UNIVERSIDAD NACIONAL "PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no Lineales Asistida con Matlab

TESIS

Para optar el título profesional de Licenciado en Matemáticas

Presentado por:

Bach. Mat. **Coronel Pasache Deisy Jacqueline**

Bach. Mat. **Chávez Colmenares Daniel Angel**

Asesor:

Mg. Cuti Gutierrez Alcides Raúl

LAMBAYEQUE – PERÚ

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO”

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada **“Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no Lineales Asistido con Matlab”**, presentada por los bachilleres en matemáticas, Coronel Pasache Deisy Jacqueline, Chávez Colmenares Daniel Angel, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de licenciado en matemáticas.

Mg. Guevara Quiliche Santos Henry

Presidente Jurado de Tesis

Lic. Mat. Coronado Juárez William Wilmer

Secretario Jurado de Tesis

Lic. Mat. Arriaga Delgado Walter

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: Febrero - 2017

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no Lineales Asistida con Matlab”

Bach. Mat. Coronel Pasache Deisy Jacqueline
Autor

Bach. Mat. Chávez Colmenares Daniel Angel
Autor

Mg. Cuti Gutierrez Alcides Raúl
Asesor

Lambayeque – Perú
Febrero - 2017

Agradecimiento

El presente trabajo de tesis primeramente agradezco a Jehová Dios por bendecirme y dejar que mi sueño anhelado se haga realidad.
A la universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo y en especial a la facultad FACFyM por acogerme es su aulas.
A mi asesor Mg. Cuti Gutiérrez por su amistad y el apoyo constante.
A mis padres por haberme sabido orientar y apoyar sin condiciones, mi esposo por ser parte importante en el logro de mis metas profesionales.
A mi pequeño Jaime Javier que pese a que no habla me enseña, motiva y me da fuerzas a seguir adelante con sus gestos y llantos.

Deisy

Expresar mi más sincero y profundo agradecimiento al Mg. Raul Cuti Gutierrez asesor de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido.
Agradecer a los profesores y amigos en general, que con su ayuda han colaborado con la realización de la presente tesis.
Y finalmente un agradecimiento muy especial merece la compresión, paciencia y ánimo recibido de mi familia.
A todos ellos, muchas gracias.

Daniel

Dedicatoria

Dedico esta tesis a toda mi familia y amigos que creyeron en mí.

A mis padres Bertha y Humberto.

A mi hermana Roxana por su apoyo.

A mi motor y motivo Jaime y Jaime Javier.

Deysi

A Dios y a la Virgen de Guadalupe por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos.

A mis padres Oscar y Laura, porque siempre estuvieron a mi lado brindándome su apoyo y sus consejos para hacer de mí una mejor persona.

A mi hermano Oscar Enrique por sus palabras de aliento y por darme su ejemplo

Daniel

Resumen

En el presente trabajo de investigación se presenta la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales asistida con MATLAB, específicamente en dos métodos: El método del disparo no lineal, el cual nos va a permitir desarrollar problemas de ecuaciones diferenciales no lineales con valores de frontera, utilizando el algoritmo del método de Runge-Kutta de cuarto orden y el método de diferencias finitas no lineal que nos permite a través de un sistema de ecuaciones no lineales calcular una solución aproximada de la ecuación diferencial ordinaria no lineal sobre un dominio discreto.
Ambos métodos se aplican a las ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, asistidos con el software matemático MATLAB el cual nos va ayudar con facilidad a solucionar dichos problemas con mejor aproximación.

Abstract

In this research the numerical solution of assisted nonlinear ordinary differential equations with MATLAB is presented, specifically in two methods: The method of nonlinear shot, which will allow us develop problems of nonlinear differential equations with boundary values, using the algorithm of Runge-Kutta fourth order and the method of nonlinear finite difference allows us through a nonlinear system of equations to calculate an approximate solution of nonlinear ordinary differential equation on a discrete domain. Both methods are applied to nonlinear ordinary differential equations, assisted with the mathematical software MATLAB which will help us easily solve these problems better approach.

Introducción

En diversas áreas de las ciencias básicas e ingeniería existen problemas donde necesitan ser descritos utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, Sin embargo, en muchas ocasiones, su solución está determinada en más de un punto.

Un problema de este tipo es denominado Problema de Valor de Frontera (P.V.F.) y los que suelen ser comunes en todas las ramas de las ciencias experimentales y en especial en Ingeniería Química son los de segundo orden, es decir los P.V.F que se especifican en dos puntos:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Son múltiples los ejemplos de aplicación es tas ecuaciones, desde la evaluación de las concentraciones de diversos reactivos durante una reacción en ingeniería Química hasta el modelado de dinámica de poblaciones en Biología. En la generalidad de las situaciones de la vida real, la ecuación diferencial ordinaria no lineal que modela el problema resulta demasiado complicada para resolverla con exactitud, es por ello que este trabajo se concentrará en el estudio de 2 métodos: El método de disparo no lineal y el método de diferencias finitas no lineal.

El presente trabajo se enfoca en simplificar con el software MATLAB los cálculos que se realizan para desarrollar ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales por métodos analíticos y numéricos. Para ello, creamos códigos por los cuales el programa realizará los cálculos que manualmente son complicados de resolver.

En el primer capítulo presentaremos una introducción se trata sobre unos tópicos de Álgebra lineal tales como matrices, determinantes, el software matemático MATLAB, además los métodos analíticos de ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo

orden.

En el segundo capítulo se estudia e análisis de error, la teoria elemental de los problemas de valor inicial y los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales lineales, el método de Euler, Taylor, Runge-Kutta, Disparo lineal y Diferencias finitas.

En el tercer capítulo se presenta la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales solucionada con los métodos de disparo no lineal, diferencias finitas no lineal y además utilizando el software matemático MATLAB.

Finalmente se da a conocer la bibliográfica utilizada para el desarrollo del presente trabajo. De igual forma se dan las conclusiones , sugerencias y anexos que los autores del presente trabajo que han creído conveniente.

Índice general

Capítulo 1:

preliminares

1.1 Matrices, Propiedades

Definición 1.1. Una matriz $A_{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ es un arreglo rectangular de **m x n** números dispuestos en m filas (renglones) y n columnas. El orden de una matriz también se denomina dimensión o tamaño, siendo **m** y **n** números naturales.
Las matrices se denotan con letras mayúsculas: $A, B, C, \ldots$ y los elementos de las matrices con letras minúsculas y subíndices que indican el lugar ocupado:

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21} \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{mn}$. Un elemento genérico que ocupe la fila "i" y la columna "j" se escribe a_{ij} . Si el elemento genérico aparece entre paréntesis también representa a toda la matriz: $A = \Big(a_{ij}\Big)_{m\times n}$

Así tenemos:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \Big(a_{ij}\Big)_{m\times n}$$

Ejemplo 1.1. Son ejemplos de matrices los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 3 & 12 & 11 \\ 8 & 23 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} i & 2 & -1 \\ 5 & 3-2i & 2i \end{bmatrix}$$

A es una matriz de orden 2×2; $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

B es una matriz de orden 3×3; $b_{ij} \in \mathbb{R}$.

C es una matriz de orden 2×3; $c_{ij} \in \mathbb{C}$.

1. **<u>Igualdad de matrices</u>**

   Se dice que dos matrices $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ son iguales si y solo si son idénticas; es decir, si y solo si son del mismo orden y sus respectivos elementos son iguales: $A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ para cada i y para cada j.

   Ejemplo 1.2. Sean:

   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$ Averiguar si son iguales o no.

   Solución.

   A y B tienen el mismo orden (2×2). Veamos si tiene los mismos elementos:

   $$a_{11} = b_{11} = 3; \quad a_{12} = b_{12} = -10; \quad a_{21} = b_{21} = 8; \quad a_{22} = b_{22} = 4$$

   Luego A=B.

1.2 Operaciones y Propiedades

1. **Suma de matrices**

   Sean las matrices: $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, ambas del mismo orden $m \times n$. La matriz suma de A y B es:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

   la cual también es de orden $m \times n$.

   Observación 1.1. En otras palabras, para sumar matrices, lo que se hace es sumar los elementos que están situados en la misma fila y en la misma columna.[2]

   Ejemplo 1.3. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 4 \\ -1 & 8 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 0 & -2 \end{bmatrix} y \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 3 & -4 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

   entonces:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3+(-2) & 6+(-8) & 0+3 & 4+(-4) \\ -1+4 & 8+3 & 3+5 & 5+3 \\ 5+3 & 7+(-1) & 0+4 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 11 & 8 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

   Propiedad 1.1.

   a) A + B = B + A

   b) (A + B) + C = A + (B + C)

   c) k (A + B) = k A + k B (k : escalar)

   d) (k+ l) A = k A + l A (k , l : escalares)

   e) (k l) A = k (l A) (k , l : escalares)

f) 1A = A

g) -A = (-1) A

h) La diferencia de A y B, del mismo orden, es definida por: A - B = A + (-B)

Ejemplo 1.4. Sean:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 8 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hallar A-B

Solución.- Se puede efectuar la diferencia, ya que las matrices son del mismo orden (3×3).

Luego: A-B = A+(-B)=A= $\begin{bmatrix} 0 & 10 & 1 \\ 1 & -12 & -10 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2. **<u>Multiplicación de una Matriz por un Escalar</u>**

Sea $A = [a_{ij}]$ de orden $m \times n$ y k un número real. Entonces: $kA = [ka_{ij}]$ para todo i, j.

Nota 1.1. Observar que cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar k.

Ejemplo 1.5. Sea

$$\begin{bmatrix} -3 & -8 & 4 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} yk = 2 \qquad \text{hallar } k\text{A}$$

entonces $kA = 2A = \begin{bmatrix} -6 & -16 & 8 \\ 8 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

3. **<u>Producto de un Vector Fila por un Vector Columna</u>**

Sean:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \ y \ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Entonces $AB = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ es el producto de A por B.

Al número $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ se le conoce como producto escalar de A y B.

Nota 1.2. . Observar que ambas matrices tienen la misma cantidad de elementos (la matriz A tiene n elementos columna y la matriz B tiene n elementos fila)

Ejemplo 1.6. Hallar AB, si :

$A = [2 \ \ -5 \ \ 7]_{1\times 3}$ (una fila y 3 columnas) y

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

(tres filas y una columna)

solución

$$AB = [2 \ \ -5 \ \ 7] \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} = [(2)(2) + (-5)(7) + (7)(3)] = [-10]$$

4. **<u>Producto de dos Matrices</u>**

El producto de una matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$ y una matriz $B = [b_{ik}]$ de $n \times p$, es otra matriz $C = [c_{ik}]$de orden $m \times p$, donde c_{ik} es el producto escalar de la $i-$ésima fila de A por la $k-$ésima columna de B. Gráficamente podemos observar lo siguiente:

$$
\begin{array}{c}
\\
\\
\\
\text{Fila i de la matriz A} \Rightarrow \\
\\
\\
\end{array}
\left[\begin{array}{cccccc}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\hline
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{ccc|c|c}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & \cdots \; b_{1p} \\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & \cdots \; b_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ik} & \cdots \; b_{ip} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & \cdots \; b_{np}
\end{array}\right] = C = [C_{ik}]
$$

$\Uparrow$ Columna k de la matriz B

Donde:

$$
C_{ik} = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{ik} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}
$$

Ejemplo 1.7. Sean las matrices:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}
$$

Calcular $A \times B$.

Solución

Calculando los elementos C_{ik} del producto se tienen:

C_{11} : (primera fila de A por primera columna de B)

$$
C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [26]
$$

C_{12}: (primera fila de A por segunda columna de B)

$$C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [0]$$

C_{21} : (segunda fila de A por primera columna de B)

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [134]$$

C_{22} (segunda fila de A por segunda columna de B)

$$C_{22} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [-2]$$

Luego

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 0 \\ 134 & -2 \end{bmatrix}$$

5. **<u>Propiedades</u>**

   a) A(BC)=(AB)C

   b) (A+B)C=AC+BC

   c) A(B+C)=AB+AC

   d) En general, no se cumple que $AB = BA$. (No conmutan).

1.3 Matrices Especiales

1. **Matrices positivas**

Proposición 1.1. *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz positiva. Entonces*

a) *$det(A) > 0$*

b) *A es invertible*

c) *A es simétrica y por lo tanto diagonalizable por medio de una matriz ortogonal.*

d) *A^{-1} es también positiva.*

e) *A^T es también positiva*

f) *Para cada $1 \leq k \leq n$, A_k es también positiva*

Ejemplo 1.8. La matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow det(A) = 48$$

Por lo tanto es positiva.

- **Matriz simétrica positiva**

  Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$

  La matriz A es simétrica si $A = A^T$

  La matriz A es definida positiva si para todo $X \neq 0$ se tiene que

$$X^T A X > 0$$

Notación: Con $A > 0$ indicamos que la matriz es definida positiva.

Decimos que H es una submatriz principal de A si es una submatriz cuadrada formada con las entradas alrededor de la diagonal principal

$$H = A(j : k, j : k)$$

Proposición 1.2.

a) *Sea X no singular. A es simétrica positiva si y sólo si $X^T AX$ es simétrica positiva*

b) *Si A es simétrica positiva y H es cualquier submatriz principal de A, entonces H es simétrica positiva.*

c) *A es simétrica positiva si y sólo si A es simétrica y todos sus eigenvalores son positivos.*

d) *A es simétrica positiva si y sólo si existe una única matriz triangular inferior no singular L, con entradas positivas en la diagonal, tal que $A = LL^T$.*

2. **Matriz Cuadrada**

Se dice que una matriz A es cuadrada cuando el número de filas es igual al número de columnas. A_{mxn} es cuadrada si y sólo si $m = n$, en este caso se dice que A es de orden $(n \times n)$ y se representa por A_n.

Ejemplo 1.9.

La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es cuadrada, mientras que $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ no lo es.

En una matriz cuadrada A de orden $(n \times n)$, los elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$, forman la diagonal principal de la matriz.

Denotaremos el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n por M_n .

3. **Matriz Nula**

Una matriz en la cual todos sus elementos son ceros, se denomina matriz nula y se denota por $\theta_{m \times n}$.

4. **Matriz Diagonal**

   Una matriz cuadrada $A = \left(a_{ij}\right)$, es diagonal si $a_{ij} = 0$, para $i \neq j$ y $\exists i, a_{ii} \neq 0,\ 1 \leq i \leq n$.

   Es decir, si todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son ceros. Por ejemplo:

   Ejemplo 1.10.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} y \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. **Matriz Escalar**

   Es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

   Ejemplo 1.11.

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

6. **Matriz Identidad**

   La matriz cuadrada I_n es una matriz diagonal, si y solo si $a_{ij} = 0;\ \ \forall i \neq j\ \wedge\ \ a_{ii} = 1;\ \ \forall i = j$;

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, etc.$$

   Se acostumbra denotar a la matriz identidad de orden $n \times n$ por I_n.

7. **Matriz Fila**

   Se llama matriz fila a una matriz de orden $1 \times n$ (1 fila y n columnas) de la forma: $A = [a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n}]$

8. **Matriz Columna**

   Se llama matriz columna a una matriz de orden $n \times 1$, (n filas y 1 columna), de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix}$$

9. **Transpuesta**

   Dada una matriz A, se llama transpuesta de A a la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Se representa por A^t ó A^T. Si es $A = (a_{ij})_{mxn}$, su transpuesta es $A^t = (a_{ji})_{nxm}$

   Ejemplo 1.12.

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ entonces su transpuesta es $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

10. **Matriz triangular**

    a) **Matriz Triangular Superior**

    La matriz cuadrada A_n es triangular superior si $a_{ij} = 0, \quad \forall i > j$

    Ejemplo 1.13.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

    b) **Matriz Triangular Inferior**

    La matriz cuadrada A_n es triangular inferior si $a_{ij} = 0, \quad \forall i < j$

    Ejemplo 1.14.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

11. **Matriz Ortogonal**

Una matriz ortogonal es necesariamente cuadrada e invertible: $A^{-1} = A^T$ es decir la inversa de una matriz ortogonal es una matriz ortogonal. El producto de dos matrices ortogonales es una matriz ortogonal. El determinante de una matriz ortogonal vale +1 ó -1. $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. **Matriz Inversa**

Decimos que una matriz cuadrada A tiene inversa,A^{-1} , si se verifica que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad su \;\; inversa \;\; es \;\; A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

13. **Matriz Tridiagonal**

Una matriz tridiagonal es una matriz "casi"diagonal. De un modo más exacto, una matriz tridiagonal es una matriz cuadrada que tiene elementos distintos a cero solo en la diagonal principal, la primera diagonal sobre ésta, y la primera diagonal bajo la diagonal principal.

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.15.

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

14. **Matriz Regular** Decimos que una matriz cuadrada es "regular"si su determinante es distinto de cero, y es "singular"si su determinante es igual a cero.

$$\mid A \mid \neq 0 \Longrightarrow Matriz \quad Regular$$

$$\mid A \mid = 0 \Longrightarrow Matriz \quad Singular$$

15. **Matriz de Diagonal Dominante**

Una matriz cuadrada de orden "n",$A = \left(a_{ij}\right)$ donde , Se dice que es una matriz de diagonal dominante si $\mid a_{ii} \mid > \sum_{k=1k\neq i}^{n} \mid a_{ik} \mid \qquad i = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo 1.16.

La matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ es diagonal dominante por verificar que:

$3 > 1 + 1; \quad 2 > 0 + 1$ y $5 > 2 + \mid -1 \mid = 3$

1.4 Determinantes

Definición 1.2. El determinante viene a ser una función que aplicada a una matriz cuadrada da un único valor numérico.

Sea $M_{n\times n}$ el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n, entonces la definición queda de la siguiente manera:

$$||: M_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}(o \quad \mathbb{C})$$

$$A \longrightarrow \mid A \mid$$

Notación:

Sea A una matriz cuadrada, entonces el determinante de la matriz A se representa por $\mid A \mid$ o $det(A)$ o $det\ A$.

