(x_n)-f(x_n-h_n) \geq \sum_{i=1}^{M} f(y_i+k_i)-f(y_i) > u(s-2\varepsilon)$$

de donde $v(s-\varepsilon) > u(s-2\varepsilon)$, $\forall\ \varepsilon > 0$ entonces $vs \geq us$ y como se tiene además que $u > v$ se deduce que s debe ser cero, esto muestra que

$$g(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

está definido en casi todo punto y que f es diferenciable donde g es finita.

Sea $g_n = n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$, donde $f(x)=f(b)$, $x \geq b$. Entonces $g_n(x) \to g(x)$ c.t.p.

x y por lo tanto g es medible, ahora como f es creciente, se tiene que $g_n \geq 0$ de donde por Lema de Fatuo se tiene

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)dx &\leq \underline{\text{lím}} n \int_a^b \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] dx \\
&= \underline{\text{lím}} \left[n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \right] \\
&= \underline{\text{lím}} \left[f(b) - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \right] \leq f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

Esto prueba que g es integrable y por lo tanto finita casi todo punto (c.t.p), así f es diferenciable c.t.p y $g = f'$ c.t.p $\square$

SECCIÓN 1.3

Funciones de variación Acotada

El objetivo de esta sección es conseguir condiciones más débiles para la existencia de una integral indefinida, para lo cual se hace necesaria la definición de funciones con variación acotada las cuales se estudian a continuación.

Definición 1.4. Sea f una función real valuada definida sobre el intervalo $[a, b]$ y sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ cualquier subdivisión de $[a, b]$. Se define

$$\begin{aligned}
p &= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ \\
n &= \sum_{i=1}^{k} [f(x_i) - f(x_{i-1})]^-
\end{aligned}$$

$$t = n + p = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

donde $r^+ = \begin{cases} r, & r \geq 0 \\ 0, & r \leq 0 \end{cases}$ y $r^- = |r| - r^+$, además $f(b) - f(a) = p - n$

$P = \sup[p]$, llamada **Variación positiva** de f sobre $[a, b]$

$N = \sup[n]$, llamada **Variación negativa** de f sobre $[a, b]$

$T = \sup[t]$, llamada **Variación total** de f sobre $[a, b]$

donde el supremo se toma todas las posibles subdivisiones de $[a, b]$.

Claramente se tiene $P \leq T \leq P + N$.
Algunas veces se escribirá P_a^b, N_a^b, T_a^b para denotar la dependencia sobre el intervalo $[a, b]$.
Si $T < \infty$ se dice que f es de **Variación Acotada** sobre $[a, b]$.

Lema 1.2. Si f es de variación acotada sobre $[a, b]$ entonces

$$T_a^b = P_a^b + N_a^b; \qquad f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$$

Demostración. Para cualquier subdivisión de $[a, b]$ se tiene

$$p = n + f(b) - f(a) \leq N + f(b) - f(a)$$

Ahora tomando el Supremo sobre todas las posibles subdivisiones se obtiene

$$P \leq N + f(b) - f(a)$$

De otro lado como $N \leq T < \infty$ entonces

$$P - N \leq f(b) - f(a)$$

Análogamente

$$N - P \leq f(b) - f(a)$$

y por lo tanto $P - N = f(b) - f(a)$
Así $T \geq p + n = p + p - (f(b) - f(a)) = 2p + N - P$
y entonces $T \geq 2P + N - P = P + N$, de otro lado se tiene que $T \leq P + N$. Por lo tanto $T = P + N$ $\square$

Teorema 1.7. Una función f es de variación acotada sobre $[a, b]$ si y solamente si es la diferencia de dos funciones monótonas real valuadas sobre $[a, b]$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Suponga que f es de variación acotada sobre $[a, b]$. Defínase

$$g(x) = P_a^x; \qquad h(x) = N_a^x$$

Primero demostraremos que g y h son funciones crecientes real valuadas.
En efecto, si $x < y$ entonces $g(x) = P_a^x < g(y) = P_a^y$; $h(x) = N_a^x < h(y) = N_a^y$.

Por lo tanto g y h son funciones crecientes. Además como: $0 \leq P_a^x \leq T_a^x \leq T_a^b < \infty$; $0 \leq N_a^x \leq T_a^x \leq T_a^b < \infty$. Entonces son funciones real valuadas. Ahora, verifiquemos que f es la diferencia de dos funciones monótonas crecientes.
En efecto, por Lema 1.2 $f(x) = g(x) - h(x) + f(a)$ y como $h - f(a)$ es una función monótona, entonces f es la diferencia de las funciones monótonas g y $h - f(a)$.

($\Leftarrow$) Sea Ahora $f(x) = g(x) - h(x)$ con g y h crecientes en $[a, b]$, entonces para cualquier subdivisión se tiene

$$\sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum [g(x_i) - g(x_{i-1})] + \sum [h(x_i) - h_{i-1}] = g(b) + h(b) - h(a)$$

de donde

$$T_a^b \leq g(b) + h(b) - g(a) - h(a) < \infty$$

Por lo tanto f es de variación acotada sobre $[a, b]$.

$\square$

Corolario 1.1. Si f es de variación acotada sobre $[a, b]$ entonces $f(x)$ existe c.t.p. x en $[a, b]$.

Demostración. Por el Teorema 1.7, f es una función monótona sobre $[a, b]$, luego usando el teorema 1.6 se tiene que f es diferenciable c.t.p. x en $[a, b]$. $\square$

Lema 1.3. Si f es una función integrable sobre $[a, b]$, entonces la función F definida por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es una función continua de variación acotada sobre $[a, b]$.

Demostración.

$$F(x) - F(x_0) = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|dt$$

Ahora como $|f(t)|$ es una función positiva integrable sobre $[a, b]$ entonces por la Proposición 1.2 se tiene que dado $\varepsilon > 0$; $\exists\ \delta > 0$ tal que para $A = [x_0; x] \subset E = [a, b]$ con $m([x_0, x]) = |x - x_0| < \delta$ entonces $|F(x) - F(x_0)| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|dt < \varepsilon$.
De lo cual se sigue que F es continua en $[a, b]$.

A continuación se prueba que F es una función de variación acotada sobre $[a,b]$.
Sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ una subdivisión arbitraria de $[a,b]$ entonces

$$\sum_{i=1}^{k} |F(x_i) - F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt < \infty$$

De donde

$$T_a^b \leq \int_a^b |f(t)|dt < \infty$$

□

Lema 1.4. Si f es una función integrable sobre $[a,b]$ y $\int_a^x f(t)dt = 0$, para todo $x \in [a,b]$, entonces $f(t) = 0$ c.t.p. en $[a,b]$.

Demostración. Supóngase que $f(x) > 0$ sobre un conjunto E de medida positiva, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $F \subset E$ con

$$m^*(E-F) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 0 < m^*E = m^*(E-F) + m^*E < \varepsilon + m^*E \quad \Rightarrow \quad m^*F > 0$$

Sea $O =]a,b[- F = \{r : r \in]a,b[, r \notin F\}$ entonces $\int_a^b f \neq 0$ o $0 = \int_a^b f = \int_F f + \int_O f$, luego $\int_O f = -\int_F f \neq 0$.
Por otra parte, O se puede escribir como la unión disjunta de una colección numerable $\{]a_n, b_n[\}$ de intervalos abiertos y de donde $\int_O f = \sum \int_{a_n}^{b_n} f$.
Así para algún n se tiene $\int_{a_n}^{b_n} f \neq 0$ y por lo tanto o

$$\int_a^{a_n} f \neq 0 \quad \text{o} \quad \int_a^{b_n} f \neq 0$$

En cualquier caso se ve que si f es positiva sobre un conjunto de medida positiva entonces para algún $x \in [a,b]$ se tiene que

$$\int_a^x f \neq 0,$$

Lo cual es una contradicción.
Si $f(x) < 0$ se procede de forma análoga. □

Lema 1.5. Si f es acotada y medible sobre $[a,b]$ y

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

entonces $F'(x) = f(x)$ c.t.p. en $[a,b]$.

Demostración. Por Lema 1.3, F es una función de variación acotada sobre $[a,b]$ y, por lo tanto $F'(x)$ existe para casi todo $x \in [a,b]$.
Sea $|f| \leq K$. Entonces escribiendo

$$f_n(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}, \quad \text{con } h = \frac{1}{n}$$

Se tiene $f_n(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ entonces $|f_n| \leq K$.
De la definición de $f_n(x)$ se tiene que $f_n \to F'$ c.t.p.
Luego usando el Teorema de la convergencia acotada se tiene

$$\begin{aligned}
\int_a^c F'(x)dx &= \text{lím} \int_a^c f_n(x)dx = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_a^c (F(x+h) - F(x))dx \\
&= \text{lím} \left[\frac{1}{h} \int_c^{c+h} F(x)dx - \frac{1}{h} \int_a^{a+h} F(x)dx \right] \\
&= F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)
\end{aligned}$$

Como F es continua por lo tanto $\int_a^c \{F(x) - f(x)\}dx = 0$ para todo $c \in [a,b]$ y por lo tanto $F'(x) = f(x)$ c.t.p. en $[a,b]$. □

Teorema 1.8. Sea f una función integrable sobre $[a,b]$, y supóngase que:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

entonces $F'(x) = f(x)$ c.t.p. en $[a,b]$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad asúma que $f \geq 0$.
Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n \\ n, & f(x) > n \end{cases}$$

Entonces $f - f_n \geq 0$ y si $G_n(x) = \int_a^x f - f_n$ entonces es una función creciente que tiene derivada no negativa c.t.p., ahora por el Lema 1.5 se tiene que

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f_n = f_n(x)$$

Luego, podemos reescribir $F(x) = F(a) + G_n(x) + \int_a^x f_n(t)dt$.
de donde se sigue $F' = \frac{d}{dx} G_n + \frac{d}{dx} \int_a^x f_n \geq f_n(x)$ c.t.p.