1. **<u>Determinante de una matriz cuadrada de orden 2</u>**

   Sea A una matriz cuadrada de orden 2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

   Su determinante se define mediante la fórmula:

$$\mid A \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

   Ejemplo 1.17.

   Sea la matriz cuadrada de orden 2, $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$,hallar det A

   Solución

$$\mid A \mid = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = (5)(3) - (8)(10) = 15 - 80 = -65$$

2. **<u>Determinante de una matriz cuadrada de orden 3</u>** Sea A una matriz cuadrada de orden 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

   Su determinante se define mediante la fórmula:

$$\mid A \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

   Ejemplo 1.18. Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$,hallar det A

Solución

$$| A |= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2)(3) + (2)(1)(2) + (3)(3)(1) - (2)(2)(3) - (1)(1)(1) - (3)(3)(2) = -12$$

3. **Cálculo del determinante de orden n, por los adjuntos**

   Cuando el orden de los determinantes es superior a 3 la regla de Sarrus no es fácilmente aplicable y entonces utilizamos el método de los adjuntos, que reduce el orden en una unidad cada vez que le utilizamos. Para ello vamos a definir dos nuevos conceptos:

4. **Menor complementario**

   Dada una matriz A_n se llama menor complementario de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz, que resulta de suprimir la fila i y la columna j en la matriz A_n: se llama m_{ij}.

5. **Adjunto de un elemento** Al producto de $(-1)^{i+j}$ por el menor complementario m_{ij} de a_{ij} se llama adjunto de un elemento a_{ij} y se escribe A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$$

A partir de estas definiciones obtenemos otra forma de calcular un determinante: el valor de un determinante de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos.

$$\begin{aligned} | A | \quad \sum_{ioj}^{n} a_{ij} \times A_{ij} \quad &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \cdots + a_{in}A_{in} \\ &+ a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.19.

Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ Elegimos la primera fila

ya que tiene dos elementos nulos y eso va a simplificar el cálculo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 1A_{11} + 0A_{12} + 2A_{13} + 0A_{14} =$$

$$= 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} + 0m_{12} + 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} + 0m_{14} =$$

Cuando llegamos a un determinante de orden tres, podemos aplicar Sarrus:

$1[(-16) + (-3) - [(-4) + 6]] + 2[(-2) + 1 + (-6) - [3 + 1 + 4]] = -51$

<u>En Matlab:</u>

```
>> A=[1 0 2 0;1 2 0 1;-1 1 4 -1; 3 -1 -3 -2]


A =
        1  0  2  0
        1  2  0  1
       -1  1  4 -1
        3 -1 -3 -2

>> det(A)
ans =
        -51
```

<u>Propiedades</u>

1. Para toda matriz $A_{n\times n}$ se tiene $detA = det(A^t)$.
2. El determinante de una matriz $A_{n\times n}$ cambia de signo si dos filas o dos columnas se intercambian.

3. Si la matriz $B_{n\times n}$ se obtiene de la matriz $A_{n\times n}$ trasladando una de sus filas o columnas k lugares, entonces, $\mid B \mid = (-1)^k \mid A \mid$.

4. Si una matriz $A_{n\times n}$ se tiene que una fila o columna es múltiplo de otra fila o columna, entonces el determinante de dicha matriz vale CERO.

5. Si en una matriz $A_{n\times n}$ todos los elementos de una matriz fila o columna son CEROS entonces su determinante es CERO.

6. Si una matriz $A_{n\times n}$ todos los elementos de una fila o columna son múltiplos por un escalar K, entonces el valor del determinante también queda multiplicado por K.

7. Si a una fila o una columna de una matriz $A_{n\times n}$ se le suma el múltiplo de otra fila o columna, se tendrá que el valor del determinante $A_{n\times n}$ no varía.

8. Si los elementos de una fila o columna cualquiera consta de dos términos, el determinante puede expresarse como la suma de otros dos determinantes.

9. El determinante de la matriz identidad es igual a la unidad.

10. Sea $D = [d_{ij}]$ una matriz diagonal de orden $n \times n$, entonces
$\mid D \mid = d_{11} \cdot d_{22} \cdot \cdot d_{33} \cdot \cdots \cdot d_{nn}$

11. El determinante de una matriz triangular superior o triangular inferior es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

12. En forma general el determinante de una suma de matrices es diferente de la suma de los determinantes de cada matriz, es decir:
$det(A + B) det(A) + det(B)$

13. El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, es decir:
$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$

1.5 Software Matemático MATLAB

MATLAB (MATrix LABoratory) es un entorno integrado de computación orientado hacia la resolución de problemas científicos y de ingeniería. MATLAB integra en un solo paquete cálculo (numérico y simbólico), visualización gráfica y programación.
Algunas características notables de MATLAB son:

- La programación es más sencilla.
- No hay distinción entre números enteros, reales y complejos.
- La amplitud de intervalo y la exactitud de los números son mayores.
- Cuenta con una biblioteca matemática amplia.
- Abundantes herramientas gráficas.
- Capacidad de vincularse con los lenguajes de programación tradicionales, tales como FORTRAN, C/ C++, Visual Basic, etc.
- Transportabilidad de los programas.

Además, el entorno básico de MATLAB se complementa con una amplia colección de cajas de herramientas (toolboxes) que contienen funciones específicas para determinadas aplicaciones en diferentes ramas de las ciencias y la ingeniería (por ejemplo: modelado, simulación y optimización de sistemas, control de procesos, adquisición de datos, estadística y control de calidad, etc.)
Estas características han hecho de MATLAB una herramienta muy efectiva para la educación y la investigación.

1.5.1 Ejecutando MATLAB

Si ya tiene instalado MATLAB, para ejecutarlo proceda igual que con cualquier otra aplicación WINDOWS, hacer doble clic sobre el icono correspondiente. En seguida se presentará la ventana de comandos, similar a la figura (1.1):

El símbolo $\gg$ nos indica que MATLAB está esperando que introduzcamos datos o alguna instrucción (comando). Una vez que se escribe la orden deseada, hay que pulsar la tecla de retorno, entonces el programa realiza la operación indicada y muestra la respuesta (ans=). En las guías de uso y de referencia (PDF) que acompañan al programa, así como en la ayuda (HELP) del programa pueden consultarse información adicional sobre las instrucciones y el uso de MATLAB.

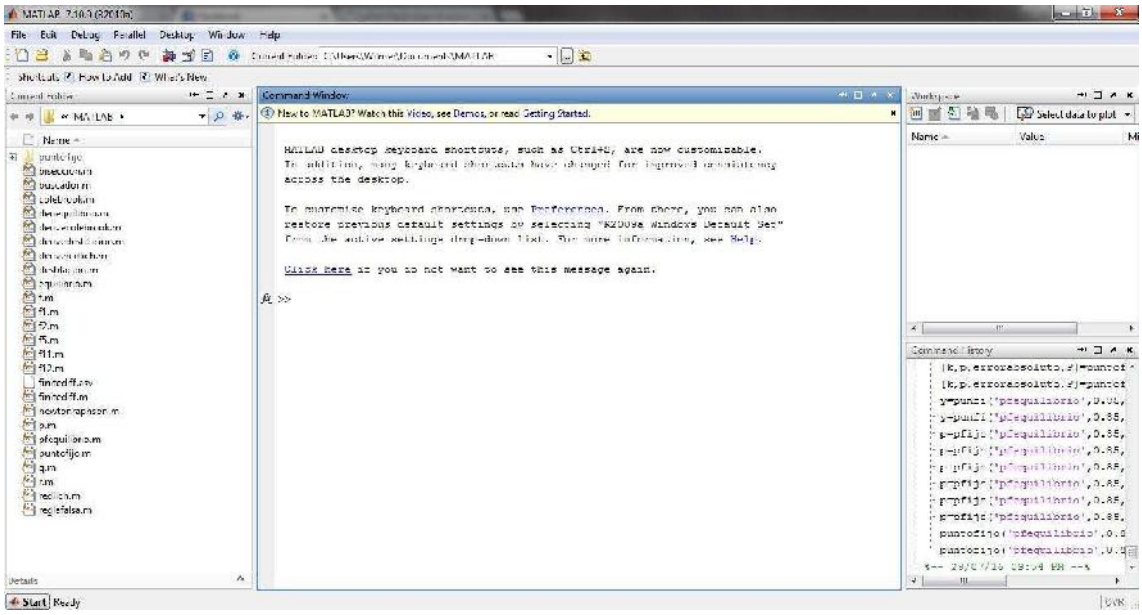


Figura 1.1: Ventana de comandos de MATLAB

1.5.2 Operadores en MATLAB R2010a

Operadores aritméticos

A + B	Adición
A - B	Sustracción
A * B	Multiplicación
A'	Transpuesta
A^B	Potenciación
A / B	División-derecha
A \B	División-izquierda
A.*B	Producto elemento a elemento
A./B y A.\ B	División elemento a elemento
A.^{B}	Elevar a una potencia elemento a elemento

Funciones Trigonométricas

Función	Inversa
sin(x)	asin(x)
cos(x)	acos(x)
tan(x)	atan(x), atan2(x)
cot(x)	acot(x)
sec(x)	asec(x)
csc(x)	acsc(x)

Funciones Hiperbólicas

Función	Inversa
sinh(x)	asinh(x)
cosh(x)	acosh(x)
tanh(x)	atanh(x)
coth(x)	acoth(x)
sech(x)	asech(x)
csch(x)	acsch(x)

Funciones exponenciales y logarítmicas

exp(x)	Función exponencial en base e
log(x)	Función logarítmica en base e de x
log10(x)	Función logarítmica en base 10 de x
log2(x)	Función logarítmica en base 2 de x
pow2(x)	Función potencial en base 2 de x
sqrt(x)	Función raíz cuadrada de x

1.6 Ecuaciones diferenciales ordinarias

1.6.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden

Una ecuación diferencial de primer orden, de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{1.1}$$

es una ecuación lineal; donde $a_1(x) \neq 0$, en I y $a_1(x), a_0(x), g(x)$ son continuas en el intervalo I.

Al dividir ambos lados de la ecuación (1.1) entre el primer coeficiente $a_1(x)$, se obtiene la llamada ecuación en forma canónica o forma estándar

$$\begin{array}{lll} \frac{dy}{dx}+ & \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y & = \frac{g(x)}{a_1(x)} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \frac{dy}{dx}+ & p(x)y & = f(x) \end{array} \tag{1.2}$$

debemos hallar una solución de (1.2) en un intervalo I, sobre el cual las dos funciones p y f son continuas.

Propiedad: La ecuación diferencial (1.2) tiene la propiedad de que su solución es la suma de las dos soluciones, $y = y_c + y_p$, donde y_c es una solución de la ecuación homogénea asociada:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \tag{1.3}$$

y_p es una solución de la ecuación (1.2) no homogénea.

Podemos determinar y_c por separación de variables. escribamos la ecuación (1.3) en la forma

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

al integrar y despejar a y obtenemos $y_c = ce^{-\int p(x)dx}$. Definiremos $y_c = cy_1(x)$, en donde $y_1 = e^{-\int p(x)dx}$. Aplicaremos de inmediato el hecho de que $dy_1/dx + p(x)y_1 = 0$, para determinar a y_p.

Procedimiento: ahora podemos definir una solución particular de la ecuación (1.2), siguiendo un procedimiento llamado variación de parámetros. Aquí, la idea básica es encontrar una función, u tal que $y_p = u(x)y_1(x)$, en que $y_1 = e^{-\int p(x)dx}$ sea una solución de la ecuación (1.2). En otras palabras, nuestra hipótesis de y_p equivale a $y = cy_1(x)$, excepto que el *parámetro variable* u reemplaza a c. Al sustituir $y_p = uy_1$ en (1.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}[uy_1] + p(x)uy_1 &= f(x) \\ u\tfrac{dy_1}{dx} + y_1\tfrac{du}{dx} + p(x)uy_1 &= f(x) \\ u[\tfrac{dy_1}{dx} + p(x)y_1] + y_1\tfrac{du}{dx} &= f(x) \end{aligned}$$

de modo que :

$$y_1 \frac{du}{dx} = f(x)$$

separamos variables, integramos y llegamos a :

$$du = \frac{f(x)}{y_1(x)} dx \quad \text{ y } u = \int \frac{f(x)}{y_1(x)} dx$$

De acuerdo con la definición de y_1, tenemos:

$$y_p = uy_1 = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx$$

asi,

$$y = yc + y_p = ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx \tag{1.4}$$

Entonces, si (1.1) tiene una solución. debe poseer la forma de la ecuación (1.4)

Recíprocamente, por derivación directa se comprueba que la ecuación (1.4) es una familia de soluciones de la ecuación (1.2).

Solución de una ecuación lineal de primer orden.

I) Para resolver una ecuación lineal de primer orden, primero se convierte a la forma de (1.2); esto es, se hace que el coeficiente de dy/dx sea la unidad.

II) Hay que identificar $p(x)$ y definir el factor integrante , $e^{\int p(x)dx}$

III) La ecuación obtenida en el paso (I) se multiplica por el factor integrante:

$$e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + p(x)e^{\int p(x)dx} y = e^{\int p(x)dx} f(x).$$

IV) El lado izquierdo de la ecuación obtenida en el paso (III) es la derivada del producto del factor integrante por la variable dependiente, y; esto es,

$$\frac{d}{dx}[e^{\int p(x)dx} y] = e^{\int p(x)dx} f(x)$$

V) se integra ambos lados de la ecuación obtenida en el paso (IV)

Ejemplos:

1. Resuelva $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

   Solución: Por separación de variables

$$\begin{aligned}
\tfrac{dy}{dx} - 3y &= 0 \\
\tfrac{dy}{dx} &= 3y \\
\tfrac{dy}{3y} &= dx \\
\int \tfrac{dy}{3y} &= \int dx \\
\tfrac{1}{3}\ln y &= x + c, \\
\ln y^{1/3} &= x + c \\
e^{\ln y^{1/3}} &= e^{x+c} \\
y^{1/3} &= e^{x+c} \\
y &= e^{3x}e^{3c} \\
y &= c \cdot e^{3x}
\end{aligned}$$

2. resuelva $\frac{dy}{dx} + 5y = 50$

   Solución:

   esta ecuación es de la forma (1.2) con $p(x) = 5$ y $f(x) = 50$ el factor integrante es : $e^{\int p(x)dx} = e^{\int 5dx} = e^{5x}$

   Multiplicamos por e^{5x}, la ecuación se transforma en

$$\frac{d}{dx}[ye^{5x}] = 50e^{5x}$$

   Al integrar ambos lados de la ultima ecuación, obtenemos la solución:

$$ye^{5x} = 10e^{5x} + c$$

   o sea,

$$y = 10 + ce^{-5x}, \qquad -\infty < x < \infty$$

1.6.2 Ecuaciones Diferenciales ordinarias lineales de segundo orden

Una ecuación diferencial de segundo orden , de la forma

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = \phi(x) \tag{1.5}$$

es una ecuación lineal, donde a_2, a_1, a_0 y ϕ son funciones continuas en un intervalo I. Si $a_2(x) \neq 0$, para todo $x \in I$, al dividir ambos lados de la ecuación (1.5) por $a_2(x)$, reducimos (1.5) a su forma estándar

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y & = r(x) \\ \text{ó} & \\ y'' + p(x)y' + q(x)y & = r(x) \end{array}\right\} \tag{1.6}$$

Para deducir con mayor facilidad importantes propiedades de este tipo de ecuaciones diferenciales, asociados a la s funciones p y q de antes, consideramos el operador L que toma cualquier función u, dos veces diferenciable sobre el intervalo I, y le asocia a la función $L[u]$ definida por

$$L[u](x) = u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) \tag{1.7}$$

Usando este operador la ecuación (1.7) se escribe de la forma

$$L[y] = r(x) \tag{1.8}$$

Tal operador se llama operador diferencial lineal pues verifica:

1. $L[cu] = cL[u]$ pata todo $c \in \mathbb{R}$.

2. $L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2]$
   combinando amabas propiedades se obtiene.

3. $L[\sum\limits_{k=1}^{n} c_k u_k] = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k L[u_k]$, donde $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$

1.6.3 Ecuaciones diferenciales ordinarias lineales Homogéneas de segundo orden

Son ecuaciones de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1.9}$$

con p, q funciones continuas definidas en un intervalo I.

Usando el operador diferencial L esta ecuación se reduce a

$$L[y] = 0 \tag{1.10}$$

Como consecuencia de la linealidad de L, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.1. *1. si y_1 es solución de la ecuación (1.10), entonces para todo $c \in \mathbb{R}$, cy_1 es solución.*

2. Si y_1, y_2 son soluciones de (1.10), entonces $y_1 + y_2$ es solución.

3. Si $y_1, \ldots, y_m$ son soluciones (1.10), entonces cualquier combinación lineal de ellas, digamos $\sum_{k=1}^{m} c_k y_k$, donde $c_i, i = 1, \ldots, k$ son constantes arbitrarias, también es una solución en el intervalo I.

4. Si y es solución de (1.10) y existe $x_0 \in I$ tal que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$ entonces $y(x) = 0$ para todo $x \in I$

Ejemplo 1.20. las funciones $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^2 \ln x$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $x^3y'' - 2xy' + 4y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Según el teorema 1.1 item 3), la combinación lineal

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$

también es una solución de la ecuación en el intervalo.

Ejemplo 1.21. la función $y = e^{7x}$ es una solución de $y'' - 9y' + 14y = 0$. Como la ecuación es lineal y homogénea, el múltiplo constante $y = ce^{7x}$ tambien es una solución

cuando c tiene diversos valores, $y = 9e^{7x}$, $y = 0, y = -\sqrt{5}e^{7x}, \ldots$ veamos que todas son soluciones de la ecuación.

Definición 1.3. las funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ se dicen linealmente dependiente (L.D) en el intervalo I, si existe constantes $c_1, \ldots, c_n$ no todas nulas tales que

$$c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + \ldots + c_nu_n(x) = 0 \quad \forall x \in I \tag{1.11}$$

las funciones $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ se dicen linealmente independientes (L.I) en I si (1.11) se verifica sólo cuando $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Ejemplo 1.22. El conjunto de las funciones $u_1(x) = \sqrt{x}+5$, $u_2(x) = \sqrt{x}+5x$, $u_3(x) = x - 1$, $u_4(x) = x^2$ es linealmente dependiente en el intervalo $(0, \infty)$ porque f_2 se puede escribir como una combinación lineal de u_1, u_3 y u_4. Observe que

$$u_2(x) = u_1(x) + 5u_3(x) + 0u_4(x)$$

para todo x en el intervalo $(0, \infty)$

Ejemplo 1.23. si $k_1 \neq k_2$ las funciones e^{k_1x}, e^{k_2x} son L.I en cualquier intervalo I.
En efecto, la relación

$$\begin{aligned}
&c_1e^{k_1x} + c_2e^{k_2x} = 0 && \forall x \in I\\
&\Rightarrow c_1 + c_2e^{(k_2-k_1)x} = 0 && \forall x \in I\\
&\Rightarrow (\text{ derivada })(k_2 - k_1)c_2e^{(k_2-k_1)x} = 0 && \forall x \in I\\
&\Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0
\end{aligned}$$

Definición 1.4. Wronskiano suponga que cada una de las funciones $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ posee al menos $n - 1$ derivadas. El determinante

$$W[u_1, u_2, \ldots, u_n] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_n \\ u_1' & u_2' & \ldots & u_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

en donde las primas representan las derivadas, se llama Wronskiano de las funciones.

Teorema 1.2. *Sean y_1, y_2 soluciones, de la ecuación (1.5) son LD en I, entonces el determinante (llamado Wronskiano)*

$$W(x) = W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0 \ \forall x \in I$$

Demostración. Sean c_1, c_2 constantes ambas no nulas tales que

$$\begin{aligned} & c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \quad \forall x \in I \\ \text{Entonces también} \quad & c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Si por ejemplo $c_2 \neq 0$, multiplicando la primera ecuación por $y_1'(x)$ y la segunda por $y_1(x)$ y restando, se obtiene para todo $x \in I$

$$c_2(y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)) = 0$$

$\Rightarrow c_2 w(x) = 0 \Rightarrow w(x) = 0$ □

Observación 1.2. Existe $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\begin{cases} A_1 x + A_2 y & = 0 \\ B_1 x + B_2 y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Teorema 1.3. *Sean y_1, y_2 son soluciones L.I en I, de la ecuación (1.5). entonces el Wronskiano*

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I$$

Demostración. Supongamos existe $x_0 \in I$ tal que $W(y_1(x_0), y_2(x_0)) = 0$. Entonces existe constantes c_1, c_2 ambas no nulas, tales que

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

pero entonces, $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ es también solución y verifica $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. esto implica que $y(x) = 0$ para todo $x \in I$, luego $c_1 = c_2 = 0$. Esta es una contradicción y por tanto $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ □

Teorema 1.4. *Sean y_1, y_2 son soluciones L.I en I de la ecuación homogénea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

son coeficientes continuas $p(x), q(x)$ en I. Entonces la solución general de esta ecuación es

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \ \ con\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Demostración. sea $y(x)$ una solución cualquiera de nuestra ecuación. Debemos demostrar que existe constantes c_1, c_2 tales que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, para todo $x \in I$. Fijemos $x_0 \in I$ y sean $y_0 = y(x_0)$ y $z_0 = y'(x_0)$. Consideremos

$$c_1 = \frac{y_0y_2'(x_0) - z_0y_2(x_0)}{W(y_1(x_0), y_2(x_0))}, c_2 = -\frac{y_0y_1'(x_0) - z_0y_1(x_0)}{W(y_1(x_0), y_2(x_0))}$$

es inmediato verificar que con estos valores c_1, c_2, se obtiene:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = z_0 \end{cases}$$

Entonces la solución $\alpha(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ verifica las condiciones iniciales $\alpha(x_0) = y_0$ y $\alpha'(x_0) = z_0$. Como la solución $y(x)$ también las verifica, concluimos que $y(x) = \alpha(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ para todo $x \in I$ □

Ejemplo 1.24. Considere la ecuación

$$y'' - 9y = 0$$

se puede chequear directamente que las funciones $y_1(x) = e^{3x}$ y $y_2(x) = e^{-3x}$ son soluciones particulares. Ademas por inspección, las soluciones son lineal mente independientes en el eje x. Podemos corroborar esto al observar que el Wronskiano

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

La solución general es:

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Fórmula de Abel: Si conocemos una solución particular $y_1(x)$ de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

hagamos la solución $y(x) = y_1(x)z(x)$ con $z(x) = \int u(x)dx$. tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= y_1'z + y_1z' \text{ y} \\ y'' &= y_1''z + 2y_1'z_1' + y_1z'' \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} & y_1''z + 2y_1'z_1' + y_1z'' + p(y_1'z + y_1z') + qy_1z = 0 \\ & \rightarrow (y_1'' + py_1' + qy_1)z + (2y_1' + py_1)z' + y_1z'' = 0 \\ & \Rightarrow (2y_1' + py_1)z' + y_1z'' = 0 \end{aligned}$$

Como $z'(x) = u(x)$, nos queda la ecuación de primer orden de variables separables

$$(2y_1' + py_1)u + y_1u' = 0$$

Lo podemos escribir de la forma

$$\frac{du}{u} = (-2\frac{y_1'}{y_1} - p)dx$$

cuya solución es

$$u(x) = \frac{1}{y_1(x)}e^{-\int p(x)dx}$$

esto implica que $z(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}dx$,
y por lo tanto $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}$, (Fórmula de Abel)
es una segunda solución de nuestra ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Finalmente observe que estas soluciones son L.I ya que el correspondiente Wanskiano es

$$W(y_1(x), y_2(x)) = e^{-\int p(x)dx}$$

Ejemplo 1.25. Resolver la ecuación $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución particular.

Solución:

El primer paso es escribir la ecuación en la forma que podamos aplicar el proceso anterior (y'' libre de variables). Dividiendo por $(1-x^2)$ tenemos

$$y'' - \frac{2x}{(1-x^2)}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

de esta forma $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ y usando la fórmula para $z(x)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
z(x) &= \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1(x)^2}dx \\
z(x) &= \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx \\
z(x) &= \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2}dx \\
z(x) &= \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} \\
z(x) &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})
\end{aligned}$$

por lo tanto la segunda solución que se obtiene es

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= y_1(x)z(x) \\
&= x \cdot (-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})) \\
y_2(x) &= -1 + \frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})
\end{aligned}$$

Luego, la solución general es

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \\
y(x) &= c_1x + c_2(-1 + \frac{x}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}))
\end{aligned}$$

1.6.4 Ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes

Las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden de coeficientes constantes son de la forma

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0 \tag{1.12}$$

con a_2, a_1, a_0 constantes reales , $a_2 \neq 0$

Los ejemplos anteriores sugieren seguir buscar soluciones de la forma $y(x) = e^{mx}$ donde

m es una constante real a determinar. Tenemos entonces :

$$y' = me^{mx} \text{ y } y'' = m^2 e^{mx}$$

Reemplazando en (α) se obtiene:

$$e^{mx}(a_2 m^2 + a_1 m + a_0) = 0 \tag{1.13}$$

Como e^{mx} nunca es cero cuando x tiene valor real, la única forma en que la función exponencial satisface la ecuación diferencial es cuando se elige uno m como una raíz de la ecuación cuadrática

$$a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

tal ecuación es llamada *ecuación característica* asociada a (1.13)

Casos posibles sea $d = a_1^2 - 4a_2a_0$, es discriminante de la ecuación característica (1.13) y m_1 y m_2 sus raíces.

$$m_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \text{ y } \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

Caso I: $d > 0$, Entonces m_1, m_2 son raíces reales y distintos de (1.13) y la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{1.14}$$

Caso II $d = 0$. Entonces $m_1 = m_2 = -\frac{a_1}{2a_2} \in \mathbb{R}$ y $y_1(x) = e^{m_1 x}$ es solución.

Afirmación: $y_2(x) = xe^{m_1 x}$ es también solución:

en efecto

$$y_2'(x) = m_1 x e^{m_1 x} + e^{m_1 x} = m_1 y_2(x) + e^{m_1 x} \tag{1.15}$$

$$\Rightarrow y_2''(x) = m_1 y_2'(x) + m_1 e^{m_1 x} \tag{1.16}$$

De la ecuación (1.15) obtenemos $e^{m_1 x} = y_2'(x) - m_1 y_2(x)$. reemplazando esto en (1.16) obtenemos

$$y_2''(x) = 2m_1 y_2'(x) - y_2'(x) - m_1^2 y_2(x) = -\frac{a_1}{a_2} y_2'(x) - \frac{a_1^2}{4a_2^2} y_2(x),$$

lo que implica

$$a_2 y_2''(x) + a_1 y_2'(x) + a_0 y_2(x) = 0.$$

esto prueba la afirmación y por lo tanto la solución general en este caso es

$$y(x) = e^{m_1 x}(c_1 + c_2 x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{1.17}$$

Caso III: $d < 0$. En este caso m_1, m_2 son números complejos conjugados,

$$m_1 = \alpha - i\beta, m_2 = \alpha + i\beta, \text{ con } \alpha = -\frac{a_1}{2a_2}, \beta = \frac{\sqrt{-d}}{2a_2}$$

de esta forma:

$$e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\,\mathrm{sen}(\beta x)) \text{ y } e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\,\mathrm{sen}(\beta x))$$

Son raíces complejas de (1.12). Luego la parte real $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y la parte imaginaria $y_2(x) = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$ son soluciones reales. Ademas como ellas son L.I, la solución general es

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2\,\mathrm{sen}(\beta x)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{1.18}$$

Ejemplo 1.26. $y'' - 3y' + 2y = 0$
la ecuación característica es $m^2 - 3m + 2 = 0$
cuyas raíces son $m_1 = 1$ y $m_2 = 2$. Por lo tanto la solución general de acuerdo a (1.14) es :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.27. $y'' - 10y' + 25y = 0$
la ecuación característica es $m^2 - 10m + 25 = 0$
cuyas raíces son $m_1 = m_2 = 5$. de acuerdo con (1.17) la solución general es :

$$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{5x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.28. $y'' + 4y' + 7y = 0$
la ecuación característica es $m^2 + 4m + 7 = 0$
cuyas raíces son $m_1 = -2 - \sqrt{3}i$ y $m_2 = -2 + \sqrt{3}i$. de acuerdo con (1.18), la solución general es :

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{3}x)), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 1.29. Resuelva el problema de valor inicial

$$4y'' + 4y' + 17y = 0, \quad y(0) = -1, y'(0) = 2$$

Solución:

La ecuación característica es : $4m^2 + 4m + 17 = 0$

cuyas raíces son $m_1 = -\frac{1}{2} - 2i, m_2 = -\frac{1}{2} + 2i$. De acuerdo a (1.18) la solución general es:

$$y(x) = e^{-x/2}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen}(2x)) \qquad (*)$$

Aplicando la condición $y(0) = -1$,

$y(0) = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0)$, entonces $c_1 = -1$

derivando (*), obtenemos :

$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x/2}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x) + e^{-x}(-2c_1 \operatorname{sen} 2x + 2c_2 \cos 2x)$

Aplicando la condición $y'(0) = 2$,

$$\begin{aligned} y'(0) &= -\tfrac{1}{2}c_1 + 2c_2 \\ y'(0) &= -\tfrac{1}{2}(-1) + 2c_2 \\ 2 &= 2c_2 + \tfrac{1}{2} \\ c_2 &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

por consiguiente, la solución del problema de valor inicial es

$$y(x) = e^{-x/2}(-\cos 2x + \frac{3}{3} \operatorname{sen} 2x)$$

1.6.5 Ecuaciones lineales de según de orden no homogéneas

Son ecuaciones de la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{1.19}$$

donde p, q y f son funciones continuas definidas son un intervalo I

usando el operador diferencial L definido en (6) de la sección 1.2.1 está ecuación toma la forma

$$L[y] = r(x) \tag{1.20}$$

las siguientes propiedades son consecuencia inmediata de la linealidad del operador L.

1. Si y_1 es solución de $L[y] = 0$ y $\tilde{y}$ es solución de $L[y] = r(x)$, entonces $y_1 + \tilde{y}$ es solución de $L[y] = r(x)$.

2. Si y_i es solución de $L[y] = f_i(x)$, para $i = 1, \ldots, n$, entonces $y(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(x)$ es solución de $L[y] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$, donde $\alpha_i = 1, \ldots, n$, son constantes.

3. Suponga que las funciones p q, U y V son real valoradas. Entonces, si la ecuación

$$L[y] = U(x) + iv(x)$$

tiene solución

$$y(x) = u(x) + iv(x),$$

Con u y v real valoradas, entonces $u(x)$ es solución de $L[y] = U(x)$, y $v(x)$ es solución de $L[y] = V(x)$

Teorema 1.5. *Considere la ecuación $L[y] = r(x)$, con coeficientes p, q y r continuas en un intervalo I. Si $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, con $c_1, c_2 \in R$ es la solución general de $L[y] = 0$, y $\tilde{y}$ es una solución particular de $L[y] = r(x)$, entonces*

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \tilde{y}(x), \qquad c_1, c_2 \in R$$

es solución general de $L[y] = r(x)$.

Demostración. sea $\tilde{y}_1$ una solución cualquiera de $L[y] = r(x)$. Tenemos que demostrar que existen constantes $c_1, c_2 \in R$ tales que

$$\tilde{y}_1(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \tilde{y}(x), \quad \forall x \in I$$

pero como $\tilde{y}_1 - \tilde{y}$ es solución de la ecuación $L[y] = 0$, existen constantes $c_1, c_2 \in R$ tales que

$$\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \quad \forall x \in I$$

lo que termina la demostración $\square$

Ejemplo 1.30. $y'' + y = x$

claramente $\tilde{y}(x) = x$ es solución particular consideremos ahora la ecuación homogénea $y'' + y = 0$. Su ecuación característica es $m^2 + 1 = 0$ y por lo tanto su solución general es

$$c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x), \quad c_1, c_2 \in R$$

por lo tanto la solución general de nuestra ecuación inicial es

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x, \quad c_1, c_2 \in R$$

1.7 Ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales

1.7.1 Ecuación diferencial ordinaria de Bernoulli

Definición 1.5. Una ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad con\ n = 2, 3, \cdots \tag{1.21}$$

se le llama una ecuación diferencial ordinaria no lineal de Bernoulli.

Método de solución

Paso 1: A la ecuación (1.21) se multiplica por y^{-n}, es decir:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

Paso 2: A la ecuación diferencial de paso 1 se multiplica por $(1-n)$ es decir:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$$

Paso 3: Sea $z = y^{1-n} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

Paso 4: Se reemplaza el tercer paso en el segundo paso, es decir:

$$\frac{dy}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

es una ecuación diferencial lineal en z de primer orden.

1.7.2 Ecuación diferencial ordinaria de Riccati

Consideremos la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) \tag{1.22}$$

A la ecuación (1.22) se conoce con el nombre de ecuaciones diferenciales de RICCATI. Estas ecuaciones diferenciales no se pueden resolver por métodos tradicionales, pero sin embargo si se conoce una solución particular, se puede hallar la solución de la ecuación diferencial suponiendo que $y = \varphi(x)$ sea una solución particular, entonces se puede hallar la solución de la ecuación diferencial, haciendo $y = \varphi(x) + z$, donde z es una función incógnita, que se va a determinar con la ayuda de la ecuación diferencia.
Es decir: $y = \varphi(x) + z \quad \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \varphi'(x) + \dfrac{dz}{dx}$, reemplazando en la ecuación (1.22) se tiene:

$$\varphi'(x) + \frac{dz}{dx} = P(x)(\varphi(x) + z) + Q(x)(\varphi(x) + z)^2 + R(x) \tag{1.23}$$

Agrupando los términos de la ecuación (1.23)

$$\frac{dz}{dx} - P(x) + 2Q(x)\varphi(x)z - Q(x)z^2 + (\varphi'(x) - Q(x)\varphi^2(x) - R(x)) = 0 \tag{1.24}$$

Como $y = \varphi(x)$ es una solución de la ecuación diferencial de RICCATI entonces se tiene

$$\varphi'(x) - P(x)\varphi(x) - Q(x)\varphi^2(x) - R(x) = 0 \tag{1.25}$$

de la ecuaciones (1.24) y (1.25) se tiene:

$$\frac{dz}{dx} - (P(x) + 2Q(x)\varphi(x))z = Q(x)z^2 \tag{1.26}$$

Luego la ecuación (1.26) es una ecuación diferencial de Bernoulli.

Capítulo 2:

Métodos Numéricos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Las ecuaciones diferenciales sirven para modelar problemas de ciencias e ingeniería que requieren el cambio de una variable respecto a otra. En la mayor parte de ellos hay que resolver un problema de valor inicial. En la generalidad de las situaciones de la vida real, la ecuación diferencial que modela el problema resulta demasiado complicada para resolverla con exactitud, por lo que se recurre a otros procedimientos para aproximar la solución. Si además, se requiere que la aproximación a la solución tenga muchas cifras decimales de precisión, entonces necesitaremos usar métodos sofisticados y el esfuerzo computacional será mayor. Antes de estudiar los métodos para aproximar los problemas de valor inicial, necesitamos algunas definiciones y resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias.

2.1 Análisis del Error

Definición 2.1. (Error Absoluto y Relativo)
Supongamos que $\widehat{p}$ es una aproximación a p. El error absoluto de la aproximación es $E_p = |p - \widehat{p}|$ y el error relativo es $R_p = \frac{|p-\widehat{p}|}{|p|}$, donde $p \neq 0$.

El error absoluto es la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado, mientras que el error relativo mide el error entendido como una porción del valor exacto.