Como n es arbitrario, $F'(x) \geq f(x)$ c.t.p.

Consecuentemente

$$\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$$

Por el Teorema 1.6 se tiene $\int_a^b F'(x)dx \leq F(a) - F(b)$ De donde se tiene

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x)dx &= F(a) - F(b) = \int_a^b f(x)dx \\ \int_a^b (F'(x) - f(x))dx &= 0 \end{aligned}$$

como $(F'(x) - f(x)) \geq 0$ esto implica que

$$(F'(x) - f(x)) = 0 \text{ c.t.p.} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.}$$

□

El siguiente lema relaciona una función absolutamente continua con una función de variación acotada

Lema 1.6. Si f es una función absolutamente continua sobre $[a, b]$ entonces f es de variación acotada sobre $[a, b]$.

Demostración. En efecto por ser f absolutamente continua sobre $[a, b]$, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$. Entonces para cualquier subdivisión de $[a, b]$ se puede dividir, insertando, si es necesario nuevos puntos de división, en K conjuntos de intervalos, cada uno de longitud total menor que δ, donde K es el entero mas grande menor que $1 + (b - a)/\delta$, así para cualquier subdivisión se tiene que $t \leq K$ y por lo tanto $T \leq K$. □

Corolario 1.2. Si f es una función absolutamente continua sobre $[a, b]$, entonces f tiene derivada en c.t.p. en $[a, b]$.

Demostración. Por ser f una función absolutamente continua sobre $[a, b]$ entonces por el Lema 1.6 f es de variación acotada, luego por Teorema 1.6, f es diferenciable c.t.p en $[a, b]$. □

El siguiente resultado servirá para demostrar el teorema más importante de esta sección, que más adelante enunciaremos

Lema 1.7. Si f es una función absolutamente continua sobre $[a,b]$ y $f'(x) = 0$ c.t.p. en $[a,b]$ entonces f es constante sobre $[a,b]$.

Demostración. Se demostrara que $f(a) = f(c)$ para cualquier $c \in [a,b]$.
Sea $E \subset]a,c[$ el conjunto de medida $c-a$ en el cual $f'(x) = 0$ y sean ε y η números arbitrarios positivos. Puesto que $f'(x) = 0$ en E, entonces para cada $x \in E$ existe un intervalo arbitrariamente pequeño $[x, x+h] \subset [a,c]$ tal que $|f(x+h) - f(x)| < \eta h$: Por otra parte, como f es absolutamente continua en $[a,b]$, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ garantizándose así que existe una colección finita de intervalos no superpuestos $\{[x_k, y_k]\}$, los cuales cubren E excepto un conjunto de medida menor que δ, puesto que $x_k \leq x_{k+1}$ se tiene

$$y_0 = a \leq x_1 < y_1 \leq x_2 < \cdots \leq y_n \leq c = x_{n+1}$$

y $\sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - y_k| < \delta$ entonces

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \varepsilon \tag{1}$$

Por otra parte, por la forma en que los intervalos $\{[x_k, y_k]\}$ fueron construidos se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \eta \sum (y_k - x_k) < \eta(c-a) \tag{2}$$

Combinando (1) y (2) se obtiene

$$|f(c) - f(a)| = \left| \sum_{k=0}^{n} [f(x_{k+1}) - f(y_k)] + \sum_{k=1}^{n} [f(y_k) - f(x_k)] \right| \leq \varepsilon + \eta(b-a)$$

Como ε y η son números positivos arbitrarios, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(c) - f(a)| &= 0 \\ f(c) - f(a) &= 0 \\ f(c) &= f(a) \end{aligned}$$

$\square$

El siguiente es el resultado que caracteriza las funciones absolutamente continuas y por ende es el resultado más importante de esta sección.

Teorema 1.9. Una función F es una integral indefinida si y solamente si es una función absolutamente continua.

Demostración. Supóngase que F es una integral indefinida:
Es decir
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
Dado $\varepsilon > 0$ y $\{(x_i, x_i')\}$ una colección finita de subintervalos no superpuestos de $[a, b]$.
Nótese que si se escribe $A_i = [x_i, x_i'] \subset E = [a, b]$ y se usa la Proposición 1.2, para $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que:
$$\int_{x_i}^{x_i^i} |F(t)|dt < \frac{\varepsilon}{n}$$
con $m(A_i = [x_i, x_i]) = |x_i' - x_i| < \delta_1$, de donde se obtiene
$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_i'} |F(t)|dt < \frac{\varepsilon}{n}$$
Con $m(A_i = [x_i, x_i']) = |x_i' - x_i| < \delta_1$
De donde se obtiene
$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_i'} |F(t)|dt < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n}$$
Con:
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \sum_{i=1}^{n} \delta_1$$
es decir, dado un $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = n\delta_1 > 0$ tal que:
$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_i'} |F(t)|dt < \varepsilon$$
con
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$$
Por lo tanto F, es absolutamente continua sobre $[a, b]$.
Supóngase ahora que F es absolutamente continua, entonces por el Lema 1.3 F es de variación acotada, luego por Teorema 1.7, se tiene:
$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

Donde las funciones F_1 y F_2 son funciones monótonas crecientes, y como F de variación acotada aplicando el Corolario del Lema 1.6 se tiene que existe $F'(x)$ c.t.p. en $[a, b]$, donde:

$$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) \text{ c.t.p. en } [a, b]$$

Usando desigualdad triangular y además que tanto F_1 como F_2 son funciones crecientes y, por lo tanto, sus derivadas son funciones positivas, se tiene que

$$|F'(x)| \leq F_1'(x) + F_2'(x) \text{ c.t.p. en } [a, b]$$

integrando la desigualdad anterior se obtiene:

$$\int |F'(t)|dt \leq \int |F_1'(t)|dt + \int |F_2'(t)|dt$$

Luego aplicando el Teorema 1.6 se obtiene:

$$\int |F'(t)|dt \leq F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a)$$

de donde se concluye que: $F'(x)$ es integrable sobre $[a, b]$.
Por otro lado si se escribe:

$$G(x) = \int_a^x F'(t)dt \qquad (*_1)$$

Entonces por la primera parte de la prueba se tiene que G es una función absolutamente continua.
Si ahora se define: $f = F - G$ se tiene que f también es absolutamente continua.
Aplicando a la ecuación $(*_1)$ el Teorema 1.8 se obtiene:

$$G'(x) = F(x) \text{ c.t.p. en } [a, b]$$

de donde

$$f'(x) = F'(x) - G'(x) = 0 \text{ c.t.p. en } [a, b]$$

y por lo tanto según el Lema 1.7 se concluye que f es constante en $[a, b]$, es decir $f = F - G =$cte en $[a, b]$.
Luego sin perder generalidad se obtiene que:

$$F - G = \text{cte} = F(a)$$

Es decir

$$F(x) - G(x) = F(a)$$

de donde

$$F(x) = F(a) + G(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$$

Luego

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$$

por lo tanto F es una integral indefinida. $\square$

Capítulo 2

Soluciones generalizadas para el problema de Cauchy en un espacio unidimensional

SECCIÓN 2.1

Solución en el sentido Caratheodory

En el capítulo anterior se vio que la solución para el problema 1.1 no tiene solución clásica si la función f no es una función continua, la solución a este problema necesita de nuevas definiciones de soluciones llamadas soluciones generalizadas para esto necesitamos la siguiente definición.

Funciones Caratheodory

Definición 2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto, una función $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama función Caratheodory si cumple las tres condiciones siguientes:

1. Para casi todo valor de t, la función $f(x, t)$ está definida y es continua como función de x.
2. Es medible en t para cada valor de x.
3. Para cada compacto contenido en el dominio de definición de f, se cumple $|f(x, t)| \leq m(t)$, donde $m(t)$ es integrable.

Si en la ecuación (1.1), la función f satisface la definición anterior se dice que es una ecuación de Caratheodory.

Solución en el sentido Caratheodory

Definición 2.2. Dado el problema (1.1), con f una función de Caratheodory, se dice que u es solución en el sentido de Caratheodory del problema (1.1) en un intervalo (abierto o cerrado) si y solamente si u satisface (1.1) casi todo punto t y además u es absolutamente continua en todo subintervalo cerrado.

Ejemplo 2.1. Considérese el siguiente problema de Cauchy:

$$x' = sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}; \quad x(-1) = 1 \tag{*}$$

es claro que la función del lado derecho es una función discontinua en $t = 0$.
Veamos que la función

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

es una función de Caratheodory, pues satisface:

1. $f(x,t) = sgn(t)$, está definida excepto para el valor $t = 0$, además $f(x,t)$ es una función continua con respecto a la variable x.

2. $f(x,t) = sgn(t)$ es medible en t, ya que el único punto de discontinuidad es $t = 0$, cuya medida es cero.

3. $|f(x,t)| \leq 1 \ \forall \ t \in \mathbb{R}$; de donde para cada compacto $K \subset \mathbb{R}$ tiene que $m(t) = \chi_K$ (función característica de K) es integrable.

Note que la solución del problema de Cauchy anterior, viene dada por:

$$x(t) = |t|$$

la cual es una función continua, que no es derivable en $t = 0$.
Nos resta demostrar que la función $x(t)$ es absolutamente continua; para lo cual haremos uso del Teorema 1.9 del capítulo anterior, $x(t)$ satisface: $x(t)$ satisface:

$$x(t) = 1 + \int_{-1}^{t} f(x(s), s)ds$$

excepto para $t = 0$, de donde $x(t)$ es la solución de Caratheodory de (*).

Ejemplo 2.2. Considere el siguiente problema, sin condición inicial

$$x' = sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Si procedemos como en el ejemplo (2.1) no es difícil mostrar que la función $f(x,t)$ es de Caratheodory y que su solución viene dada por:

$$x(t) = |t| + k$$

La cual es una función continua, que no es derivable en $t = 0$.
Nótese que por la izquierda la solución se aproxima a la discontinuidad en $t = 0$; mientras que por la derecha la solución se aleja de la discontinuidad en $t = 0$.

SECCIÓN 2.2

Funciones Multivaluadas

En esta sección se presentan los conceptos teóricos, como por ejemplo la noción de funciones multivaluadas que permiten estudiar las inclusiones diferenciales.

Definición 2.3 (Funciones Multivaluadas)**.** Sean X e Y dos conjuntos arbitrarios, con $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, una función $F : X \to Y$ que asocia a cada $x \in X$ con un subconjunto de Y, denotado por $F(x)$, se le llama función multivaluada.

Los subconjuntos $F(x)$ son llamados imágenes de los valores de F.
El subconjunto $\mathrm{Dom}(F) = \{x \in X \,:\, F(x) \neq \emptyset\}$ es llamado dominio de F.
Si $\mathrm{Dom}(F) = X$ se dice que F es ESTRICTA.

Ejemplo 2.3. Sea $sgn : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$sgn(t) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

se tiene que la función multivaluada $Sgn(x)$ viene dada por:

$$Sgn(t) = \begin{cases} \{-1\}, & x < 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \\ \{1\}, & x > 0 \end{cases}$$

En lo que sigue se presentan las condiciones y definiciones que permitirán solucionar el problema (1.1), cuando f es una función discontinua, como en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2.4. Sea $u' = sgn(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

Nótese que $sgn(t)$ es discontinua en $t = 0$.

Ejemplo 2.5. Sea $u' = 1 - sgn(t) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$.

En este caso $1 - sgn(x)$ es discontinua en la variable x.

Es claro que las EDO de los ejemplos anteriores no tienen solución para la teoría clásica, es por eso que se necesitan extender la noción de solución del problema (1.1), y eso es lo que se abordará en la siguiente sección.

SECCIÓN 2.3

Inclusión diferencial

El desarrollo de la teoría del control, ha motivado el ímpetu para estudiar las inclusiones diferenciales.

Como se sabe, la teoría de control, viene dada por el estudio de los sistemas dinámicos:

$$x'(t) = f(x(t), t, u(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{*}$$

"controlado"por parámetros $u(t)$ (los "controles").

Si se define la función Multivaluada

$$F(x,t) = \{f(x(t), t, u(t))\}_{u \in U}$$

A la relación:

$$x' \in F(x,t), \quad x(0) = x_0 \tag{**}$$

se le llama inclusión diferencial; entonces las soluciones de (*) son soluciones de la inclusión diferencial (**) en los cuales los controles no aparecen explícitamente. Un ejemplo de inclusiones lo constituye el problema (1.1), cuando la discontinuidad de la función $f(x,t)$ se da en la variable x.

El mayor interés de las distintas definiciones de la función $F(x,t)$ en los puntos de discontinuidad, consiste en dar sentido físico a las soluciones de los problemas reales (como son los referentes a modelos de fricción seca).

Si $f(x,t)$ es una función continua en un dominio G y discontinua en un conjunto S de medida cero, se define $F(x,t) = f(x,t)$, para todo valor $(x,t) \in G$. De otro lado si $(x,t) \in S$ hay que definir $F(x,t)$ como un conjunto apropiado.

Una manera sencilla de definir $F(x,t)$ es considerar para cada $(x^*,t^*) \in S$ que $F(x^*,t^*)$ sea el menor convexo cerrado que contiene a todos los puntos adherentes de $f(x,t)$ con $(x,t) \to (x^*,t^*)$.

SECCIÓN 2.4

Soluciones generalizadas en el sentido de Filippov o Multivaluada

Definición 2.4. Dado el problema (1.1), con f una función discontinua, en la variable x; se dice que x es solución en el sentido de Filippov del problema (1.1) si y solamente si x es absolutamente continua, y si además: $x' \in F(x,t)$, $u(t_0) = u_0$; donde $F(x,t)$ es la función multivaluada definida como la envoltura convexa cerrada de todos los limites de $f(x,t)$. Es decir:

$$F(x,t) = \overline{CO}\left\{y \in \mathbb{R} :\ y = \lim_{\bar{x}\to x} f(x,t)\right\}, x \in \mathbb{R} - \Sigma$$

Aquí Σ denota el conjunto de discontinuidades.

Ejemplo 2.6. Considere el siguiente problema

$$x' = 1 - 2\,\mathrm{Sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x > 0 \\ 3, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

cuya solución viene dada por:

$$x(t) = \begin{cases} -t + k_1, & \text{si } x > 0 \\ 3t + k_2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Todas las soluciones, cuando el tiempo crece, alcanzan la recta $x = 0$, sin embargo allí no se verifica la ecuación diferencial, ni siquiera para casi todo tiempo t, de allí la necesidad

de la definición de soluciones en el sentido Filippov.
Esta solución debe satisfacer

$$x' \in F(x,t) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{si } x > 0 \\ [-1,3], & \text{si } x = 0 \\ \{3\}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En el intervalo: $[-1,3]$, la función $x(t)$ no es integrable, y como dicho intervalo no tiene medida nula, se sigue que el problema no tiene solución en el sentido de Caratheodory. De allí la necesidad de la definición de solución en el sentido de Filippov. Es decir surge la necesidad de establecer criterios que nos permitan determinar de manera precisa la existencia de soluciones: tanto en el sentido de Caratheodory como en el sentido de Filippov.
Una vez establecidos estos criterios abordaremos el problema de la unicidad de las soluciones (en caso ellas existan).

Ejemplo 2.7. Dada la siguiente función Multivaluada:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Definida como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} [-|x|, |x|], & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\}, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Si se tiene $x' = f(x,t) = F(x)$, $x(t_0) = x_0$ ¿existe solución al problema anterior? ¿Y si existe ella es única?

Ambas situaciones serán tratadas con mayor detenimiento en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Existencia de soluciones generalizadas del Problema de Cauchy en el Espacio Unidimensional

En este capítulo se presentan los resultados, que caracterizan tanto la existencia; así como a la unicidad de soluciones en el sentido de Caratheodory y en el sentido de Filippov

SECCIÓN 3.1

Existencia de Soluciones en el sentido de Caratheodory

Las condiciones de Caratheodory son suficientes para asegurar que, dada una función continua x, la función $f(t; x(t))$ es localmente integrable. Esto es de hecho necesario para que la ecuación $x' = f(t; x)$ pueda tener solución en el sentido de la definición de función de Caratheodory.
Los siguientes lemas sirven, para demostrar el teorema que caracteriza a las Soluciones en el sentido de Caratheodory.

Lema 3.1. Sea I un intervalo real acotado y $H : I \times I \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$t \mapsto H(t, s) \text{ es medible para todo } s \in I \text{ fijo}$$
$$s \mapsto H(t, s) \text{ es continua para casi todo } t \in I \text{ fijo}$$

entonces la función

$$h : I \to \mathbb{R}$$

$$h(t) = H(t,t)$$

es medible.

Demostración. Dado n natural, definimos la función $h_n : I \to \mathbb{R}$ como

$$h_n(t) \begin{cases} H\left(t, \frac{p-1}{n}\right), & \text{si } \frac{p-1}{n} \leq t < \frac{p}{n} \quad (p = 1, \ldots, n) \\ H(1,1), & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

Que es medible porque H es medible en t para todo s fijo. La sucesión de funciones h_n Converge puntualmente en casi todo punto a la función $t \mapsto H(t,s)$ (converge en todo punto t para el que $H(t,.)$ es continua), luego dicha función es medible. □

Lema 3.2. Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un subconjunto cualquiera $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory en D.
Si $x : I \to \mathbb{R}^n$ es continua y $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$, entonces cada componente de la función

$$\begin{cases} h : I \to \mathbb{R}^n \\ t \mapsto f(t, x(t)) \end{cases} \tag{3.1}$$

es localmente integrable.