Definición 2.2. Diremos que un número $\widehat{p}$ es una aproximación a p con d cifra decimales significativas si d es el mayor número natural tal que

$$\frac{|p-\widehat{p}|}{|p|} = \frac{10^{-d}}{2}$$

Definición 2.3. (Error de Truncamiento)
La noción de error de truncamiento se refiere a los errores que se producen cuando una expresión matemática complicada se "reemplaza"por una fórmula más simple.

Definición 2.4. (Error de Redondeo)
Los errores de redondeo surgen al usar una calculadora o computadora para cálculos con números reales, la aritmética de la máquina sólo utiliza números con una cantidad finita de cifras, de modo que los cálculos se realizan únicamente con representaciones aproximadas de los números verdaderos.
Los errores de redondeo se propagan cuando se hacen varias operaciones sucesivas.

2.1.1 Orden de aproximación $O(h^n)$

Definición 2.5. Se define que una función es de **orden** $g(h)$ cuando $h \longrightarrow 0$, lo que se denota por $f(h) = O(g(h))$, si existen constantes C y c tales que

$$|f(h)| \leq C|g(h)|, \text{siempre que } |h| \leq c.$$

Definición 2.6. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones. Se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es de orden $\{y_n\}$, lo denotamos por $x_n = O(y_n)$, si existen constantes C y N tales que

$$|x_n| \leq C|y_n| \quad \text{siempre que } n \geq N$$

Definición 2.7. Supongamos que una función $p(h)$ aproxima a otra $f(h)$ y que existen una constante real $M > 0$ y un número natural n tales que

$$\frac{|f(h) - p(h)|}{h^n} \leq M \quad \text{para h suficientemente pequeño}$$

Entonces se dice que $p(h)$ aproxima a $f(h)$ con orden aproximación $O(h^n)$. Lo que se escribe

$$f(h) = p(h) + O(h^n)$$

Teorema 2.1. *Supongamos que* $f(h) = p(h) + O(h^n)$, $g(h) = q(h) + O(h^m)$ *y sea* $r = min\{m, n\}$.
Entonces:

$$\begin{aligned} f(h) + g(h) &= p(h) + q(h) + O(h^r) \\ f(h).g(h) &= p(h).q(h) + O(h^r) \end{aligned}$$

y

$$\frac{f(h)}{g(h)} = \frac{p(h)}{q(h)} + O(h^r), \text{ supuesto que } g(h) \neq 0 \text{ y queq}(h) \neq 0$$

Teorema 2.2. ***(Teorema de Taylor)***
Supongamos que $f \in C^{n+1}[a, b]$. *Si* x_0 *y* $x = x_0 + h$ *están en* $[a, b]$, *entonces:*

$$f(x_0 + h) = \sum_{0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + O(h^{n+1})$$

Definición 2.8. (Error de discretización)
Supongamos que $\{(t_k, y_k)\}_{k=0}^{M}$ es un conjunto finito de aproximaciones a la única solución $y = y(t)$ de un problema de valor inicia.
El **error de truncamiento global o error de discretización global** e_k se define como:

$$e_k = y(t_k) - y_k \text{ para } k = 0, 1, ..., M$$

Este error es la diferencia entre la solución exacta y la calculada con el método del nodo correspondiente.
El **error de truncamiento local o error de discretización local** e_{k+1} se define como:

$$e_{k+1} = y(t_{k+1}) - y_k - h\Phi(t_k, y_k) \text{ para } k = 0, 1, ..., M - 1$$

Este error es el que se comete en un solo paso, el que nos lleva desde el nodo t_k hasta el nodo $t_(k + 1)$.

2.2 Teoría elemental de los problemas de valor inicial

Definición 2.9. (Condición de Lipschitz) Se dice que una función $f(t, y)$ satisface una condición Lipschitz en la variable y en un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe una constante $L > 0$ con la propiedad de que:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Siempre que $(t, y_1), (t, y_2) \in D$. A la constante L se le denomina la constante de Lipschitz para f.

Definición 2.10. (Conjunto convexo)
Se dice que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ es convexo, si siempre que (t, y_1) y (t, y_2) pertenecen a D, el punto $((1 - \lambda)t_1 + \lambda t_2, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)$ también pertenece a D para cada λ en $[0, 1]$.

Teorema 2.3. *Supongamos que $f(t, y)$ está definida en un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$ con*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \leq L \text{ para toda } (t, y) \in D$$

Entonces f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y y con las constante L de Lipschitz.

Teorema 2.4. *Supongamos que $D = \{(t, y)|a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ y que $f(t, y)$ es continua en D.*
Si f satisface una condición de Lipschitz en D en la variable y, entonces el problema de valor inicial

$$y'(t) = f(t, y), \qquad a \leq t \leq b, \qquad y(a) = \alpha$$

Tiene solución única $y(t)$ para $a \leq t \leq b$.

Definición 2.11. Se dice que el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

Es un problema bien planteado si:

1. El problema tiene una solución única, $y(t)$:

2. Para cualquier $\epsilon > 0$, existe una constante positiva $k(\epsilon)$ con la propiedad de que siempre que $|\epsilon_0| < \epsilon$ y $\delta(t)$ es continua con $|\delta(t)| < \epsilon$ en $[a, b]$, existe una solución única, $z(t)$, al problema:

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \leq t \leq b, \quad z(a) = \alpha + \epsilon_0$$

con

$$|z(t) - y(t)| < k(\epsilon)\epsilon, \text{para toda } a \leq t \leq b$$

Teorema 2.5. *Supongamos que $D = \{(t, y)|a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$. Si f es continua y satisface una condición de Lipschitz en la variable y en el conjunto D, entonces el problema de valor inicial*

$$y'(t) = f(t, y), \qquad a \leq t \leq b, \qquad y(a) = \alpha$$

Es bien planteado.

2.3 Método de Euler

El primer método que veremos es el método de Euler y nos servirá para ilustrar una serie de conceptos que juegan un papel importante en métodos más avanzados. El método de Euler no se suele utilizar en la práctica debido a que la solución que proporciona, acumula errores apreciables a lo largo del proceso; sin embargo, es importante estudiarlo porque es más fácil llevar a cabo el análisis del error de este método que el de otros más exactos pero más complejos.

Sea [a,b] el intervalo en el que queremos hallarla solución de un problema de valor inicial $y' = f(t, y)$ con $y(a) = y_0$ que está bien planteado en el sentido que f cumple la condición de Lipschitz. Debemos aclarar que la solución no será una función diferenciable, sino se construirá un conjunto finito de puntos $\{(t_k, y_k)\}$ que son aproximaciones a la solución $(y(t_k) \approx y_k)$.

En primer lugar, dividimos el intervalo [a,b] en M subintervalos del mismo tamaño usando la partición dada por los siguientes puntos:

$$t_k = a + kh \text{para } k = 0, 1, ..., M \text{ siendo } h = \frac{b-a}{M}$$

El valor del incremento h se llama tamaño de paso.

Resolveremos la ecuación diferencial:

$$y' = f(t, y) \ en \ \ [t_0, t_M] \ con \ \ y(t_0) = y_0 \tag{2.1}$$

Suponiendo que $y(t), y'(t) e y''(t)$ son continuas y utilizando el Teorema de Taylor para desarrollar $y(t)$ alrededor de $t = t_0$, para cada punto t existe un punto c_1 entre t_0 y t tal que:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + \frac{y''(c_1)(t - t_0)^2}{2}$$

Si evaluamos en t_1

$$y(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{y''(c_1)(t_1 - t_0)^2}{2}$$

Sustituimos $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$ y $h = t_1 - t_0$ en la ecuación anterior:

$$y(t_1) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) + \frac{y''(c_1)(h)^2}{2}$$

Si el tamaño de paso h es suficientemente pequeño, entonces podemos despreciar el término que contiene h^2 y obtener:

$$y(t_1) \approx y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) \tag{2.2}$$

Llamada aproximación de Euler.

Repitiendo el proceso generamos una sucesión de puntos que se aproximan a la gráfica de la solución $y = y(t)$. El paso general del método de Euler es

$$t_{(k+1)} = t_k + h, \quad y_{(k+1)} = y_k + hf(t_k, y_k) \quad para \ \ k = 0, 1, ..., M - 1.$$

2.3.1 Precisión del Método de Euler

Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial (2.1). Si $y(t) \in C^2[t_0, b]$ y $\{(t_k, y_k)\}_{k=0}^{M}$ es la sucesión de aproximaciones generada por el método de Euler, entonces:

Error de truncamiento global

$$|e_k| = |y(t_k) - y_k| = O(h)$$

Error de truncamiento local

$$|e_{k+1}| = |y(t_{k+1}) - y_k - h.f(t_k, y_k)| = O(h^2)$$

El error al final del intervalo se llama **error global final** , viene dado por

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = O(h)$$

Tomando dos tamaños de paso h y $\frac{h}{2}$, tenemos:

$$E(y(b), h) \approx C.h$$

Para el tamaño de paso más grande y

$$E(y(b), \tfrac{h}{2}) \approx C.\tfrac{h}{2} = \tfrac{h}{2}.C.h \approx \tfrac{h}{2}.E(y(b), h)$$

Podemos ver que si el tamaño de paso en el método de Euler se reduce a la mitad, entonces el error global final se reducirá a la mitad.

Ejemplo 2.1. Resolver la ecuación:

$$y' = \frac{y+1}{t-1}; \qquad y(0) = 1$$

Usando el método de Euler, con un tamaño de paso h=0.1

Solución.

Por método de variables separable podemos obtener la solución analítica, con la finalidad de compararla con la solución numérica.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y+1} &= \int \frac{dt}{t-1} \\
ln(y+1) &= ln(t-1) + ln(c) \\
e^{ln(y+1)} &= e^{ln(t-1)+ln(c)} \\
y+1 &= (t-1)c
\end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial, tenemos:

$$\begin{aligned}
y(0)+1 &= (0-1)c \\
2 &= -c \\
c &= \text{-2}
\end{aligned}$$

Utilizando el método de Euler

Tenemos que $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ y $h = 0.1$

Para $k = 0$

$$\begin{aligned}
t_1 &= t_0 + 0.1 = 0.1 \\
y_1 &= y_0 + 0.1\ f(t_0, y_0) = 1 + 0.1\left(\frac{1+1}{0-1}\right) = 1 \text{ - } 0.2 = 0.8
\end{aligned}$$

Para $k = 1$

$$\begin{aligned}
t_2 &= t_1 + 0.1 = 0.2 \\
y_2 &= y_1 + 0.1\ f(t_1, y_1) = 0.8 + 0.1\left(\frac{0.8+1}{0.1-1}\right) = 0.8 \text{ - } 0.2 = 0.6
\end{aligned}$$

Para $k = 2$

$$\begin{aligned}
t_3 &= t_2 + 0.1 = 0.3 \\
y_3 &= y_2 + 0.1\ f(t_2, y_2) = 0.6 + 0.1\left(\frac{0.6+1}{0.2-1}\right) = 0.6 \text{ - } 0.2 = 0.4
\end{aligned}$$

Para $k = 3$

$$\begin{aligned}
t_4 &= t_3 + 0.1 = 0.4 \\
y_4 &= y_3 + 0.1\ f(t_3, y_3) = 0.4 + 0.1\left(\frac{0.4+1}{0.3-1}\right) = 0.4 \text{ - } 0.2 = 0.2
\end{aligned}$$

Para $k = 4$

$$\begin{aligned}
t_5 &= t_4 + 0.1 = 0.5 \\
y_5 &= y_4 + 0.1\ f(t_4, y_4) = 0.2 + 0.1\left(\frac{0.2+1}{0.4-1}\right) = 0.2 \text{ - } 0.2 = 0
\end{aligned}$$

Para $k = 5$

$$t_6 \quad = t_5 + 0.1 = 0.6$$
$$y_6 \quad = y_5 + 0.1\ f(t_5, y_5) = 0 + 0.1\left(\frac{0+1}{0.5-1}\right) = 0 - 0.2 = -0.2$$

Para $k = 6$

$$t_7 \quad t_6 + 0.1 = 0.7$$
$$y_7 \quad = y_6 + 0.1\ f(t_6, y_6) = -0.2 + 0.1\left(\frac{-0.2+1}{0.6-1}\right) = -0.2 - 0.2 = -0.4$$

Para $k = 7$

$$t_8 \quad t_7 + 0.1 = 0.8$$
$$y_8 \quad = y_7 + 0.1\ f(t_7, y_7) = -0.4 + 0.1\left(\frac{-0.4+1}{0.7-1}\right) = -0.4 - 0.2 = -0.6$$

Para $k = 8$

$$t_9 \quad t_8 + 0.1 = 0.9$$
$$y_9 \quad = y_8 + 0.1\ f(t_8, y_8) = -0.6 + 0.1\left(\frac{-0.6+1}{0.8-1}\right) = -0.6 - 0.2 = -0.8$$

Para $k = 9$

$$t_{10} \quad t_9 + 0.1 = 1.0$$
$$y_10 \quad = y_9 + 0.1\ f(t_9, y_9) = -0.8 + 0.1\left(\frac{-0.8+1}{0.9-1}\right) = -0.8 - 0.2 = -1.0$$

t	Solución analítica y=1-2t	Solución numérica y
0.0	1.0	1.0
0.1	0.8	0.8
0.2	0.6	0.6
0.3	0.4	0.4
0.4	0.2	0.2
0.5	0.0	0.0
0.6	-0.2	-0.2
0.7	-0.4	-0.4
0.8	-0.6	-0.6
0.9	-0.8	-0.8
1.0	-1.0	-1.0

2.4 Método de la serie de Taylor

El método de la serie de Taylor es de aplicabilidad general y es el método estándar con el que se compara la precisión de otros métodos numéricos para resolver el problema de valor inicial, ya que puede ser construido de manera que tenga un grado de exactitud fijado de antemano. Reformularemos el Teorema de Taylor:

Teorema 2.6. ***(Teorema de Taylor)***
Supongamos que $y(t) \in C^{N+1}[t_0, b]$ y que $y(t)$ tiene el desarrollo de Taylo de orden N de un punto $t = t_k \in [t_0, b]$ dado por:

$$y(t_k + h) = y(t_k) + hT_N(t_k, y(t_k)) + O(h^{N+1}) \tag{2.3}$$

$$T_N(t_k, y(t_k)) = \sum_{j=1}^{N} \frac{y^{(j)}(t_k)}{j!} h^{j-1} \tag{2.4}$$

e $y^{(j)}(t) = f^{j-1}(t, y(t))$ denotada la derivada $(j-1)$-ésima de la función $f(t, y(t))$ con respecto a t. Las fórmulas de estas derivadas pueden calcularse utilizando la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}
y^{'}(t) &= f \\
y^{''}(t) &= f_t + f_y y' = f_t + f_y.f \\
y^{(3)}(t) &= f_{tt} + 2f_{ty}y' + f_y y'' + f_{yy}(y')^2 = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_y(f_t + f_y.f) + f_{yy}f^2 \\
y^{(4)}(t) &= f_{ttt} + 3f_{tty}y' + 3f_{tyy}(y')^2 + 3f_{ty}y'' + f_y y''' + 3f_{yy}y'y'' + f_{yyy}(y')^3 \\
&= (f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3) + 3f_{ty}(f_t + f_y.f) + f_y(f_{tt} + 2f_{ty}f + \\
&\quad f_y(f_t + f_y.f) + f_{yy}f^2) + 3f_{yy}f(f_t + f_y.f) \\
&= (f_{ttt} + 3f_{tty}f + 3f_{tyy}f^2 + f_{yyy}f^3) + f_y(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2) + \\
&\quad 3(f_{ty} + f_{yy}f)(f_t + f_y.f) + f_y^2(f_t + f_y.f)
\end{aligned}$$

Y, en general,

$$y^{(N)}(t) = P^{(N-1)} f(t, y(t))$$

Donde P es el operador de derivación:

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

El valor numérico aproximado de la solución del problema de valor inicial $y'(t) = f(t, y)$ en $[t_0, t_M]$ se calcula usando la fórmula (2.3) en cada subintervalo $[t_k, t_{(k+1)}]$, de manera que el paso general del método de Taylor de orden N es:

$$y_{k+1} = y_k + d_1.h + \frac{d_2.h^2}{2!} + \frac{d_3.h^3}{3!} + ... + \frac{d_N.h^N}{N!}$$

Siendo $d_j = y^{(j)}(t_k)$ para $j = 1, 2, ..., N$ en cada paso $k = 0, 1, ..., M - 1$.

El método de Taylor de orden N tiene la propiedad de que el error global final es de orden $O(h^{(N+1)})$, por tanto, se puede elegir N de manera que este error sea tan pequeño como queramos.

Precisión del Método de Taylor de orden N

Sea $y(t)$ la solución del problema de valor inicial: $y' = f(t, y)$ en $[t_0, t_M]$ con $y(t_0) = y_0$. Si $y(t) \in C^{N+1}[t_0, b]$ y $\{(t_k, y_k)\}_{k=0}^{M}$ es la sucesión de aproximaciones generada por el método de Taylor de orden N, entonces:

Error de truncamiento global

$$|e_k| = |y(t_k - y_k)| = O(h^{N+1})$$

Error de truncamiento local

$$|e_{k+1}| = |y(t_{k+1}) - y_k - h.T_N(t_k, y_k)| = O(h^N)$$

El **error global final** del extremo derecho del intervalo, viene dado por

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = O(h^N)$$

Para el caso $N = 4$, tomamos dos tamaños de paso h y $\frac{h}{2}$, tenemos:

$$E(y(b), h) \approx C.h^4$$

Para el tamaño de paso más grande y

$$E(y(b), \tfrac{h}{2}) \approx C.\tfrac{h^4}{16} = \tfrac{1}{16}C.h^4 \approx \tfrac{1}{16}.E(y(b), h)$$

Podemos ver que si el tamaño de paso en el método de Taylor se reduce a la mitad, entonces el error global final se reducirá en un factor de orden de $\frac{1}{16}$.