Demostración. Basta demostrarlo en el caso en que $f : D \to \mathbb{R}$, ya que esto se aplica a cada componente de f. Supongamos por tanto $N = 1$. La función

$$\begin{array}{rcccl} H & : & I \times I & \to & \mathbb{R} \\ & & & & H(t,s) = f(t, x(s)) \end{array}$$

Está en las condiciones del Lema , luego h (definida en (3.1), con $N = 1$) es medible. Además, dado un compacto $j \subseteq I$, consideramos el compacto $K = J \times x(J)$ y la función Integrable m_K proporcionada por las condiciones de Caratheodory.
Entonces,

$$|h(t)| = |f(t, x(t))| \leq m_K(t) \qquad \forall\, t \in J$$

luego h es integrable en J. □

El siguiente teorema, garantiza las condiciones bajo las cuales, existe solución para la ecuación (1.1), con el lado derecho discontinuo

Teorema 3.1 (Equivalencia de la ecuación integral)**.** Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, una función que cumple las condiciones de Caratheodory.
Una función $x : I \to \mathbb{R}^n$ definida en un intervalo no trivial I es una solución de (1.1) si y solo si x es continua $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$ y x cumple la siguiente ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \qquad \forall\, t \in I$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Si x es solución, por definición es continua y $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$.
La ecuación integral se obtiene integrando en los dos miembros y usando el teorema fundamental del cálculo.

($\Leftarrow$) Sea $x : I \to \mathbb{R}^N$ una función continua tal que $(t, x(t)) \in D$ para todo $t \in I$, cada componente de la función $s \mapsto f(t, x(s))$ es localmente integrable gracias al Lema 3.2, luego la ecuación integral tiene sentido. Si x satisface esta ecuación integral, usando el teorema fundamental del cálculo, se deduce que x es absolutamente continua y además también obtenemos $x'(t) = f(t, x(t))$ c.p.d en I, y como también se tiene que x cumple la condición inicial, se concluye que x es solución de (1.1).

$\square$

SECCIÓN 3.2

Límites de soluciones

Algunas de las propiedades más usadas en relación con las ecuaciones diferenciales, ya sean ordinarias o parciales, son las propiedades de paso al límite. Este tipo de resultados hablan sobre la aproximación de las soluciones de una cierta ecuación por las de otra ecuación que sea aproximada a la original en un cierto sentido, especificando precisamente en qué sentido. Contestan a la pregunta de "si varia un poco la ecuación, ¿cuánto varia la solución?". Esta pregunta aparece detrás de tantas otras por razones fundamentales, y el intento de responderla es el motivo de una variedad enorme de teorías que están en el centro del estudio de las ecuaciones diferenciales. ¿Por qué surge esta pregunta? ¿Por qué hay que responderla?

Una razón es que las ecuaciones diferenciales surgieron como modelos de cosas que ocurren en el mundo real. Extraer consecuencias del comportamiento de cierto objeto, como por ejemplo el vuelo de un avión, requiere conocer al menos datos iniciales sobre él, en este caso posiblemente su posición y su velocidad. Requiere también conocer la influencia de cosas externas: la atracción de la Tierra, el rozamiento con el aire, el empuje de los motores, etc

Es un hecho que no podemos medir todas estas cosas con absoluta precisión, ni siquiera en teoría. ¿Es entonces válida la ecuación que estamos usando? ¿Se parecerá su solución a la trayectoria real del avión? Peor aún: aunque pudiésemos asegurar que la ecuación es perfectamente aplicable, en la inmensa mayoría de los casos simplemente no sabemos cómo es su solución.

La única forma de calcularla en cuanto la complicación del modelo es mínimamente realista es intentar aproximarla con un ordenador, el cual tampoco da una solución exacta, pero que proporciona una solución obtenida por métodos más o menos ingeniosos, la cual se parece en algo a la solución abstracta de la ecuación inicial.

Proposición 3.1. Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Sea $f : D \to \mathbb{R}^m$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory en D, y para $n \in \mathbb{N}$, sea x_n una solución de $x' = f(t,x)$. Supongamos que $\{x_n\}$ converge uniformemente en I a una cierta función $x : I \to \mathbb{R}^n$. Entonces x es también solución de $x' = f(t,x)$.

Demostración. Como $\{x_n\}$ es una sucesión uniformemente convergente, en compactos de funciones continuas, x es continua.

Sea $J \subseteq I$ un intervalo compacto cualquiera, y $t_0 \in J$. Demostrar que x es solución en J equivale a demostrar que, para $t \in J$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Por hipótesis, cada x_n satisface $x' = f(t,x)$, luego para $t \in J$, se tiene

$$x_n(t) = x_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds,$$

de forma que el problema consiste en pasar al límite en esta ecuación.

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$h_n : J \to \mathbb{R}^n$$

$$h_n(s) = f(s, x_n(s))$$

Como $x_n(s)$ converge (en particular) puntualmente y f es continúa en la variable x, la sucesión de funciones $\{x_n\}$ converge puntualmente a la función $f(.;x(.))$ gracias a la continuidad de x y de nuevo a la convergencia uniforme de la sucesión, existe un compacto $C \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que $x_n(J) \subseteq C \ \forall \ n \in \mathbb{N}$, y si usamos la cota m en el compacto $J \times C$ dada por las condiciones de Caratheodory sobre f,

$$\|h_n(s)\|_\infty \leq m(s) \qquad \forall \, s \in J$$

El teorema de la convergencia dominada nos permite pasar al límite y asegurar entonces que x es solución en J. Por tanto, x es solución en I, ya que J era un subintervalo compacto arbitrario de I. □

De hecho, no es difícil encontrar condiciones que garantizan que una sucesión de soluciones como las anteriores tiene una parcial que converge uniformemente

Proposición 3.2. Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera, $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo compacto.
Sea $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory globalmente en D, y para $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n : J \to \mathbb{R}^n$. Una solución de $x' = f(t, x)$ con condición inicial

$$x(t_0) = x_0^n$$

Supongamos que $\{x_0^n\}$ es una sucesión acotada, entonces $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en J a una solución x de $x' = f(t, x)$.
Para demostrar esto conviene separar dos resultados que son de por si interesantes, aunque elementales.
Es conocido que las funciones absolutamente continuas son, en particular, uniformemente continuas. Decimos que una sucesión de funciones $y_n : I \to \mathbb{R}$, con I un intervalo, es absolutamente uniformemente continua cuando cada $y_n$es absolutamente continua y además sus derivadas están acotadas por una función integrable independiente de n; es decir, cuando hay una función m integrable en $\mathbb{R}$ tal que

$$|y_n'(t)| \leq m(t) \qquad \text{p.c.t. } t \in I, \quad \forall \, n \in \mathbb{N}$$

Lema 3.3. Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión uniformemente absolutamente continua de funciones reales definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Entonces, $\{y_n\}$ es equicontinua.

Demostración. Sea m una cota de y_n independiente de n. Para $t > t' \in I$, por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$|y_n(t') - y_n(t)| = \left|\int_t^{t'} y_n(t')ds\right| \leq \int_t^{t'} |y_n(s')|dx \leq \int_t^{t'} m(s)ds = |M(t') - M(t)|$$

donde hemos fijado $t_0 \in I$ y definimos

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} m(s)ds$$

una función continua en I.
Esto prueba que la continuidad de y_n es independiente de n, y por tanto la sucesión es equicontinua. □

Lema 3.4. Sea $\{y_n\}$ una sucesión absolutamente uniformemente continua de funciones reales definidas en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.
Si para algún $t_0 \in I$ ocurre que $\{y_n(t_0)\}$ es una sucesión acotada, entonces y_n está acotada uniformemente en compactos de I.

Demostración. Sea M una cota de $y_n(t_0)$ independiente de n, y $m(s)$ una cota Integrable de la derivada de y_n también independiente de n. Si $J \subseteq I$ compacto, no tenemos más que escribir, para $t \in J$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n(t)| = \left|y_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} y_n'(s)ds\right| \leq |y_n(t_0)| + \left|\int_{t_0}^{t} y_n'(s)ds\right| \leq |y_n(t_0)| + \int_{t_0}^{t} |y_n'(s)|ds \leq M + \int_J m(s)ds$$

la cual es una cota independiente de n. □

Demostración de la Proposición 3.2. Las funciones x_n son absolutamente continuas; y como son solución de la ecuación $x' = f(t,x)$ ocurre que para cada componente $(x_n)_i$ de x_n ($i = 1, \ldots, N$), para casi todo $t \in J$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$|(x_n)_i(t)| \leq \|x_n'(t)\| = |f(t, x_n(t))| \leq m(t)$$

Con m una cota de Caratheodory de f. Además, $\{x_n(t_0)\}$ esta acotada por hipótesis, luego podemos aplicar los lemas 3.3 y 3.4, para ver que $\{x_n\}$ es una sucesión de funciones uniformemente acotada y equicontinua en J (ya que todas sus componentes lo son). Por el teorema de Arzela-Ascoli, $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en J, y su límite es solución de $x' = f(t,x)$ gracias a la Proposición 3.1. □

Este resultado puede extenderse de varias formas: una de ellas es considerar que las soluciones x_n, en lugar de ser soluciones de la misma ecuación, lo son de ecuaciones aproximadas en cierta forma. Entonces, un tipo adecuado de convergencia es necesaria. Un ejemplo de este resultado es la siguiente

Proposición 3.3. Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera, un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory en D.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $r_n : D \to \mathbb{R}^n$. Supongamos que las funciones r_n cumplen las condiciones de Caratheodory de forma que en cada compacto, las integrales de sus cotas tienden a cero; dichas más exactamente, suponemos que para cada compacto $I \subseteq \mathbb{R}$ existen funciones reales integrables $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\|r_n(t,x)\| \leq m_n(t)\ \forall\ (t,x) \in K$ y

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} m_n(s)ds = 0 \tag{3.2}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea x_n una solución, en I de la ecuación

$$x' = f(t,x) + r_n(t,x)$$

Supongamos que $\{x_n\}$ converge uniformemente en compactos de I a una cierta función $x : I \to \mathbb{R}^n$ entonces x es también solución de $x' = f(t;x)$ en I.

Demostración. Se trata de repetir la prueba de la proposición 3.1, pasando ahora al límite en

$$x_n(t) = x_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds + \int_{t_0}^{t} r_n(s,x_n(s))ds \tag{3.3}$$

El único término nuevo es la segunda integral, que converge a cero gracias a la hipótesis (3.2), usando las cotas correspondientes en el mismo compacto $J \times C$ de la demostración de la Proposición 3.1. □

Proposición 3.4. Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un conjunto cualquiera, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo compacto, $t_0 \in J$ Y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory globalmente en D.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $r_n : D \to \mathbb{R}^N$, y supongamos que las funciones r_n cumplen las condiciones de Caratheodory globalmente en D con cotas m_n, de forma que

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} m_n(s)ds = 0$$

Para $n \in \mathbb{N}$, sea $x_n : J \to \mathbb{R}^N$ una solución de $x' = f(t;x) + r_n(t,x)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0^n$. Supongamos que $\{x_0^n\}$ es una sucesión acotada. Entonces x_n tiene una subsucesión que converge uniformemente en J a una solución x de $x' = f(t;x)$.

Demostración. La demostración sigue los mismos pasos que la de la Proposición 3.2, pero se necesita un detalle técnico: probemos que existe una subsucesión de $\{r_n\}$ (a la que llamamos igual) y una función real R integrable tal que

$$\|r_n(t,x)\| \leq R(t) \qquad \forall\, (t,x) \in D$$

De hecho, si tomamos una subsucesión tal que

$$\int_{\mathbb{R}} m_n(s)ds \leq \frac{1}{2^n}$$

y definimos $R := \sum_{i=1}^{\infty} m_n$ (posiblemente infinita en algunos puntos), entonces

$$\int_{\mathbb{R}} R(s)ds \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Como su integral es finita, R es finita en casi todo punto y además cumple lo que queríamos.
Usando esta subsucesión podemos entonces llevar a cabo el mismo razonamiento que en 3.2. Teniendo en cuenta que si m es una cota de Caratheodory de f en J,

$$\|x_n'(t)\| \leq m(t) + R(t) \qquad \text{c.t.p } t \in J, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Los lemas 3.3 y 3.4 prueban que la sucesión $\{x_n\}$ esta uniformemente acotada y es equicontinua. Por el teorema de Arzela-Ascoli, $\{x_n\}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente en J, y su límite es solución de $x' = f(t,x)$ gracias a la Proposición 3.3. □

Observación 2. Estos teoremas de convergencia no son suficientes para algunas aplicaciones muy naturales. Por ejemplo, frecuentemente resulta útil aproximar las soluciones de una ecuación por soluciones de ecuaciones más regulares, con mejores propiedades.
Una forma de hacer esto para aproximar soluciones de $x' = f(t,x)$ es considerar soluciones de la ecuación regularizada por convolución $x' = f * \phi_n(t,x)$, donde $\{\phi_n\}_n$ es una sucesión regularizante en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (una sucesión de funciones diferenciables con integral

uno y con soporte contenido en entornos del origen cada vez más pequeños). Pues bien: los teoremas anteriores, hasta donde sabemos, no bastan para probar que una parcial de las soluciones regulares converja a la (o a una) solución de la ecuación original. En realidad, tampoco sabemos si esto es verdad en condiciones generales (por ejemplo, cuando f cumple las condiciones de Caratheodory), y sospechamos que tal vez sea necesario añadir alguna otra hipótesis sobre f.

SECCIÓN 3.3

Existencia global y local de soluciones de Caratheodory

Teorema 3.2 (Existencia global)**.** Si I es un intervalo real no trivial y $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, si f satisface las condiciones de Caratheodory globalmente en $I \times \mathbb{R}^n$, entonces para cualquier condición inicial $x(t_0) = x_0$ con $t_0 \in I$, existe una solución de (1.1) definida en I.

Demostración. Sea $x_1 : I \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Consideramos la sucesión de funciones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds, \qquad t \in I, \ n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

La expresión de la derecha tiene sentido. Para esta sucesión de funciones no podemos aplicar directamente la Proposición 3.4, pero la idea es la misma. Para demostrar que $\{x_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua en compactos no tenemos más que tomar un compacto $J \subseteq I$ cualquiera y, esencialmente, repetir los cálculos que ya hicimos: Para $n \in \mathbb{N}$, $t \in J$,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}(t)\| &\leq \|x_0\| + \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds \right\| \\ &\leq \|x_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_n(s))\| ds \right| \\ &\leq \|x_0\| + \left| \int_{t_0}^{t} m(s) \right| < \infty \end{aligned}$$

Por otra parte, para $t, t' \in J$, con m una cota de Caratheodory de f en algún entorno compacto de $\{(t, x(t)) : t \in J\}$,

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}(t) - x_{n+1}(t')\| &\leq \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds - \int_{t_0}^{t'} f(s, x_n(s))ds \right\| \\
&= \left\| \int_{t'}^{t} f(s, x_n(s))ds \right\| \leq \left| \int_{t'}^{t} \|f(s, x_n(s))\| ds \right| \\
&\leq \int_{t'}^{t} m(s)ds = \left| \int_{t_0}^{t} m(s)ds - \int_{t_0}^{t'} m(s)ds \right| = |M(t) - M(t')|
\end{aligned}
$$

donde $M(t) := \int_{t_0}^{t} m(s)ds$ para $t \in J$.
Por el teorema de Arzela-Ascoli, $\{x_n\}$ tiene una parcial uniformemente convergente En compactos de I a una cierta función x. Pasando al límite en (3.4) de la misma forma que en la demostración de la Proposición 3.3, x es una solución en I de $x' = f(t, x)$. $\square$

Este teorema global se enuncia más frecuentemente en su versión local, que demostramos a continuación. Aunque la demostración del resultado local podría hacerse de forma muy parecida a la del anterior resultado.

Teorema 3.3 (Existencia local)**.** Sea $(t_0, x_0) \in D$ un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, y supongamos que (t_0, x_0) es un punto de su interior. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisface las condiciones de Caratheodory en D, entonces existe una solución de (1.1) definida en un entorno de t_0.

Demostración. Sea $(t_0; x_0) \in D$, y tomemos K un entorno compacto de $(t_0; x_0)$ y $U \subseteq D$ un abierto relativamente compacto que contenga a K y tal que $\bar{U} \subseteq D$.
Se sabe entonces que existe una función positiva $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que ϕ vale 1 en K y 0 fuera de U, y $|\phi|$ siempre ≤ 1. Definimos $\tilde{f} : \mathbb{R}$ como $\tilde{f} := f\phi$ fuera de U. Esta $\tilde{f}$ cumple las condiciones de Caratheodory (tiene la misma regularidad que f y es siempre $\leq f$), y además las cumple globalmente:

$$\|\tilde{f}(x, t)\| \leq m_{\bar{U}}(t) \qquad \forall\, (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

Donde $m_{\bar{U}}$ es la cota que da la condición (3.1) para el compacto $\bar{U}$. Podemos entonces aplicar el Teorema 3.2 al problema

$$
\begin{cases}
x' = f(t, x) \\
x(t_0) = x_0
\end{cases}
$$

y deducir que tiene una solución x definida en $\mathbb{R}$, como es continua podemos tomar $J \subseteq \mathbb{R}$ un entorno compacto de t_0, no trivial, tal que $(t; x(t)) \in K \ \forall \ t \in J$. Entonces, como $f = \tilde{f}$ en K, x cumple el problema de valores iníciales (1.1) en J. $\square$

SECCIÓN 3.4

Prolongación de soluciones

Lema 3.5. Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory globalmente en D. Supongamos que x es una solución de $x_0 = f(t; x)$ definida en un intervalo $[a; b[$.
Si x tiene un cierto límite $x(b)$ en b y ocurre que $(b; x(b))$ está en el interior de D, entonces x puede prolongarse a una solución en un intervalo $[a; b + \varepsilon[$, para cierto $\varepsilon > 0$.