Ejemplo 2.2. Resolver la ecuación

$$y' = \frac{t-y}{2}, \qquad y(0) = 1$$

En el intervalo $[0, 2]$, usando el método de Taylor de orden 4.

Utilizaremos M=10 subintervalos. Entonces el tamaño de paso es:

$$h = \frac{2-0}{10} = 0.2$$

Siendo una ecuación lineal de primer orden, podemos obtener la solución analítica, con la finalidad de compararla con la solución numérica.

$$y = t + ce^{-\frac{t}{2}} - 2$$

Evaluando en la condición inicial $y(0) = 1$

$$y = t + 3e^{-\frac{t}{2}} - 2$$

Utilizando el método de Taylor de Orden 4

$$y_{k+1} = y_k + d_1.h + \frac{d_2.h^2}{2} + \frac{d_3.h^3}{6} + \frac{d_4.h^4}{24}$$

Tenemos que $t_0 = 0, \quad y_0 = 1$ y $h = 0.2$

Primero hallaremos las derivadas:

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \tfrac{t-y}{2} \\
y''(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{t-y}{2}\right) = \tfrac{1-y'}{2} = \tfrac{2-t+y}{4} \\
y'''(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{2-t+y}{4}\right) = \tfrac{0-1+y'}{4} = \tfrac{-2+t-y}{8} \\
y^{(4)}(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{-2+t-y}{8}\right) = \tfrac{-0+1-y'}{8} = \tfrac{2-t+y}{16}
\end{aligned}$$

$$y_{k+1} = y_k + \left(\frac{t_k - y_k}{2}\right)h + \left(\frac{2 - t_k + y_k}{4}\right)\frac{h^2}{2} + \left(\frac{-2 + t_k - y_k}{8}\right)\frac{h^3}{6} + \left(\frac{2 - t_k + y_k}{16}\right)\frac{h^4}{24}$$

Para $k = 0$

$$\begin{aligned}
t_1 &= t_0 + 0.2 = 0.2 \\
y_1 &= y_0 + \left(\frac{t_0 - y_0}{2}\right)0.2 + \left(\frac{2 - t_0 + y_0}{4}\right)\frac{0.2^2}{2} + \left(\frac{-2 + t_0 - y_0}{8}\right)\frac{0.2^3}{6} + \left(\frac{2 - t_0 + y_0}{16}\right)\frac{0.2^4}{24} \\
&= 1 + \left(\frac{0-1}{2}\right)0.2 + \left(\frac{2+1}{4}\right)\frac{0.2^2}{2} + \left(\frac{-2-1}{8}\right)\frac{0.2^3}{6} + \left(\frac{2+1}{16}\right)\frac{0.2^4}{24} \\
&= 0.9145125
\end{aligned}$$

Para $k = 1$

$$\begin{aligned}
t_2 &= t_1 + 0.2 = 0.4 \\
y_2 &= y_1 + \left(\frac{t_1 - y_1}{2}\right)0.2 + \left(\frac{2 - t_1 + y_1}{4}\right)\frac{0.2^2}{2} + \left(\frac{-2 + t_1 - y_1}{8}\right)\frac{0.2^3}{6} + \left(\frac{2 - t_1 + y_1}{16}\right)\frac{0.2^4}{24} \\
&= 0.856192704
\end{aligned}$$

Para $k = 2$

$$\begin{aligned}
t_3 &= t_2 + 0.2 = 0.6 \\
y_3 &= y_2 + \left(\frac{t_2 - y_2}{2}\right)0.2 + \left(\frac{2 - t_2 + y_2}{4}\right)\frac{0.2^2}{2} + \left(\frac{-2 + t_2 - y_2}{8}\right)\frac{0.2^3}{6} + \left(\frac{2 - t_2 + y_2}{16}\right)\frac{0.2^4}{24} \\
&= 0.822455262
\end{aligned}$$

Para $k = 3$

$$\begin{aligned}
t_4 &= t_3 + 0.2 = 0.8 \\
y_4 &= 0.810960861
\end{aligned}$$

Para $k = 4$

$$\begin{aligned}
t_5 &= t_4 + 0.2 = 1.0 \\
y_4 &= 0.819592797
\end{aligned}$$

Para $k = 5$

$$\begin{aligned}
t_6 &= t_5 + 0.2 = 1.2 \\
y_6 &= 0.846435797
\end{aligned}$$

Para $k = 6$

$$\begin{aligned}
t_7 &= t_6 + 0.2 = 1.4 \\
y_7 &= 0.889756850
\end{aligned}$$

Para $k = 7$

$$\begin{aligned}
t_8 &= t_7 + 0.2 = 1.6 \\
y_8 &= 0.947987864
\end{aligned}$$

Para $k = 8$

$$\begin{aligned} t_9 &= t_8 + 0.2 = 1.8 \\ y_9 &= 1.019709969 \end{aligned}$$

Para $k = 9$

$$\begin{aligned} t_{10} &= t_9 + 0.2 = 1.8 \\ y_{10} &= 1.103639319 \end{aligned}$$

t	**Solución analítica** $y = t - 2 + 3e^{-\frac{t}{2}}$	**Solución numérica** y_i	**Error** $\lvert y(t_i) - y_i \rvert$
0.0	1.0	1.0	0
0.2	0.914512254	0.9145125	0.000000246
0.4	0.856192259	0.856192704	0.000000445
0.6	0.822454662	0.822455262	0.0000006
0.8	0.810960138	0.810960861	0.000000723
1.0	0.819591979	0.819592797	0.000000818
1.2	0.846434908	0.846435797	0.000000889
1.4	0.889755911	0.889756850	0.000000939
1.6	0.947986892	0.947987864	0.000000972
1.8	1.019708979	1.019709969	0.000000990
2.0	1.103638323	1.103639319	0.000000996

Podemos observar que a medida que aumenta t aumenta el error.

2.5 Método de Runge Kutta

Los métodos de Taylor que vimos en la sección anterior tienen un error local de truncamiento de orden alto, pero poseen la desventaja de requerir el cálculo y evaluación de las derivadas $f(t, y)$. El cual es un procedimiento tedioso, por ello no se aplica el método de Taylor en la práctica.

Los métodos de Runge-Kutta tienen el error local de truncamiento de orden alto, como los métodos de Taylor, pero permiten prescindir del cálculo y evaluación de las derivadas

$f(t, y)$.

Los métodos de Runge-Kutta tienen la forma siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + (w_1k_1 + w_2k_2 + ... + w_nk_n)$$

$$\begin{aligned}
i &= 0, 1, 2, ..., n \\
k_1 &= hf(t_i, y_i) \\
k_2 &= hf(t_i + a_1h, y_i + b_{11}k_1) \\
k_3 &= hf(t_i + a_2h, y_i + b_{21}k_1 + b_{22}k_2) \\
k_4 &= hf(t_i + a_3h, y_i + b_{31}k_1 + b_{32}k_2 + b_{33}k_3) \\
&\vdots \\
k_n &= hf(t_i + a_{n-1}h, y_i + b_{n-1,1}k_1 + b_{n-1,2}k_2 + b_{n-1,3}k_3 + ... + b_{n-1,n-1}k_{n-1})
\end{aligned}$$

2.5.1 Método de Runge Kutta de Cuarto Orden

Sea el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad a \leq t \leq b, \qquad y(a) = \alpha$$

en $(N + 1)$ números uniformemente espaciados en el intervalo $[a, b]$:
El método de cuarto orden de Runge-Kutta (RK4) simula la precisión del método de la serie de Taylor de orden $N = 4$ y consiste en calcular la aproximación $y_(k + 1)$ de la siguiente manera:

$$y_{k+1} = y_k + w_1k_1 + w_2k_2 + w_3k_3 + w_4k_4 \tag{2.5}$$

Donde k_1, k_2, k_3 y k_4 son de la forma

$$\begin{aligned}
i &= 0, 1, 2, ..., n \\
k_1 &= hf(t_i, y_i) \\
k_2 &= hf(t_i + a_1h, y_i + b_1k_1) \\
k_3 &= hf(t_i + a_2h, y_i + b_2k_1 + b_3k_2) \\
k_4 &= hf(t_i + a_3h, y_i + b_4k_1 + b_5k_2 + b_6k_3)
\end{aligned}$$

Comparando estos coeficientes con los del método de Taylor de Orden 4, de manera el error de truncamiento sea de orden $O(h^5)$. Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$b_1 = a_1 \quad b_2 + b_3 = a_2 \quad b_4 + b_5 + b_6 = a_3$$

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 + w_4 &= 1 & w_2 a_1 + w_3 a_2 + w_4 a_3 &= \tfrac{1}{2} \\ w_2 a_1^2 + w_3 a_2^2 + w_4 a_3^2 &= \tfrac{1}{3} & w_2 a_1^3 + w_3 a_2^3 + w_4 a_3^3 &= \tfrac{1}{4} \\ w_3 a_1 b_3 + w_4(a_1 b_5 + a_2 b_6) &= \tfrac{1}{6} & w_3 a_1 a_2 b_3 + w_4 a_3(a_1 b_5 + a_2 b_6) &= \tfrac{1}{8} \\ w_3 a_1^2 b_3 + w_4(a_1^2 b_5 + a_2^2 b_6) &= \tfrac{1}{12} & w_4 a_1 b_3 b_6 &= \tfrac{1}{24} \end{aligned}$$

Este sistema consta de 13 incógnitas y solo 11 ecuaciones, así que debemos añadir dos condiciones adicionales para resolverlo. Tomaremos: $a_1 = \frac{1}{2}$ y $b_2 = 0$

Entonces los valores de la solución para las demás variable son:

$a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = 1$; $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_3 = \frac{1}{2}$; $b_4 = b_5 = 0$; $b_6 = 1$ $w_1 = \frac{1}{6}$; $w_2 = \frac{1}{3}$; $w_3 = \frac{1}{3}$; $w_4 = \frac{1}{6}$

Sustituyendo en las ecuaciones (2.5) obtenemos la fórmula del Método de Runge-Kutta de orden 4:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

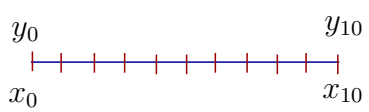
Donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f(t_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} f_1) \\ k_3 &= f(t_k + \tfrac{h}{2}, y_k + \tfrac{h}{2} f_2) \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + h f_3) \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3. Aproximar la solución del problema de valor inicial utilizando el método de Runge-Kutta de orden 4

$$y' = 2t - y, \quad y(0) = -1, \quad 0 \le t \le 1$$

Solución.



$$\begin{aligned} h &= \tfrac{1-0}{10}=0.1 \\ f(t_i, y_i) &= 2t_i - y_i \\ \text{Para } i &= 0 \end{aligned}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{(0.1)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

$k_1=$ $f(0,-1)$=2(0)-(-1)=1

$k_2=$ $f(0+\frac{0.1}{2}, -1+\frac{0.1}{2}(1))$= f(0.05,-0.95)= 2(0.05)-(-0.95)=1.05

$k_3=$ $f(0+\frac{0.1}{2}, -1+\frac{0.1}{2}(1.05))$= f(0.05,-0.9475)= 2(0.05)- (-0.9475)= 1.0475

$k_4=$ $f(0+0.1, -1+(0.1)(1.0475))$= f(0.1,-0.89525)= 1.09525

$$y_1 = -1 + \frac{(0.1)(1 + 2(1.05) + 2(1.0475) + 1.09525)}{6} = \text{-0.8951625}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } i &= 1 \\ t_1 &= t_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1 \\ f(t_1, y_i) &= 2t_1 - y_1 \end{aligned}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{(0.1)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}$$

$k_1=$ $f(0.1, \text{-0.8951625})$=2(0.1)-(-0.895162)=1.095163

$k_2=$ $f(0.1+\frac{0.1}{2}, \text{-0.895162}+\frac{0.1}{2}(1.095163))$= f(0.15,-0.840404)= 2(0.15)-(-0.840404)=1.140404

$k_3=$ $f(0.1+\frac{0.1}{2}, \text{-0.895162}+\frac{0.1}{2}(1.140404))$= f(0.15,-0.838142)= 2(0.15)- (-0.838142)= 1.138142

$k_4=$ $f(0.1+0.1, \text{-0.895162}+(0.1)(1.138142))$= f(0.2,-0.781348)= 2(0.2)- (-0.781348)= 1.181348

$$y_1 = \text{-0.895162} + \frac{(0.1)(1.095163 + 2(1.140404) + 2(1.138142) + 1.181348)}{6} = \text{-0.781269}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} \text{Para } i &= 9 \\ t_{10} &= t_9 + h = 0.9 + 0.1 = 1 \\ f(t_{10}, y_{10}) &= 2t_{10} - y_{10} \end{aligned}$$

$$y_{10} = 0.206570 + \frac{(0.1)(1.593430 + 2(1.613759) + 2(1.612742) + 1.632156)}{6} = 0.36787977$$

Aplicando el Software Matlab

1. Crear un archivo m

   f1.m

```
function f=f1(t,y)
f=2*t-y;
```

2. Ingresar en la ventana de MATLAB lo siguiente:

```
>> rk2_4('f1',0,1,-1,10,4)
```

t	k1	k2	k3	k4	Exact	error
0.00	—	—	—	—	-1.000000	-1.0000000.00
0.10	1.000000	1.050000	1.047500	1.095250	-0.895162	-0.8951638.20e-008
0.20	1.095163	1.140404	1.138142	1.181348	-0.781269	-0.7812691.48e-007
0.30	1.181269	1.222206	1.220159	1.259253	-0.659182	-0.6591822.01e-007
0.40	1.259182	1.296222	1.294370	1.329745	-0.529680	-0.5296802.43e-007
0.50	1.329680	1.363196	1.361520	1.393528	-0.393469	-0.3934692.75e-007
0.60	1.393469	1.423796	1.422279	1.451241	-0.251188	-0.2511882.98e-007
0.70	1.451188	1.478629	1.477257	1.503462	-0.103414	-0.1034153.15e-007
0.80	1.503414	1.528244	1.527002	1.550714	0.049329	0.0493293.26e-007
0.90	1.550671	1.573137	1.572014	1.593469	0.206570	0.2065703.31e-007
1.00	1.593430	1.613759	1.612742	1.632156	0.367880	0.3678793.33e-007

2.6 Método de disparo lineal

Teorema 2.7. *Supongamos que la función f en el problema con valor en la frontera*

$$y'' = f(x, y, y), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

es continua en el conjunto

$$D = \{(x, y, y')|a \leq x \leq b, \ -\infty < y < \infty, \quad -\infty < y' < \infty\},$$

y que f_y y $f_{y'}$ también son continuas en D. Si

i) $f_y(x, y, y') > 0$ *para toda* $(x, y, y') \in D$, *y*

ii) existe una constante M, con

$$|f_y(x, y, y')| \leq M, \quad \textit{para toda} \quad (x, y, y') \in D,$$

entonces el problema con valor en la frontera tiene una solución única.

Corolario 2.1. *Si el problema lineal con valor en la frontera*

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

satisface

(i) $p(x)$, $q(x)$ *y* $r(x)$ *son continuas en* $[a, b]$.

(ii) $q(x) > 0$ *en* $[a, b]$.

entonces el problema tiene una solución única. ■

Para aproximar la solución única garantizada por el cumplimiento de las hipótesis del corolario (2.1), primero consideremos los problemas con valor inicial

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = 0, \tag{2.6}$$

y

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1. \tag{2.7}$$

El teorema (2.7) garantiza que, según las hipótesis del corolario (2.1) ambos problemas tienen una solución única. Si $y_1(x)$ denota la solución de (2.6) y si $y_2(x)$ denota la solución de (2.7), no es difícil de comprobar que

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x). \tag{2.8}$$

Entonces

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x)$$

y

$$y''(x) = y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(x)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} y'' &= p(x)y_1' + q(x)y_1 + r(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}(p(x)y_2' + q(x)y_2) \\ y'' &= p(x)\left((y_1' + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'\right) + q(x)\left(y_1 + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2\right) + r(x) \\ &= p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x). \end{aligned}$$

Más aún

$$y(a) = y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot 0 = \alpha$$

y

$$y(b) = y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(b) = y_1(b) + \beta - y_1(b) = \beta$$

Por tanto, $y(x)$ es la solución única a nuestro problema con valor en la frontera.

Desde el punto de vista gráfico el método se observa en la figura (2.1)

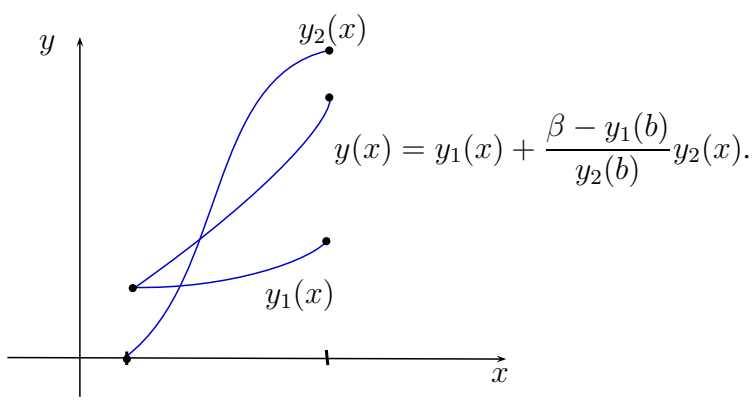


Figura 2.1: Método del disparo

Algoritmo utilizando el método de Runge-Kutta

Paso 1 Tome h= (b-a)/N;

$u_{1,0} = \alpha$

$u_{2,0} = 0$

$v_{1,0} = 0$

$v_{2,0} = 1$

Paso 2 Para i =0,..., N-1 hacer los pasos 3 y 4

Paso 3 Tome $x = a + ih$;

Paso 4 Tome $k_{1,1} = hu_{2,i}$;

$k_{1,2} = \ h[p(x)u_{2,i} + q(x)u_{1,i} + r(x)]$;

$k_{2,1} = \ h[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}]$;

$k_{2,2} = \ h[p(x + \frac{h}{2})(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}) + q(x + \frac{h}{2})(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,1}) + r(x + \frac{h}{2})]$;

$k_{3,1} = \ h[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}]$;

$k_{3,2} = \ h[p(x + \frac{h}{2})(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}) + q(x + \frac{h}{2})(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}) + r(x + \frac{h}{2})]$;

$k_{4,1} = \ h[u_{2,i} + k_{3,2}]$;

$k_{4,2} = \ h[p(x + h)(u_{2,i} + k_{3,2}) + q(x + h)(u_{1,i} + k_{3,1}) + r(x + h)]$;

$u_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6}[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}]$;

$u_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}]$;

$k'_{1,1} = hv_{2,i}$;

$k'_{1,2} = \ h[p(x)v_{2,i} + q(x)v_{1,i}]$;

$k'_{2,1} = \ h[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}]$;

$k'_{2,2} = \ h[p(x + \frac{h}{2})(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}) + q(x + \frac{h}{2})(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{1,1})]$;

$k'_{3,1} = \ h[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}]$;

$k'_{3,2} = \ h[p(x + \frac{h}{2})(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}) + q(x + \frac{h}{2})(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{2,1})]$;

$k'_{4,1} = \ h[v_{2,i} + k'_{3,2}]$;

$k'_{4,2} = \ h[p(x + h)(v_{2,i} + k'_{3,2}) + q(x + h)(v_{1,i} + k'_{3,1})]$;

$v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}]$;

$v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}]$;

Ejemplo 2.4. El problema con valor de frontera

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{sen(ln\ x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

Solución.

Primero consideremos los problemas con valor inicial de las ecuaciones (2.6) y (2.7)

$$y_1'' = -\frac{2}{x}y_1' + \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{sen(ln\ x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y_1(1) = 1, \quad y_1'(1) = 0 \tag{2.9}$$

y

$$y_2'' = -\frac{2}{x}y_2' + \frac{2}{x^2}y_2, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y_2(1) = 0, \quad y_2'(1) = 1 \tag{2.10}$$

1. Resolver la ecuación (2.9)

   Sea $\quad p(x_i) = -\dfrac{2}{x_i}; \quad q(x_i) = \dfrac{2}{x_i^2}; \quad r(x_i) = \dfrac{sen(ln\ x_i)}{x_i^2}; \quad \alpha = 1; \quad \beta = 2$

   Paso 1 $\quad$ Tome $h = \frac{2-1}{10}$ =0.1;

   $u_{1,0} = 1$

   $u_{2,0} = 0$

Paso 2 Para i =0 hacer los pasos 3 y 4

Paso 3 Tome $x = 1$;

Paso 4 $k_{1,1} = hu_{2,0}$=(0.1)(0)=0

$$k_{1,2} = h[p(1)u_{2,0} + q(1)u_{1,0} + r(1)]=(0.1)\Big[-\tfrac{2}{1}(0) + \tfrac{2}{1^2}(1) + \tfrac{sen(ln\ 1)}{1^2}\Big]=0.2$$

$$k_{2,1} = h[u_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,2}]= (0.1)[0 + \tfrac{1}{2}0.2] =0.01$$

$$\begin{aligned} k_{2,2} &= h[p(1 + \tfrac{0.1}{2})(u_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,2}) + q(x + \tfrac{0.1}{2})(u_{1,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,1}) + r(1 + \tfrac{0.1}{2})] \\ &= h[p(1.05)(0 + \tfrac{1}{2}(0.2)) + q(1.05)(1 + \tfrac{1}{2}(0)) + r(1.05)] \\ &= 0.1\Big[- \tfrac{2}{1.05}(0 + \tfrac{1}{2}(0.2)) + \tfrac{2}{(1.05)^2}(1 + \tfrac{1}{2}(0)) + \tfrac{sen(ln\ 1.05)}{(1.05)^2}\Big]= 0.16678193 \end{aligned}$$

$$k_{3,1} = h[u_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{2,2}]= (0.1)[0+\tfrac{1}{2}(0.16678193)]=0.008339$$

$$\begin{aligned} k_{3,2} &= h[p(1 + \tfrac{0.1}{2})(u_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{2,2}) + q(x + \tfrac{0.1}{2})(u_{1,0} + \tfrac{1}{2}k_{2,1}) + r(1 + \tfrac{0.1}{2})] \\ &= 0.1\Big[- \tfrac{2}{1.05}(0 + \tfrac{1}{2}(0.16678193)) + \tfrac{2}{(1.05)^2}(1 + \tfrac{1}{2}(0.01)) + \tfrac{sen(ln\ 1.05)}{(1.05)^2}\Big] \\ &= 0.1708526 \end{aligned}$$

$$k_{4,1} = h[u_{2,0} + k_{3,2}]= (0.1)[0+0.1708526]= 0.01708526$$

$$\begin{aligned} k_{4,2} &= h[p(1 + 0.1)(u_{2,0} + k_{3,2}) + q(1 + 0.1)(u_{1,0} + k_{3,1}) + r(1 + 0.1)] \\ &= h[p(1.1)(u_{2,0} + k_{3,2}) + q(1.1)(u_{1,0} + k_{3,1}) + r(1.1)] \\ &= (0.1)\Big[-\tfrac{2}{1.1}(0 + 0.1708526) + \tfrac{2}{(1.1)^2}(1 + 0.08339) + \tfrac{sen(ln\ 1.1)}{(1.1)^2}\ \Big] \\ &= 0.1434684 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= u_{1,0} + \tfrac{1}{6}[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}]; \\ &= 1+ \tfrac{1}{6}[0+2(0.01)+2(0.008339)+0.0170852] \\ &= 1.00896058 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2,1} &= u_{2,0} + \tfrac{1}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}]; \\ &= 0+ \tfrac{1}{6}[0.2+ 2(0.16678193)+2(0.1708526)+0.1434684] \\ &= 0.16978958 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_{1,1} \approx y_1(1.1) = 1.00896058$$

Para $i = 1$	Para $i = 2$	Para $i = 3$	Para $i = 4$
$u_{1,2}=$ 1.03245472	$u_{1,3}=$ 1.06674375	$u_{1,4}=$ 1.10928795	$u_{1,5}=$ 1.1583
$u_{2,2}=$ 0.29393896	$u_{2,3}=$ 0.38765182	$u_{2,4}=$ 0.46027851	$u_{2,5}=$ 0.51781758
Para $i = 5$	Para $i = 6$	Para $i = 7$	Para $i = 8$
$u_{1,6}=$ 1.21248372	$u_{1,7}=$ 1.27087455	$u_{1,8}=$ 1.33273852	$u_{1,9}=$ 1.39750618
$u_{2,6}=$ 0.56425894	$u_{2,7}=$ 0.6023407	$u_{2,8}=$ 0.63399388	$u_{2,9}=$ 0.66061332

Para $i = 9$
$k_{11} =$ 0.06606133
$k_{12}=$ 0.02446989
$k_{21}=$ 0.06728483
$k_{22}=$ 0.02251804
$k_{31}=$ 0.06718723
$k_{32}=$ 0.02265031
$k_{41}=$ 0.06832636
$k_{42}=$ 0.02088234
$u_{1,10}=$ 1.46472815
$u_{2,10}=$ 0.68322814

$$\Rightarrow u_{1,10} \approx y_1(2) = 1.46472815 \tag{2.11}$$

2. Resolver la ecuación (2.10)

   Sea $\quad p(x_i) = -\dfrac{2}{x_i}; \quad q(x_i) = \dfrac{2}{x_i^2}; \quad \alpha = 1; \quad \beta = 2$

   Paso 1 $\quad$ Tome $h = \frac{2-1}{10}$ =0.1;

   $v_{1,0} = 0$

   $v_{2,0} = 1$

Paso 2 Para i =0 hacer los pasos 3 y 4

Paso 3 Tome $x = 1$;

Paso 4 $k'_{1,1} = hv_{2,0}$=(0.1)(1)=0.1

$k'_{1,2} = h[p(1)v_{2,0} + q(1)v_{1,0}]$= (0.1)[$-\frac{2}{1}(1) + \frac{2}{1^2}(0)$]= -0.2

$k'_{2,1} = h[v_{2,0} + \frac{1}{2}k'_{1,2}]$= (0.1)[1 + $\frac{1}{2}$(-0.2)]= 0.09

$k'_{2,2} = h[p(1 + \frac{0.1}{2})(v_{2,0} + \frac{1}{2}k'_{1,2}) + q(x + \frac{h}{2})(v_{1,0} + \frac{1}{2}k'_{1,1})]$

$= (0.1)[p(1.05)(1 + \frac{1}{2}(-0.2)) + q(1.05)(0 + \frac{1}{2}(0.1))]$

$= (0.1)[-\frac{2}{1.05}(1 + \frac{1}{2}(-0.2)) + \frac{2}{(1.05)^2}(0 + \frac{1}{2}(0.1))]$

= -0.1623582766

$k'_{3,1} = h[v_{2,0} + \frac{1}{2}k'_{2,2}]$= (0.1)[1+$\frac{1}{2}$(-0.1623582766)]= 0.091882086

$k'_{3,2} = h[p(1 + \frac{0.1}{2})(v_{2,0} + \frac{1}{2}k'_{2,2}) + q(1 + \frac{0.1}{2})(v_{1,0} + \frac{1}{2}k'_{2,1})]$

$= (0.1)[-\frac{2}{1.05}(1 + \frac{1}{2}(-0.1623582766)) + \frac{2}{(1.05)^2}(0 + \frac{1}{2}(0.09))]$

= -0.1668502321

$k'_{4,1} = h[v_{2,0} + k'_{3,2}]$= (0.1)[1- 0.1668502321]= 0.08331497679

$k'_{4,2} = h[p(1 + 0.1)(v_{2,0} + k'_{3,2}) + q(1 + 0.1)(v_{1,0} + k'_{3,1})]$

$= (0.1)[p(1.1)(v_{2,0} + k'_{3,2}) + q(1.1)(v_{1,0} + k'_{3,1})]$

$= (0.1)[-\frac{2}{1.1}(1 - 0.1668502321) + \frac{2}{(1.1)^2}(0 + 0.091882086)]$

= -0.1362946543

$v_{1,1} = v_{1,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}]$

$= 0 + \frac{1}{6}$[0.1 + 2(0.09)+2(0.091882086) + 0.08331497679]

= 0.09117986

$v_{2,1} = v_{2,0} + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}]$;

= 1 + $\frac{1}{6}$[-0.2 + 2(-0.1623582766)+2(-0.1668502321) -0.1362946543]

= 0.8342147214

$$\Rightarrow v_{1,1} \approx y_2(1.1) = 0.09117986$$

$$\Rightarrow v_{1,10} \approx y_2(2) = 0.58332538 \tag{2.12}$$

Para $i = 1$	Para $i = 2$	Para $i = 3$	Para $i = 4$
$v_{1,2}$= 0.16851175	$v_{1,3}$= 0.23608704	$v_{1,4}$= 0.29659067	$v_{1,5}$= 0.3518479
$v_{2,2}$= 0.71914158	$v_{2,3}$= 0.63678276	$v_{2,4}$= 0.57629214	$v_{2,5}$= 0.53086777
Para $i = 5$	Para $i = 6$	Para $i = 7$	Para $i = 8$
$v_{1,6}$= 0.40311694	$v_{1,7}$= 0.45131839	$v_{1,8}$= 0.49711136	$v_{1,9}$= 0.54098927
$v_{2,6}$= 0.49609648	$v_{2,7}$= 0.46902975	$v_{2,8}$= 0.44764655	$v_{2,9}$= 0.43053008

Para $i = 9$
$k_{1,1}$= 0.04305301
$k_{1,2}$= -0.01534725
$k_{2,1}$= 0.04228565
$k_{2,2}$= -0.01378326
$k_{3,1}$= 0.04236384
$k_{3,2}$= -0.01388365
$k_{4,1}$= 0.04166464
$k_{4,2}$= -0.01249699
$v_{1,10}$= 0.58332538
$v_{2,10}$= 0.41666707

Reemplazando las ecuaciones (2.12) y (2.11) en (2.8)

$$w_i \approx y(x_i) = y_1(x_i) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x_i). \tag{2.13}$$

$$w_i \approx y(x_i) = y_1(x_i) + \frac{2 - 1.46472815}{0.58332538} y_2(x_i).$$

$$\Rightarrow w_1 = 1.00896058 + \frac{2 - 1.46472815}{0.58332538}(0.09117986) = 1.09262917$$

Reemplazando todo los $u_{1,i}$ y los $v_{1,i}$ en la ecuación (2.13) se obtiene:

$w_0=$	1.00000000
$w_1=$	1.09262917
$w_2=$	1.18708471
$w_3=$	1.28338227
$w_4=$	1.38144589
$w_5=$	1.48115939
$w_6=$	1.58239245
$w_7=$	1.68501396
$w_8=$	1.78889854
$w_9=$	1.89392951
$w_{10}=$	2.00000000

2.7 Método de diferencias finitas para problemas lineales

El método de diferencias finitas para el problema de valor de frontera de segundo orden,

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \\ a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta. \end{cases} \tag{2.14}$$

se va a utilizar las aproximaciones del cociente de diferencias para aproximar tanto a y' como a y". Primero seleccionamos un entero $N > 0$ y dividimos el intervalo [a,b] en $N+1$ subintervalos, donde $h = \frac{b-a}{N+1}$. Al escoger h de este modo, se facilita la aplicación de un algoritmo matricial, con el cual se resuelve un sistema lineal que contenga una matriz de $N \times N$.

En los puntos de red del interior, x_i para $i = 1, 2, \ldots, N$, la ecuación diferencial a aproximar es

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i). \tag{2.15}$$

Utilizando el tercer polinomio de Taylor alrededor de x_i evaluada en x_{i+1} y x_{i-1}, tenemos, suponiendo que $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$,

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+), \tag{2.16}$$

para alguna ξ_i^+ en (x_i, x_{i+1}), y

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+), \tag{2.17}$$

para alguna ξ_i^- en (x_i, x_{i+1}), si se suman las ecuaciones (2.16) y (2.17) se obtiene

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + \frac{h^4}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)], \tag{2.18}$$

despejando $y''(x_i)$ se obtienes

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) - 2y(x_i) - \frac{h^4}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)] = h^2y''(x_i)$$

agrupando y dividiendo entre h^2

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)]$$

Aplicando el teorema del valor intermedio para simplificar aún más esta expresión y transformarla en

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24}y^{(4)}(\xi_i) \tag{2.19}$$

para alguna ξ_i en (x_{i-1}, x_{i+1}). A esto se le llama **fórmula de las diferencias centradas** para $y''(x_i)$

De manera semejante se obtiene $y'(x_i)$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(\eta_i) \tag{2.20}$$

para alguna η_i en (x_i, x_{i+1}), y

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(\eta_i) \tag{2.21}$$

para alguna η_i en (x_i, x_{i+1}), si se restan las ecuaciones (2.20) y (2.21) se obtiene

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2hy'(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(\eta_i), \tag{2.22}$$

Despejando $y'(x_i)$

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) - \frac{2h^3}{6}y'''(\eta_i) = 2hy'(x_i)$$

Dividiendo entre $2h$

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i) \tag{2.23}$$

para alguna η_i en (x_i, x_{i+1}).

Reemplazando las ecuaciones (2.23) y (2.19) en la ecuación (2.15)

$$\frac{1}{h^2}[y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})]-\tfrac{h^2}{24}y^{(4)}(\xi_i) = p(x_i)\left[\tfrac{1}{2h}[y(x_{i+1})-y(x_{i-1})]-\tfrac{h^2}{6}y'''(\eta_i)\right]+q(x_i)y(x_i)+r(x_i)$$

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x_i)\left[\tfrac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}\right]+q(x_i)y(x_i)+r(x_i)-\tfrac{h^2}{12}\left[2p(x_i)y'''(\eta_i)-y^{(4)}(\xi_i)\right] \tag{2.24}$$

Un método de diferencias finitas con error de truncamiento de orden $O(h^2)$ se obtiene empleando esta ecuación junto con las condiciones de frontera $y(a) = \alpha$ y $y(b) = \beta$ para definir

$$w_0 = \alpha, \qquad w_{N+1} = \beta$$

y

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = p(x_i)\left[\tfrac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}\right] + q(x_i)w_i + r(x_i)$$

$$w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} = \tfrac{h}{2}p(x_i)[w_{i+1} - w_{i-1}] + h^2q(x_i)w_i + h^2r(x_i)$$

$$w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} - \tfrac{h}{2}p(x_i)w_{i+1} + \tfrac{h}{2}p(x_i)w_{i-1} - h^2q(x_i)w_i = h^2r(x_i)$$

$$(1 + \tfrac{h}{2}p(x_i))w_{i-1} - (2 + h^2q(x_i))w_i + (1 - \tfrac{h}{2}p(x_i))w_{i+1} = h^2r(x_i) \tag{2.25}$$

para toda $i = 1, 2, \cdots, N$.

En la forma que consideremos, la ecuación (2.25) y se escribe como:

$$-(1 + \tfrac{h}{2}p(x_i))w_{i-1} + (2 + h^2q(x_i))w_i - (1 - \tfrac{h}{2}p(x_i))w_{i+1} = -h^2r(x_i) \tag{2.26}$$

y el sistema de ecuaciones resultante se expresa en forma de la matriz tridiagonal de $N \times N$

$$Aw = b \tag{2.27}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 + h^2q(x_1) & -1 + \dfrac{h}{2}p(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2}p(x_2) & 2 + h^2q(x_2) & -1 + \frac{h}{2}p(x_2) & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 + \frac{h}{2}p(x_{N-1}) \\ 0 & \cdots & 0 & -1 - \frac{h}{2}p(x_N) & 2 + h^2q(x_N) \end{bmatrix}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{bmatrix} \quad y \quad b = \begin{bmatrix} -h^2 r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)w_0 \\ -h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 r(x_{N-1}) \\ -h^2 r(x_N) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_N)\right)w_{N+1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.5. El problema con valor de frontera

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{sen(ln\ x)}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2$$

Solución.