Demostración. El teorema de existencia local nos da una solución y de $x' = f(t; x)$ con valor inicial $y(b) = x(b)$, definida en un entorno de b. Si extendemos entonces $x(t) := y(t)$ para $t \geq b$, x es también una solución de $x' = f(t; x)$ ya que es continua en b; y cumple la ecuación. $\square$

Lema 3.6. Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory en D. Cualquier intervalo maximal de definición de cualquier solución de $x' = f(t; x)$ es abierto.

Demostración. Supóngase lo contrario, es decir que x tiene límite en el extremo (las soluciones son continuas) y el Lema 3.5 prueba que es posible extenderla. El siguiente resultado dice que si f cumple las condiciones de Caratheodory globalmente, las soluciones siempre tienen límite en sus extremos. $\square$

Lema 3.7. Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory globalmente en D. Supongamos que x es una solución definida en un cierto intervalo $]a; b[$ de la ecuación $x' = f(t; x)$ Entonces, $x(t)$ tiene límite (posiblemente infinito) cuando t tiende a cualquiera de los extremos a; b.

Demostración. Lo probaremos para uno de los extremos, por ejemplo, el extremo b. Si $\lim t \to bx(t)$ existe y es infinito, hemos terminado. De lo contrario, podemos tomar una sucesión t_n en $]a; b[$, que tienda a b, tal que $\{x(t_n)\}_g$ esta uniformemente acotada;

tomando una subsucesión suya podemos suponer que $x(t_n)$ tiene un cierto límite finito $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

Para $t \in]a;b[$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir

$$\|x(t) - \alpha\| \leq \|x(t) - x(t_n)\| + \|x(t) - \alpha\|$$

Por otra parte, si m es una cota de Caratheodory de f

$$\|x(t) - x(t_n)\| \leq \left| \int_t^{t_n} \|f(s, x(s))\| dx \right| \leq \left| \int_t^{t_n} m(s) ds \right| \leq \int_t^b m(s) ds$$

Por tanto, para $n \in \mathbb{N}$ y $t \in]a, b[$,

$$\|x(t) - \alpha\| \leq \int_t^b m(s) ds$$

esto prueba que x tiene límite α en b. $\square$

Lema 3.8. Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory en D. Supongamos que x es una solución de $x' = f(t; x)$ definida en un intervalo $]a; b[$ con $a < b$.

Si hay una sucesión $\{t_n\}$ de puntos de $]a; b[$ que tiende a b y tal que $(t_n; x(t_n))$ tiende a un punto del interior de D, entonces x tiene límite en b.

Se tiene también un resultado análogo en el extremo a.

Demostración. No podemos aplicar directamente el lema anterior, porque f no cumple las condiciones de Caratheodory globalmente; sin embargo, veamos que para t cerca de b, $(t; x(t))$ se queda dentro de un entorno compacto de $(b; z)$, donde las condiciones de Caratheodory si se cumplen globalmente.

Tomemos $h > 0$, $r > 0$ tales que $K = [b - h; b] \times B(z; r) \subseteq D$. Sea n suficientemente grande para que $t_n \in [b - h, b[$, $\|x(t_n) - z\| < \frac{r}{2}$ y ocurra que

$$\int_{t_n}^b m(s) ds < \frac{r}{2}$$

con m una cota de Caratheodory de f en K.

Veamos que $(t, x(t)) \in K$ para $t \in [t_n, b[$, de lo contrario, tomemos $t' \in [t_n, b[$ tal que $x(t') \in \vartheta B(z, r)$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x(t') - z\| &\leq \|x(t') - x(t_n)\| + \|x(t_n) - z\| < \frac{r}{2} + \int_{t_n}^{t'} \|f(x, x(s))\| ds \\ &\leq \frac{r}{2} + \int_{t_n}^{t'} m(s) ds \leq \frac{r}{2} + \int_{t_n}^b m(s) ds < r \end{aligned}$$

Luego $x(t')$ está en el interior de $B(z,r)$, una contradicción.

Por tanto $(t,x(t)) \in K$ para $t \in [t_n, b]$ y podemos aplicar el lema anterior para decir que $\lim\limits_{t\to b} x(t) = z$. □

Corolario 3.1. Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory en D. Supongamos que x es una solución de $x' = f(t;x)$ definida en un intervalo maximal I, y que el extremo derecho [izquierdo] de I es un numero finito t^*.

Sea $\{t_n\}$ una sucesión en I tal que $t_n \to t^*$ entonces o bien $\|x_n\| \to \infty$ o bien $\{t_n\}$ tiene una subsucesión $\{t_{\sigma n}\}$ tal que $(t_{\sigma n}; x(t_{\sigma n}))$ tiende a un punto de la frontera de D.

Demostración. Supongamos por el contrario, que hay una cierta sucesión $t_n \to t^*$ tal que $(t_n; x(t_n))$ converge a un punto (t^*, z) del interior de D. El Lema 3.8 prueba que x tiene límite en t^*, y teorema de existencia local 3.3 nos permite entonces prolongar la solución más allá t^*, de lo cual contradice que el intervalo de definición de la solución fuera maximal. □

Una forma de ver el resultado anterior es pensar que en las mismas hipótesis, $(t;x(t))$ "tiende a la frontera de Dçuando $t \to t^*$, con el siguiente significado

Definición 3.1. Sea I un intervalo real, t^* un punto de la cerradura de I, $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ un abierto y α una función $\alpha : I \to D$. Decimos que $\alpha(t)$ tiende a la frontera de D cuando $t \to t^*$, si para cualquier compacto $K \subseteq D$ existe un cierto $\varepsilon > 0$ tal que si $t \in I$ con $|t - t^*| \leq \varepsilon$ entonces $\alpha(t) \notin K$.

Si I no es acotado a la derecha, decimos que $\alpha(t)$ tiende a la frontera de D cuando $t \to \infty$ si para cualquier compacto $K \subseteq D$ existe un cierto $M > 0$ tal que si $t > M$, entonces $\alpha(t) \notin K$.

Se tiene también la definición análoga para $-\infty$. Es decir una función tiende a la frontera de D si a partir de un cierto punto se queda fuera de cualquier compacto de D que elijamos.

Observación 3. Obsérvese que si D es acotado, entonces α tiende a la frontera de D en el sentido usual de convergencia hacia un conjunto: la distancia entre α y la frontera de D tiende a cero.

El corolario anterior demuestra este comportamiento

Corolario 3.2. Sea D un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función que cumple las condiciones de Caratheodory en D. Supongamos que x es una solución de $x' = f(t; x)$ definida en un intervalo maximal $I =]a; b[$, donde a; b pueden ser posiblemente infinitos. Entonces, $(t; x(t))$ tiende a la frontera de D cuando $t \to b$ (y también cuando $t \to a$).

Demostración. Lo demostraremos para b. Supongamos que no ocurre esto. Entonces hay un cierto compacto $K \subseteq D$ y una sucesión de puntos $t_n \in I$ tal que $t_n b$ y $(t_n; x(t_n)) \in K$. Como K es acotado, esto implica que b debe ser finito. Entonces el Corolario 3.1 da dos posibilidades: o bien $\|x_n\| \to \infty$ (lo cual no es posible de nuevo porque K es acotado), o bien una subsucesión de $(t_n; x(t_n))$ tiende a un punto de la frontera de D, pero esto tampoco es posible porque esta sucesión está en K y la cerradura de K (el propio K) no tiene intersección con la frontera de D. $\square$

A veces es útil tener una cota inferior de la longitud del intervalo hasta donde puede definirse la solución cuya existencia demostramos antes, es decir saber de qué depende. El siguiente resultado consigue esto:

Teorema 3.4 (Existencia local, segunda versión)**.** Sean $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, y C es rectángulo $[t_0, t_0+\alpha] \times B(x_0; r)$. Sea $f : C \to \mathbb{R}^N$ una función que satisface las condiciones de Caratheodory en C con cota m, y sea $\beta > 0$ tal que

$$\int_{t_0}^{t_0+\beta} m(s)ds$$

Entonces cualquier solución del p.v.i.

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

puede extenderse al menos a $[t_0; t_0 + a]$ con $a = \text{mín}\{\alpha, \beta\}$.

Demostración. Supongamos que no se puede extender, luego la solución estará definida en un intervalo $[t_0, t^*[$ maximal a la derecha, con $t^* < t_0 + \alpha$, $t^* < t_0 + \beta$, como C

es acotado, el Corolario 3.1 (ver también la observación anterior) dice que $x(t)$ tiende a la frontera de $\bar{B}(x_0, r)$ cuando $t \to t^*$. Pero esto no es posible, ya que para $t \in [t_0, t^*[$,

$$\|x(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(x, x(s))\| ds \leq \int_{t_0}^{t} m(s) ds \leq \int_{t_0}^{t_0+\beta} m(s) ds < r$$

□

Lema 3.9. Sea D un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y $f : D \to \mathbb{R}^N$ una función cualquiera, y sea x una solución de $x' = f(t, x)$ definida en un intervalo $[a; b[$. Entonces se da el recíproco del Corolario 3.1. Es decir, si para cierta sucesión $\{t_n\}$ Con $t_n \to b$ ocurre que $\lim x(t_n)$ es infinito o $(t_n; x(t_n))$ tiende a un punto de la frontera de D, entonces $[a; b[$ es maximal a la derecha.