$p(x_i) = -\dfrac{2}{x_i}$; $q(x_i) = \dfrac{2}{x_i^2}$; $r(x_i) = \dfrac{sen(ln\ x_i)}{x_i^2}$

Para $N = 9$ y $h = \dfrac{2-1}{9+1} = \dfrac{1}{10}$=0.1

Utilizando el algoritmo de la ecuación (2.26)

$$-(1 + \tfrac{h}{2}p(x_i))w_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i))w_i - (1 - \tfrac{h}{2}p(_i))w_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

Para x_1=1.1, $i = 1$, h =0.1 y $w_0 = 1$

$$-\left(1 + \tfrac{0.1}{2}p(1.1)\right)(1) + \left(2 + (0.1)^2 q(1.1)\right)w_1 - \left(1 - \tfrac{0.1}{2}p(1.1)\right)w_2 = -(0.1)^2 r(1.1)$$

$$-0.90909090 + 2.01652892w_1 - 1.09090909w_2 = -0.00078649$$

$$2.01652892w_1 - 1.09090909w_2 = 0.90830441 \tag{2.28}$$

Para x_1=1.2, $i = 2$, h =0.1

$$-\left(1 + \tfrac{0.1}{2}p(1.2)\right)w_1 + \left(2 + (0.1)^2 q(1.2)\right)w_2 - \left(1 - \tfrac{0.1}{2}p(1.2)\right)w_3 = -(0.1)^2 r(1.2)$$

$$-0.91666667w_1 + 2.01388889w_2 - 1.08333333w_3 = -0.00125911 \tag{2.29}$$

Para x_1=1.3, $i = 3$, h =0.1

$$-\Big(1+\tfrac{0.1}{2}p(1.3)\Big)w_2+\Big(2+(0.1)^2q(1.3)\Big)w_3-\Big(1-\tfrac{0.1}{2}p(1.3)\Big)w_4=-(0.1)^2r(1.3)$$

$$-0.92307692w_2+2.01183432w_3-1.07692307w_4=-0.00153470 \tag{2.30}$$

Para x_1=1.4, $i = 4$, h =0.1

$$-\Big(1+\tfrac{0.1}{2}p(1.4)\Big)w_3+\Big(2+(0.1)^2q(1.4)\Big)w_4-\Big(1-\tfrac{0.1}{2}p(1.4)\Big)w_5=-(0.1)^2r(1.4)$$

$$-0.92857142w_3+2.01020408w_4-1.07142857w_5=-0.00168448 \tag{2.31}$$

Para x_1=1.5, $i = 5$, h =0.1

$$-\Big(1+\tfrac{0.1}{2}p(1.5)\Big)w_4+\Big(2+(0.1)^2q(1.5)\Big)w_5-\Big(1-\tfrac{0.1}{2}p(1.5)\Big)w_6=-(0.1)^2r(1.5)$$

$$-0.93333333w_4+2.00888888w_5-1.06666666w_6=-0.00175309 \tag{2.32}$$

Para x_1=1.6, $i = 6$, h =0.1

$$-\Big(1+\tfrac{0.1}{2}p(1.6)\Big)w_5+\Big(2+(0.1)^2q(1.6)\Big)w_6-\Big(1-\tfrac{0.1}{2}p(1.6)\Big)w_7=-(0.1)^2r(1.6)$$

$$-0.93750000w_5+2.00781250w_6-1.06250000w_7=-0.00176909 \tag{2.33}$$

Para x_1=1.7, $i = 7$, h =0.1

$$-\Big(1+\tfrac{0.1}{2}p(1.7)\Big)w_6+\Big(2+(0.1)^2q(1.7)\Big)w_7-\Big(1-\tfrac{0.1}{2}p(1.7)\Big)w_8=-(0.1)^2r(1.7)$$

$$-0.94117647w_6+2.00692041w_7-1.05882352w_8=-0.00175112 \tag{2.34}$$

Para x_1=1.8, $i = 8$, h =0.1

$$-\Big(1+\tfrac{0.1}{2}p(1.8)\Big)w_7+\Big(2+(0.1)^2q(1.8)\Big)w_8-\Big(1-\tfrac{0.1}{2}p(1.8)\Big)w_9=-(0.1)^2r(1.8)$$

$$-0.94444444w_7 + 2.006172840w_8 - 1.05555555w_9 = -0.00171148 \tag{2.35}$$

Para x_1=1.9, $i = 9$, h =0.1, w_{10}=2

$$-\Big(1 + \tfrac{0.1}{2}p(1.9)\Big)w_8 + \Big(2 + (0.1)^2 q(1.9)\Big)w_9 - \Big(1 - \tfrac{0.1}{2}p(1.9)\Big)w_{|0} = -(0.1)^2 r(1.9)$$

$$-0{,}9473684w_8 + 2{,}00554016w_9 - 1{,}05263157(2) = -0.00171148$$

$$-0.9473684w_8 + 2.00554016w_9 = 2.10355166 \tag{2.36}$$

Se forma un sistema de ecuaciones desde la ecuación (2.28) hasta (2.36).

Matricialmente se obtiene:

$$Aw = b$$

$$\begin{bmatrix} 2.01652892 & -1.09090909 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.91666667 & 2.01388889 & -1.08333333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.92307692 & 2.01183432 & -1.07692307 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.92857142 & 2.01020408 & -1.07142857 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.93333333 & 2.00888888 & -1.06666666 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.93750000 & 2.00781250 & -1.06250000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.94117647 & 2.00692041 & -1.05882352 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.94444444 & 2.006172840 & -1.05555555 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9473684 & 2.00554016 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.90830441 \\ -0.00125911 \\ 0.00153470 \\ -0.00168448 \\ -0.00175309 \\ -0.00176909 \\ -0.00175112 \\ -0.00171148 \\ 2.10355166 \end{bmatrix}$$

Aplicando el Software Matlab

1. Ingresar la matriz A

```
>> A=[2.01652892 -1.09090909 0 0 0 0 0 0 0;
-0.91666667 2.01388889 -1.08333333 0 0 0 0 0 0;
0 -0.92307692 2.01183432 -1.07692307 0 0 0 0 0 ;
0 0 -0.92857142 2.01020408 -1.07142857 0 0 0 0;
0 0 0 -0.93333333 2.00888888 -1.06666666 0 0 0;
0 0 0 0 -0.93750000 2.00781250 -1.06250000 0 0;
```

```
0 0 0 0 0 -0.94117647 2.00692041 -1.05882352 0;
0 0 0 0 0 0 -0.94444444 2.006172840 -1.05555555;
0 0 0 0 0 0 0 -0.9473684 2.00554016];
```

2. Ingresar la matriz b

```
>>b=[0.90830441;-0.00125911;-0.00153470;-0.00168448;
     -0.00175309;-0.00176909;-0.00175112;-0.00171148;
     2.10355166];
```

```
>> w=inv(A)*b
```

```
w =
   1.09259263
   1.18702854
   1.28331643
   1.38137637
   1.48108981
   1.58232501
   1.68494995
   1.78883871
   1.89387428
```

El resultado se obtiene

$$\begin{bmatrix} w_1 = 1.09259263 \\ w_2 = 1.18702854 \\ w_3 = 1.28331643 \\ w_4 = 1.38137637 \\ w_5 = 1.48108981 \\ w_6 = 1.58232501 \\ w_7 = 1.68494995 \\ w_8 = 1.78883871 \\ w_9 = 1.89387428 \end{bmatrix}$$

Capítulo 3:

Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no Lineales Asistida con MATLAB

3.1 Método del disparo para problemas no lineal

El método del disparo no lineal con valor de frontera de segundo orden

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \tag{3.1}$$

es parecida a la del método de disparo lineal, salvo que la solución de un problema no lineal no puede expresarse como una combinación lineal de soluciones de dos problemas de valor inicial. En su lugar, aproximamos la solución del problema del valor de frontera mediante las soluciones de una sucesión de problemas de valor inicial de la forma.

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t. \tag{3.2}$$

Esto lo hacemos escogiendo los parámetros $t = t_k$ de tal forma que

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta,$$

donde $y(x, t_k)$ denota la solución al problema con valor inicial (3.2) con $t = t_k$ y $y(x)$ denota la solución al problema con valor de frontera (3.1).

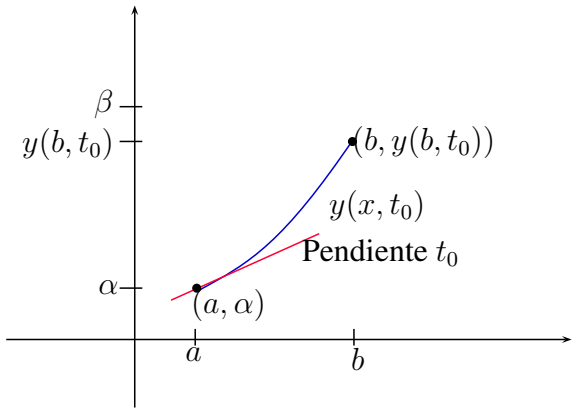


Figura 3.1: Método del disparo no lineal

Esta técnica se conoce con el nombre de método del disparo, por la analogía con el procedimiento de dispararles a objetos situados en un blanco fijo. Véase La figura (3.1). Comenzamos con un parámetro t_0 que determina la elevación inicial a la cual se le dispara al objetivo desde el punto (a, α) y a lo largo de la curva descrita por la solución al problema de valor inicial:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t_0.$$

Si $y(b, t_0)$ no está suficientemente cerca de β, corregimos la aproximación seleccionando las elevaciones t_1, t_2, y así sucesivamente, hasta que $y(b, t_k)$ esté bastante cerca de acertar en el blanco β. Véase la Figura (3.2)

Para determinar los parámetros t_k, supongamos que un problema de valor de frontera de tipo (3.1) satisface las hipótesis del teorema (2.7). Si $y(x, t)$ denota la solución del problema de valor inicial (3.2), el problema consistirá en determinar t tal que

$$y(b, t) - \beta = 0. \tag{3.3}$$

Esta es una ecuación no lineal por lo se puede resolver por varios métodos. Por lo que utilizaremos el Método de Newton

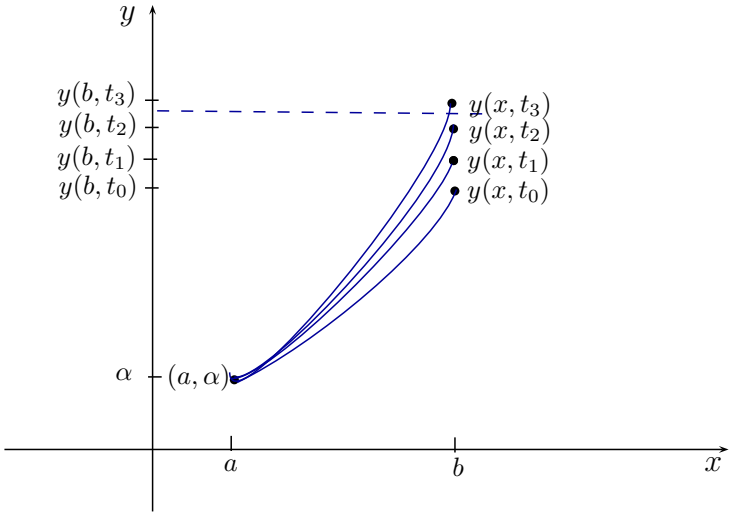


Figura 3.2: Método de Newton

Para generar la sucesión $\{t_k\}$ con el Método de Newton, que es más poderoso, sólo necesitamos una aproximación inicial t_0. Sin embargo, la iteración tiene la forma

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b,t_{k-1}) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b,t_{k-1})} \tag{3.4}$$

Se requiere conocer $\frac{dy}{dt}(b,t_{k-1})$. Esto presenta un problema porque no se conoce una representación explícita de $y(b,t)$; conocemos sólo los valores $y(b,t_0), y(b,t_1), \cdots, y(b,t_{k-1})$. Supóngase que reescribimos el problema de valor inicial (3.2), haciendo énfasis en que la solución se basa tanto en x como en el parámetro t:

$$y''(x,t) = f(x, y(x,t), y'(x,t)), \quad a \le x \le b, \quad y(a,t) = \alpha, \quad y'(a,t) = t. \tag{3.5}$$

Hemos conservado la notación prima para indicar la derivada respecto a x. Puesto que necesitamos determinar $\frac{dy}{dt}(b,t)$ cuando $t = t_{k-1}$, primero tomamos la derivada parcial de (3.5) respecto a t. Esto significa que

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial y''}{\partial t}(x,t) &= \tfrac{\partial f}{\partial t}(x, y(x,t), y'(x,t)) \\
&= \tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y(x,t), y'(x,t))\tfrac{\partial x}{\partial t} + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y(x,t), y'(x,t))\tfrac{\partial y}{\partial t}(x,t) \\
&\quad + \tfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x,t), y'(x,t))\tfrac{\partial y'}{\partial t}(x,t).
\end{aligned}$$

Dado que x y t son independientes, $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ y

$$\tfrac{\partial y''}{\partial t}(x,t) = \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y(x,t), y'(x,t))\tfrac{\partial y}{\partial t}(x,t) + \tfrac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x,t), y'(x,t))\tfrac{\partial y'}{\partial t}(x,t), \tag{3.6}$$

con $a \leq x \leq b$. Las condiciones iniciales dan

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a,t) = 0 \quad y \quad \frac{\partial y''}{\partial t}(a,t) = 1$$

Si simplificamos la notación usando $z(x,t)$ para denotar $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ y si suponemos que el orden de derivación de x y t puede invertirse, con las condiciones iniciales (3.6) se convierte en el problema de valor inicial

$$\frac{\partial z''}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')z(x,t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x,y,y')z'(x,t), \tag{3.7}$$

$$a \leq x \leq b, \quad z(a,t) = 0, \quad z'(a,t) = 1.$$

Así pues, el método de Newton requiere que los dos problemas de valor inicial sean resueltos en cada iteración, (3.5) y (3.7). Entonces, conforme a la ecuación (3.4),

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b,t_{k-1}) - \beta}{z(b,t_{k-1})} \tag{3.8}$$

Algoritmo utilizando el método de Runge-Kutta

$$y'' = f(x,y,y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Paso 1: Tome

$$\begin{aligned} h &= \tfrac{b-a}{N} \\ k &= 1 \\ TK &= \tfrac{\beta-\alpha}{b-a} \end{aligned}$$

Paso 2: Mientras ($k \leq M$) haga los pasos 3-10

Paso 3: Tome

$$\begin{aligned} w_{1,0} &= \alpha; \\ w_{2,0} &= TK; \\ u_1 &= 0; \\ u_2 &= 1; \end{aligned}$$

Paso 4: Para $i = 1, \ldots, N+1$ haga los pasos 5 y 6.

(El método de Runge-Kutta para sistemas se utiliza en los pasos 5 y 6.)

Paso 5: Tome $x = a + (i-1)h$.

Paso 6: Tome

$$
\begin{aligned}
k_{1,1} &= hw_{2,i-1};\\
k_{1,2} &= hf(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1});\\
k_{2,1} &= h(w_{2,i-1} + \tfrac{1}{2}k_{1,2});\\
k_{2,2} &= hf(x + \tfrac{h}{2}, w_{1,i-1} + \tfrac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,i-1} + \tfrac{1}{2}k_{1,2});\\
k_{3,1} &= h(w_{2,i-1} + \tfrac{1}{2}k_{2,2});\\
k_{3,2} &= hf(x + \tfrac{h}{2}, w_{1,i-1} + \tfrac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,i-1} + \tfrac{1}{2}k_{2,2});\\
k_{4,1} &= h(w_{2,i-1} + k_{3,2});\\
k_{4,2} &= hf(x + h, w_{1,i-1} + k_{3,1}, w_{2,i-1} + k_{3,2});\\
w_{1,i} &= w_{1,i-1} + \tfrac{k_{1,1}+2k_{2,1}+2k_{3,1}+k_{4,1}}{6};\\
w_{2,i} &= w_{2,i-1} + \tfrac{k_{1,2}+2k_{2,2}+2k_{3,2}+k_{4,2}}{6};\\
k'_{1,1} &= hu_2;\\
k'_{1,2} &= h[f_y(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_1 + f_{y'}(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})u_2];\\
k'_{2,1} &= h(u_2 + \tfrac{1}{2}k'_{1,2});\\
k'_{2,2} &= h[f_y(x + \tfrac{h}{2}, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \tfrac{1}{2}k'_{1,1}) + f_{y'}(x + \tfrac{h}{2}, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + \tfrac{1}{2}k'_{1,2})];\\
k'_{3,1} &= h[u_2 + \tfrac{1}{2}k'_{2,2}];\\
k'_{3,2} &= h[f_y(x + \tfrac{h}{2}, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \tfrac{1}{2}k'_{2,1}) + f_{y'}(x + \tfrac{h}{2}, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + \tfrac{1}{2}k'_{2,2})];\\
k'_{4,1} &= h[u_2 + k'_{3,2}];\\
k'_{4,2} &= h[f_y(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + k'_{3,1}) + f_{y'}(x + h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + k'_{3,2})];\\
u_1 &= u_1 + \tfrac{k'_{1,1}+2k'_{2,1}+2k'_{3,1}+k'_{4,1}}{6};\\
u_2 &= u_2 + \tfrac{k'_{1,2}+2k'_{2,2}+2k'_{3,2}+k'_{4,2}}{6};
\end{aligned}
$$

Paso 7: Si $|w_{1,N+1} - \beta| \leq Tol$, entonces haga los pasos 8 y 9.

Paso 8: Para $i = 0, 1, \ldots, N+1$

entonces $x = a + ih$

SALIDA $(x, w_{1,i}, w_{2,i})$

Paso 9: Procedimiento terminado

Parar

<u>Paso 10</u>: Tome

$$TK = TK - \frac{w_{1,N+1} - \beta}{u_1};$$

(El método de Newton se utiliza para calcular TK.)