Demostración. La conclusión es evidente si el límite es infinito. En el otro caso, por continuidad cualquier posible extensión a la derecha de x cumple que $(b; x(b))$ pertenece a la frontera de D, fuera de D, en contradicción con la definición de solución. □

SECCIÓN 3.5

Unicidad de soluciones en el sentido Caratheodory

La siguiente versión del Lema de Gronwall esta tomada de [5]

Teorema 3.5 (Lema de Gronwall). Sean $\alpha \geq 0$, I un intervalo real y $t_0 \in I$. Sean $x, \mu : I \to \mathbb{R}$ funciones no negativas, con x continua e μ integrable. Si se cumple que

$$x(t) \leq \alpha + \left| \int_{t_0}^{t} \mu(s) x(x) ds \right| \qquad \forall\, t \in I$$

entonces

$$x(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mu(s) ds \right) \qquad \forall\, t \in I$$

Definición 3.2 (Lipschitz con constante integrable). Una función $f : D \to \mathbb{R}^N$ definida en un subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ (de la que denotamos las variables como $f = f(t, x)$) se dice que es localmente Lipschitz con respecto a x con constante integrable cuando para cada compacto $K \subseteq D$ existe una función $k_K \in L^1(\mathbb{R})$ tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k_K(t) |x - y| \qquad \text{para } (t, x),\ (t, y) \in K$$

Decimos que f es globalmente Lipschitz con respecto a x con constante integrable cuando se cumple la condición anterior para cierta $k \in L^1(\mathbb{R})$ independiente del compacto; esto es, existe $k \in L^1(\mathbb{R})$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t)|x-y| \text{ para } (t,x),\ (t,y) \in D$$

Teorema 3.6 (Unicidad)**.** Sea D un abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Si $f : D \to \mathbb{R}^N$ satisface las condiciones de Caratheodory en D y es localmente Lipschitz con constante integrable, entonces para cualquier $(t_0, x_0) \in D$ la solución (1.1) es única.

Demostración. Supongamos que x, y son dos soluciones de (1.1) definidas en I_1 e I_2, respectivamente. Recordemos que, por definición de solución de (1.1), el punto $t_0 \in I_2 \cap I_2$, por lo tanto, $x(t_0) = y(t_0) = x_0$.
Sea ahora $t_1 \neq t_0$ tal que $t_1 \in I_1 \cap I_2$, supongamos que $t_0 < t_1$, en tal caso $[t_0, t_1] \subset I_1 \cap I_2$ y en consecuencia para todo $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \\ y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \end{aligned}$$

Ahora denotemos por $K = \{(s, x(s));\ s \in [t_0, t_1]\} \cup \{(s, y(s));\ s \in [t_0, t_1]\}$, evidentemente, K es compacto. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s)) - f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} m_K(s)\|x(s) - y(s)\| ds \end{aligned}$$

Aplicando el lema de Gronwall se tiene $|x(t) - y(t)| \leq 0$, $\forall\ t \in [t_0, t_1]$. En consecuencia $|x(t) - y(t)| = 0$, entonces $x(t) = y(t)$. Por lo tanto la solución es única en un entorno de t_0. □

SECCIÓN 3.6

Existencia de soluciones en el sentido de Filippov

Definición 3.3. Sea B la bola unitaria en $\mathcal{C}((0,T), \mathbb{R}^n)$ y F definida sobre algún subconjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y consideremos un punto (x_0, t_0) en Ω. Planteamos las

siguientes hipótesis:
Existe $I = [t_0 - T; t_0 + T]$ y M tal que:

(I) $I \times \{x_0 + TMB\}$ está contenido en Ω

(II) $\|F(x,t)\| \leq M$ en $I \times \{x_0 + TMB\}$

Definición 3.4. Sea $H = \{x \in C(I) : x$ es lipschitziana con constante M en $x(t_0) = x_0\}$ para cualquier x en H se define el conjunto

$$J(x) = \{z \in H : z(t) \in F(x(t), t) \text{ c.t.p. en } I\}$$

Definición 3.5. Sea F una función semicontinua superior de $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Entonces

1. Existe I y M tal que se cumplen las hipótesis de la Definición 3.4
2. Para cada $x \in H$ se tiene que $J(x)$ es no vacío.

El siguiente teorema, proporciona una caracterización para la existencia de soluciones en el sentido de Filippov.

Teorema 3.7. Supongamos que F es semicontinua superior, con valores en un convexo compacto. Entonces:

(I) Para x en H, $J(x)$ es convexa

(II) La aplicación $x \to J(x)$ es semicontinua superior

(III) Existe un punto fijo $x^* \in J(x^*)$

Demostración.

1. Sean z_1 y z_2 en $J(x)$; entonces z_1'; $z_2' \in F(x(t), t)$ c.t.p. $t \in I$.
   De donde $\alpha z_1' + (1-\alpha) z_2' \in F(x(t), t)$, $\alpha \in [0, 1]$, es decir $\alpha z_1 + (1-\alpha) z_2 \in J(x)$; por lo tanto $J(x)$ es convexo.
2. Se mostrará que J, tiene su gráfico cerrado, en efecto sea $x_n \in H$, $z_n \in J(x)$ y asúmase que $x_n \to \bar{x}$; $z_n \to \bar{z}$, llámese y_n a la aplicación

$$t \to z_n$$

Las cuales pertenecen a la bola de radio M de $L^\infty(I)$ de donde por el teorema de Alougle existe una subsucesión que converge hacia algún $\bar{y}$ en $\sigma(L^\infty(I), L^1(I))$. En particular para cada aplicación $\varphi \in L^\infty(I)$

$$\int_I \langle y_n, \varphi\rangle \to \int_I \langle \bar{y}, \varphi\rangle$$

Es decir por un lado (y_n) converge en $\sigma(L^\infty(I), L^1(I))$ y por el otro lado

$$z_n(t) = \int_{t_0} y_n \to \int_{t_0} \bar{y}$$

es decir $\bar{y} = \bar{z}$ aplicando el Teorema de la Convergencia se infiere que $\bar{z}(t) \in F(x(t), t)$; de donde el grafico de J es cerrado, como los valores están contenidos en H se concluye que J es semicontinua superior.

3. Usando el Teorema de Kakutani, se obtiene la existencia de un punto fijo.

□

Como consecuencia del teorema anterior se obtiene el siguiente corolario, qué caracteriza la existencia de soluciones del tipo Filippov

Corolario 3.3. Bajo las hipótesis del teorema 3.4, el problema $x' \in F(x(t), t)$; $x(t_0) = x_0$ admite al menos una solución definida en I.

SECCIÓN 3.7

Un caso particular de unicidad de soluciones en el sentido de Filippov

La unicidad de una solución de Filippov aún es un problema abierto, en este trabajo monográfico, mostramos la unicidad para el caso particular de la ley de conservación escalar siguiente

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \partial_x[f(\rho)] = 0 \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) \end{cases} \tag{3.5}$$

En donde f es la función flujo, la cual satisface la siguiente hipótesis (H)
La función flujo f tiene un punto de inflexión en $\rho = \bar{\rho}$; es cóncava en el intervalo $]-\infty, \bar{\rho}]$ y convexa en $[\bar{\rho}, +\infty]$.

Donde ρ_0 es un dato inicial conveniente, la función flujo f es asumida lo suficientemente suave.
Para (3.5) asociamos un problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria, es decir

$$\dot{p} = w(\rho(t,p)) \tag{3.6}$$

$$p(0) = p_0 \tag{3.7}$$

Donde w es una función diferenciable adecuada dependiendo de la solución ρ para (3.5), y p_0 es un dato inicial. Consideremos las soluciones de Filippov (3.6) definida en el intervalo $[0,T]$, $T > 0$. Más precisamente, asumimos que $\rho(t,.)$ tiene definida localmente la variación total para todo $t > 0$. Denotamos por $I[a,b]$ el intervalo cerrado más pequeño conteniendo a, $b \in \mathbb{R}$.
Definimos p como una solución para (3.6) y (3.7) en $[0,T]$ si esta es una función absolutamente continua tal que $p(0) = p_0$ y su derivada $\dot{p}$ satisface la inclusión diferencial

$$\dot{p}(t) \in \overline{co}\{w(\rho) \, : \, \rho \in I[\rho(t,p(t)-),\rho(t,p(t)+)]\} \tag{3.8}$$

Para casi todo $t \in [0,T]$. Aquí $\overline{co}$ denota la cascara convexa cerrada y $\rho(t,x-)$, $\rho(t,x+)$ son respectivamente, los limites izquierdos y derechos de $\rho(t,.)$ en x.

Definición 3.6. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $u : I \to \mathbb{R}^n$ se dice una variación total limitada si

$$Tot.Var(u) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{N} |u(x_i) - u(x_{i-1})| \, : \, x_i \in I, \; x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N\right\} < +\infty$$

El conjunto de las funciones con valores en $\mathbb{R}^n$ y con variación total limitada sobre I será indicado por $\mathbb{BV}(I;\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 3.1. Toda función monótona limitada es una función con variación total limitada.

3.7.1 Unicidad para el caso particular de la Ley de Conservación Escalar

Teorema 3.8. Asuma que (H) se cumple. Sea $T > 0$ y sea w una función suave satisfaciendo

$$w(\rho) > f'(\rho) \qquad \forall\ \rho. \tag{3.9}$$

Sea $\rho_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ un dato inicial para (11) tal que la correspondiente solución ρ satisface

$$TotVar(\rho(t,.)) < +\infty \qquad \forall\ t > 0 \tag{3.10}$$

Entonces los problemas (3.6) y (3.8) admiten una única solución de Filippov en $[0, T]$. Además si $p^1(.)$ y $p^2(.)$ solucionan (3.6) con el dato inicial p_0^1, p_0^2 respectivamente entonces tenemos la dependencia de Hölder

$$|p^1(t) - p^2(t)| \leq C|p_0^1 - p_0^2|^\alpha, \qquad t \in [0, T] \tag{3.11}$$

Para algún $\alpha]0, 1[$ y $C > 0$.

Demostración. La prueba del teorema se hará en etapas:

Etapa I: PRUEBA DE CONDICIONES

Ahora nos dedicaremos a ver si el problema de Cauchy definido por las ecuaciones (3.6) y (3.7), satisface las condiciones de Caratheodory. en efecto

Sea w una función diferenciable adecuada entonces es continua en p para casi todo t fijo, ahora supongamos que ρ cumple esta condición también. Entonces tendríamos que la compuesta $w \circ \rho$ es continua en p para casi todo t fijo.

Ya que w es una función continua en p entonces es medible en t, para cada p fijo; ahora supongamos que ρ cumple esta condición también entonces tendríamos que la compuesta $w \circ \rho$ es medible en t, para todo p fijo.

Ahora admitamos que w es una función localmente acotada; ya que $\rho(t, .)$ tiene localmente definida la variación total limitada para todo $t > 0$ entonces también es localmente acotada; de donde la compuesta $w \circ \rho$ es localmente acotada para $t > 0$.

Por lo tanto la compuesta $w \circ p$ cumple las condiciones de Caratheodory.

ETAPA II: Ahora probemos la existencia de (3.6) y (3.7)

Sea $p_1 : I \to \mathbb{R}^N$ una función continua. Consideramos la sucesión de Funciones $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por:

$$p_{n+1}(t) = p_0 + \int_0^T w \circ \rho(s, p_n(s))dx \qquad t \in I\,,\, n \in \mathbb{N}, \tag{*}$$

La expresión de la derecha tiene sentido. Para esta sucesión de funciones no podemos aplicar directamente la Proposición 3.4, pero la idea es la misma. Para ver que $\{p_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua en compactos, no tenemos más que tomar un compacto $J \subseteq I$ cualquiera.

$$\begin{aligned}
\|p_{n+1}(t)\| &\leq \|p_0\| + \left\|\int_0^T w \circ \rho(s, p_n(s))ds\right\| \\
&\leq \|p_0\| + \left|\int_0^T \|w \circ \rho(s, p_n(s))\|ds\right| \\
&\leq \|p_0\| + \left|\int_0^T m(s)ds\right| < \infty
\end{aligned}$$

Por otra parte, para $t; t' \in J$, con m una cota de Caratheodory de $w \circ \rho$ en algún entorno compacto de $\{(t, p(t)) \mid t \in J\}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\|p_{n+1}(t) - p_{n+1}(t')\| &\leq \left\|\int_0^T w \circ \rho(s, p_n(s))ds - \int_0^{T'} w \circ \rho(s, p_n(s))ds\right\| \\
&\leq \left\|\int_{T'}^T w \circ \rho(s, p_n(s))ds\right\| \leq \left|\int_{T'}^T \|w \circ \rho(s, p_n(s))\|ds\right| \\
&\leq \int_0^{T'} m(s)ds = \left|\int_0^T m(s)ds - \int_0^{T'} m(s)ds\right| = |M(T) - M(T')|
\end{aligned}$$

Donde $M(t) := \int_0^T m(s)ds$ para $t \in J$.

Por el teorema de Arzela-Ascoli, $\{p_n\}$ tiene una subsucesión uniformemente convergente en compactos de I a una cierta función p. Pasando al límite en (*), de la misma forma que en la demostración de la proposición 3.4, p es una solución en I de $p' = w \circ \rho(t, p)$.

ETAPA 3: Ahora probemos si existe una única solución de (3.6) y (3.7)

Supongamos que p, q son dos soluciones definidas en un cierto intervalo compacto J.

Entonces, usando una constante de Lipschitz $k(t)$ de $w \circ \rho$ en un compacto K tal que tanto $J \times p(J)$ como $J \times q(J)$ están contenidos en K,

$$\begin{aligned} |p(t) - q(t)| &\leq \int_0^T \|w \circ \rho(s, p(s)) - w \circ \rho(s, q(s))\| \\ &\leq \int_0^T m_K(s)\|p(s) - q(s)\| ds \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Graonwall, se sigue que $|p(t) - q(t)| \leq 0$, de donde se sigue $|p(t) - q(t)| = 0$, de lo cual deducimos que $p(t) = q(t)$.
Por tanto la solución es única en un entorno de 0. $\square$

Conclusiones

1. La existencia de soluciones para la ecuación (1.1), en el sentido de Caratheodory, se obtuvo bajo las siguientes hipótesis.

    a) f es una función de Caratheodory.

    b) $x \to f(x(t), t)$ es continua para cada $t \in I$.

2. La unicidad de las soluciones para la ecuación (1.1), en el sentido de Caratheodory, se obtuvo bajo las siguientes hipótesis:

    a) f es una función de Caratheodory

    b) $x \to f(x(t), t)$ es localmente Lipschitz para cada $t \in I$

3. La existencia de soluciones para la ecuación (1.1), en el sentido de Filippov, se obtuvo bajo la siguiente hipótesis:
   $F(x, t) = f(x(t), t)$ es una función Multivaluada, semicontinua superior, convexa cerrada y acotada $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

4. La unicidad de las soluciones para la ecuación (1.1), en el sentido de Filippov, se obtuvo para el caso particular de la ley de conservación escalar, bajo las siguientes hipótesis:

    a) La función flujo f tiene un punto de inflexión en $\rho = \overline{\rho}$.

    b) La función flujo f es cóncava en el intervalo $]-\infty, \bar{\rho}]$ y convexa en $[\bar{\rho}, +\infty[$

Recomendaciones

1. En el presente trabajo de tesis se desarrollo el análisis de funciones con discontinuidades en el lado derecho. Discontinuidades que producen incertidumbre en la medición, consecuencia de no tener acceso al vector de salida en todos los instantes de tiempo.

2. Se evidencia la importancia del problema de Cauchy para funciones discontinuas ya que hace posible resolver sistemas que presentan estas discontinuidades tales como: Sistemas mecánicos, Eléctricos, Hidráulicos, ecológicos, sociales y económicos.

3. Ahora es posible utilizar para su tratamiento la teoría de inclusiones diferenciales, que ha sido desarrollado en las últimas décadas y que permite darle un enfoque matemático a las no linealidades.

4. La observación de sistemas discontinuos o multivaluados ha sido poco explorada, razón por la cual nosotros hemos trabajado en este campo de investigación

Bibliografía

[1] **AUBIN, J.P.; CELINA A.**; *Differential Inclusions: set valued maps and viability theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1984

[2] **BRESSAN, A.; SHEN, W**; *Uniqueness for discontinuous O.D.E and conservation laws, Nonlinear Analysis.* 34(1998), pp.637-652

[3] **BREZIS, H**; *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones* Madrid. España. 1984.

[4] **COLOMBO,R.M; MARSON,A**; *A Hölder continuous O.D.E related to traffic flow Proceedings of the Royal Society of Edinburg.* 113A.,759-772.(2003).

[5] **FILIPPOV, A. F**; *Differential Equations with discontinuous right hand sides.* .Kluver Acad.Publ. (1988).

[6] **GUTIERREZ, N.et al**; *Soluciones de Caratheodory y Soluciones de Filippov para El problema de Cauchy de Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.* CIFIME-FACFYM-UNPRG, 2009.

[7] **H'AJEK, O**; *Discontinuous Differential, I, Journal of Differential Equations*, 32,149-170 (1972)

[8] **HARTMAN, P**; *Ordinary Differential Equations.* J. Wiley & Sons, Inc. (1964).

[9] **MARSON, A**; *No convex conservation laws and ordinary differential equations.* London Math.Soc. (2)69(2004), p.p, 428-440