$k = k + 1$.

Ejemplo 3.1. Resolver el problema no lineal de valor de frontera

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, \quad y(3) = \frac{43}{3}$$

Solución.

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, \quad y'(1) = t_k$$

y

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'} z' = -\frac{1}{8}(y'z + yz'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad z(1) = 0, \quad z'(1) = 1$$

$$f(x, y, y') = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy')$$

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y} = -\frac{1}{8}y'$$

$$\frac{\partial f(x, y, y')}{\partial y'} = -\frac{1}{8}y$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 3 \\ \alpha &= 17 \\ \beta &= \tfrac{43}{3} \\ N &= 20 \end{aligned}$$

<u>Paso 1</u>: Tome

$$\begin{aligned} h &= \tfrac{3-1}{20} = 0.1 \\ k &= 1 \\ TK &= \tfrac{\frac{43}{3} - 17}{3-1} = -1.333333 \end{aligned}$$

<u>Paso 2</u>: Mientras $(k \leq M)$ haga los pasos 3-10

<u>Paso 3</u>: Tome

$$\begin{aligned} w_{1,0} &= \alpha{=}17; \\ w_{2,0} &= -1.333333 \\ u_1 &= 0; \\ u_2 &= 1; \end{aligned}$$

<u>Paso 4</u>: Para $i = 1, \ldots, 21$

Para $i = 1$

<u>Paso 5</u>: Tome $x = a + (i-1)h = 1 + (1-1)(0.1) = 1$

<u>Paso 6</u>: Tome

$$\begin{aligned}
k_{1,1} &= hw_{2,0}{=}(0.1)(-1.333333) = \textbf{-0.133333} \\
k_{1,2} &= hf(1, w_{1,0}, w_{2,0}) = (0.1)f(1, 17, -1.333333) = (0.1)\Big[\tfrac{1}{8}(32 + 2(1)^3 - (17)(-1.333333)\Big] \\
&= \textbf{0.708333} \\
k_{2,1} &= h(w_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,2}) = (0.1)(-1.333333 + \tfrac{1}{2}(0.708333)) = \textbf{-0.097917} \\
k_{2,2} &= hf(1 + \tfrac{0.1}{2}, w_{1,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{1,2}) \\
&= (0.1)f\big(1 + \tfrac{0.1}{2}, 17 + \tfrac{1}{2}(-0.133333), -1.333333 + \tfrac{1}{2}(0.708333)\big) \\
&= (0.1)f(1.05), 16.933333, -0.979167) \\
&= (0.1)\Big[\tfrac{1}{8}(32 + 2(1.05)^3 - (16.933333)(-0.979167)\Big] = \textbf{0.636198} \\
k_{3,1} &= h(w_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{2,2}) = (0.1)(-1.333333 + \tfrac{1}{2}(0.636198)) = \textbf{-0.101523}; \\
k_{3,2} &= hf(1 + \tfrac{h}{2}, w_{1,0} + \tfrac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,0} + \tfrac{1}{2}k_{2,2}) \\
&= (0.1)f\big(1 + \tfrac{0.1}{2}, 17 + \tfrac{1}{2}(-0.097917), -1.333333 + \tfrac{1}{2}(0.636198)\big) \\
&= (0.1)f(1.05), 16.951042, -1.015235) \\
&= (0.1)\Big[\tfrac{1}{8}(32 + 2(1.05)^3 - (16.951042)(-1.015235)\Big] = \textbf{0.644057} \\
k_{4,1} &= h(w_{2,0} + k_{3,2}) = (0.1)(-1.333333 + 0.644057) = \textbf{-0.068928} \\
k_{4,2} &= hf(1 + h, w_{1,0} + k_{3,1}, w_{2,0} + k_{3,2}) \\
&= (0.1)f\big(1 + 0.1, 17 - 0.101523, -1.333333 + 0.644057)\big) \\
&= (0.1)f(1.1), 16.898477, -0.689277) \\
&= (0.1)\Big[\tfrac{1}{8}(32 + 2(1.1)^3 - (16.898477)(-0.689277)\Big] = \textbf{0.578872}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w_{1,1} &= w_{1,0} + \tfrac{k_{1,1}+2k_{2,1}+2k_{3,1}+k_{4,1}}{6} \\
&= 17 + \tfrac{-0.133333+2(-0.097917)+2(-0.101523)+(-0.068928)}{6} = \mathbf{16.899810} \\
w_{2,1} &= w_{2,0} + \tfrac{k_{1,2}+2k_{2,2}+2k_{3,2}+k_{4,2}}{6}; \\
&= -1.333333 + \tfrac{0.708333+2(0.636198)+2(0.644057)+0.578872}{6} = \mathbf{-0.692048} \\
k'_{1,1} &= hu_2 = (0.1)(1) = \mathbf{0.1} \\
k'_{1,2} &= h[f_y(1, w_{1,0}, w_{2,0})u_1 + f_{y'}(1, w_{1,0}, w_{2,0})u_2] \\
&= h[f_y(1, 17, -1.333333)(0) + f_{y'}(1, 17, -1.333333)(1)] \\
&= (0.1)[-\tfrac{1}{8}(-1.333333)(0) + (-\tfrac{1}{8}(17)(1))] = \mathbf{-0.2125} \\
k'_{2,1} &= h(u_2 + \tfrac{1}{2}k'_{1,2}) = (0.1)(1 + \tfrac{1}{2}(-0.2125)) = \mathbf{0.089375} \\
k'_{2,2} &= h[f_y(1 + \tfrac{0.1}{2}, w_{1,0}, w_{2,0})(u_1 + \tfrac{1}{2}k'_{1,1}) + f_{y'}(1 + \tfrac{0.1}{2}, w_{1,0}, w_{2,0})(u_2 + \tfrac{1}{2}k'_{1,2})] \\
&= (0.1)[f_y(1.05, 17, -1.333333)(0 + \tfrac{1}{2}(0.1)) + f_{y'}(1.05, 17, -1.333333)(1 + \tfrac{1}{2}(-0.2125))] \\
&= (0.1)[-\tfrac{1}{8}(-1.333333)(0 + \tfrac{1}{2}(0.1)) + (-\tfrac{1}{8})(17)(1 + \tfrac{1}{2}(-0.2125))] \\
&= \mathbf{-0.18909} \\
k'_{3,1} &= h[u_2 + \tfrac{1}{2}k'_{2,2}] = (0.1)[1 + \tfrac{1}{2}(-0.18909)] = \mathbf{0.090546} \\
k'_{3,2} &= h[f_y(1 + \tfrac{0.1}{2}, w_{1,0}, w_{2,0})(u_1 + \tfrac{1}{2}k'_{2,1}) + f_{y'}(1 + \tfrac{0.1}{2}, w_{1,0}, w_{2,0})(u_2 + \tfrac{1}{2}k'_{2,2})] \\
&= (0.1)[f_y(1.05, 17, -1.333333)(0 + \tfrac{1}{2}(0.089375)) + f_{y'}(1.05, 17, -1.333333)(1 + \tfrac{1}{2}(-0.18909))] \\
&= (0.1)[-\tfrac{1}{8}(-1.333333)(0 + \tfrac{1}{2}(0.089375)) + (-\tfrac{1}{8})(17)(1 + \tfrac{1}{2}(-0.18909))] \\
&= \mathbf{-0.191665} \\
k'_{4,1} &= h[u_2 + k'_{3,2}] = (0.1)[1 - 0.191665] = \mathbf{0.080834} \\
k'_{4,2} &= h[f_y(1 + 0.1, w_{1,0}, w_{2,0})(u_1 + k'_{3,1}) + f_{y'}(1 + 0.1, w_{1,0}, w_{2,0})(u_2 + k'_{3,2})] \\
&= (0.1)[f_y(1.1, 17, -1.333333)(0 + 0.090546) + f_{y'}(1.1, 17, -1.333333)(1 + (-0.191665)] \\
&= (0.1)[-\tfrac{1}{8}(-1.333333)(0 + 0.090546) + (-\tfrac{1}{8})(17)(1 - 0.191665)] \\
&= \mathbf{-0.170262} \\
u_1 &= u_1 + \tfrac{k'_{1,1}+2k'_{2,1}+2k'_{3,1}+k'_{4,1}}{6} \\
&= 0 + \tfrac{0.1+2(0.089375)+2(0.090546)+0.080834}{6} \\
&= \mathbf{0.090112} \\
u_2 &= u_2 + \tfrac{k'_{1,2}+2k'_{2,2}+2k'_{3,2}+k'_{4,2}}{6} \\
&= 1 + \tfrac{-0.2125+2(-0.18909)+2(-0.191665)+(-0.170262)}{6} \\
&= \mathbf{0.809289}
\end{aligned}
$$

Hallando el nuevo TK

$$TK = TK - \frac{w_{1,1} - \beta}{u_1}$$

$$TK = -1.333333 - \frac{16.899810 - \frac{43}{3}}{0.090112} = -29.814154$$

se regresa al paso 3 y 4.

$$\begin{aligned} w_{1,0} &= \alpha{=}17 \\ w_{2,0} &= -29.814154 \\ u_1 &= 0.090112 \\ u_2 &= 0.809289 \end{aligned}$$

se hace el mismo procedimiento del paso 6 hasta llegar a $x = 21$

Tabla 3.1: Iteración 1

x	$w_{1,N+1}$	$w_{2,N+1}$	u_1	u_2
1.0	16.899810	-0.692048	0.090112	0.809289
1.1	16.857791	-0.165300	0.163110	0.656189
1.2	16.863750	0.271048	0.222293	0.531877
1.3	16.909625	0.635808	0.270210	0.430032
1.4	16.989031	0.943882	0.308867	0.346017
1.5	17.096917	1.207237	0.339865	0.276355
1.6	17.229316	1.435596	0.364501	0.218383
1.7	17.383139	1.636928	0.383837	0.170018
1.8	17.556023	1.817809	0.398747	0.129606
1.9	17.746203	1.983691	0.409958	0.095810
2.0	17.952414	2.139108	0.418074	0.067534
2.1	18.173802	2.287830	0.423601	0.043873
2.2	18.409862	2.432992	0.426962	0.024072
2.3	18.660369	2.577188	0.428509	0.007499
2.4	18.925338	2.722554	0.428538	-0.006377
2.5	19.204976	2.870829	0.427295	-0.018004
2.6	19.499647	3.023415	0.424987	-0.027758
2.7	19.809839	3.181416	0.421784	-0.035953
2.8	20.136138	3.345677	0.417828	-0.042854
2.9	20.479202	3.516815	0.413237	-0.048680
3.0	20.839743	3.695250	0.408110	-0.053610

<u>Paso 7</u>: Si $|20.839743 - \frac{43}{3}| = 6.506409$, entonces se repite el proceso.

Paso 8: Para $i = 0, 1, \ldots, N+1$

entonces $x = a + ih$

SALIDA $(x, w_{1,i}, w_{2,i})$

Paso 9: Procedimiento terminado

Parar

Paso 10: Tome

$$TK = -1.333333 - \frac{20.839743 - \frac{43}{3}}{0.408110} = -17.276118$$

(El método de Newton se utiliza para calcular TK.)

Después de 30 iteraciones se detiene porque $|14.333382 - \frac{43}{3}| = 0.00004 < 0.0001$

Tabla 3.2: Iteración 30

x	$w_{1,N+1}$	$w_{2,N+1}$	u_1	u_2
1.0	17.000000	-11.632933	244.393278	10.532378
1.1	15.755495	-9.226402	247.020544	41.071648
1.2	14.773389	-7.311886	252.123560	60.491010
1.3	13.997752	-5.752154	258.776699	72.330796
1.4	13.388629	-4.454579	266.335350	78.756008
1.5	12.916719	-3.354826	274.330018	81.148394
1.6	12.560046	-2.407099	282.405094	80.428207
1.7	12.301805	-1.578097	290.282378	77.237010
1.8	12.128923	-0.843161	297.738881	72.045497
1.9	12.031081	-0.183735	304.593184	65.219022
2.0	12.000023	0.414340	310.697031	57.058270
2.1	12.029066	0.962001	315.930196	47.824722
2.2	12.112741	1.467785	320.197386	37.756445
2.3	12.246532	1.938419	323.426400	27.077482
2.4	12.426673	2.379253	325.566989	16.002868
2.5	12.650004	2.794570	326.590066	4.740576
2.6	12.913847	3.187830	326.486992	-6.508713
2.7	13.215924	3.561850	325.268768	-17.553337
2.8	13.554282	3.918941	322.964996	-28.213368
2.9	13.927236	4.261020	319.622544	-38.323853
3.0	14.333382	4.589693	315.303872	-47.738205

Utilizando el Software MATLAB

```
Escriba el punto inicial a=1
Escriba el punto final b=3
Escriba el valor de y(a)=17
Escriba el valor de y(b)=43/3
Escriba el número de divisiones (n+1) n=20
Escriba la tolerancia=0.0001

ans =

La solución es:



sol =

   17.0000  -14.0002    1.0000
   15.6979  -10.8872    1.1053
   14.6828   -8.4979    1.2105
   13.8914   -6.6102    1.3158
   13.2787   -5.0812    1.4211
   12.8125   -3.8155    1.5263
   12.4686   -2.7474    1.6316
   12.2288   -1.8304    1.7368
   12.0791   -1.0310    1.8421
   12.0085   -0.3245    1.9474
   12.0082    0.3077    2.0526
   12.0712    0.8797    2.1579
   12.1917    1.4024    2.2632
   12.3650    1.8845    2.3684
   12.5872    2.3326    2.4737
```

```
12.8551    2.7522    2.5789
13.1658    3.1477    2.6842
13.5170    3.5227    2.7895
13.9068    3.8800    2.8947
14.3333    4.2222    3.0000
```

3.2 Métodos de diferencias finitas para problemas no lineales

Para el caso del problema no lineal general con valor de frontera

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \tag{3.9}$$

Para el desarrollo del procedimiento supondremos que f satisface las siguientes condiciones:

1. f y las derivadas parciales f_y y $f_{y'}$ son continuas en

$$D = \{(x, y, y')|a \leq x \leq b, \ -\infty < y < \infty, \quad -\infty < y' < \infty\},$$

2. $f_y(x, y, y') \geq \delta$ en D, para algún $\delta > 0$.

3. Existen las constantes k y L, con

$$k = \operatorname*{máx}_{(x,y,y')\in D} |f_y(x, y, y')| \quad y \quad L = \operatorname*{máx}_{(x,y,y')\in D} |f_{y'}(x, y, y')|.$$

Esto garantiza que conforme al teorema (2.7), exista una solución única.
Ahora podemos empezar a formar el procedimiento para el método de diferencias finitas para problemas no lineales.

Paso 1: Primero queremos dividir el intervalo $[a, b]$ en $(N+1)$ subintervalos iguales que nos da

$$h = \frac{b-a}{N+1}$$

cuyos extremos se encuentran en $x_i = a + ih$, para $i = 0, 1, \cdots, N+1$.

Paso 2: Suponer que la solución exacta tiene una cuarta derivada acotada nos permite reemplazar $y''(x_i)$ y $y'(x_i)$ en cada una de las ecuaciones

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i))$$

y sustituyendo las ecuaciones (2.19) y (2.23) esto nos da, para todo $i = 1, 2, \cdots, N$

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = f\Big(x_i, y(x_i), \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i)\Big) + \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) \tag{3.10}$$

para alguna ξ_i y η_i en el intervalo (x_{i-1}, x_{i+1}).

Paso 3: Como en el caso de la ecuación lineal, los resultados del método de diferencias se emplean cuando se eliminan los términos de error y las condiciones de frontera:

$$w_0 = \alpha, \quad w_{N+1} = \beta.$$

y

$$-\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} + f\Big(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\Big) = 0.$$

$$-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1} + h^2 f\Big(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\Big) = 0 \tag{3.11}$$

Para toda $i = 1, 2, \cdots, N$.

Paso 4: El sistema no lineal de $N \times N$ obtenido de la ecuación (3.11).

i	Ecuaciones	
1	$-w_0 + 2w_1 - w_2 + h^2 f(x_1, w_1, \frac{w_2 - w_0}{2h})$	$=0$
2	$-w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h})$	$=0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N-1	$w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h})$	$=0$
N	$w_{N-1} + 2w_N - w_{N+1} + h^2 f(x_N, w_N, \frac{w_{N+1} - w_{N-1}}{2h})$	$=0$

(3.12)

Paso 5: Aplicamos el método de Newton para sistemas no lineales, se genera una sucesión de iteraciones $\{(w_1^k, w_2^k, \cdots, w_N^k)\}^t$ que converge a la solución del sistema (3.12), a condición que la aproximación inicial $\{(w_1^0, w_2^0, \cdots, w_N^0)\}^t$ se acerque lo suficiente a la solución $\{(w_1, w_2, \cdots, w_N)\}^t$ y de que la matriz jacobiana del sistema no sea singular.

La matriz jacobiana $J(w_1, \cdots, w_N)$ es tridiagonal con el ij-ésimo elemento.

$$J(w_1, \cdots, w_N)_{ij} = \begin{cases} -1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, \frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}), & para\ i = j-1 \ \ y \ \ j = 2, \cdots, N. \\ 2 + h^2 f_y(x_i, w_i, \frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}), & para\ i = j \ \ y \ \ j = 1, \cdots, N. \\ -1 - \frac{h}{2} f_{y'}(x_i, w_i, \frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}), & para\ i = j+1 \ \ y \ \ j = 1, \cdots, N-1. \end{cases} \tag{3.13}$$

donde $w_0 = \alpha$ y $w_{N+1} = \beta$

Paso 6: Podemos encontrar la aproximación inicial $w^{(0)}$ mediante la siguiente ecuación

$$w^{(0)} = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{b - a}(x_i - a) \tag{3.14}$$

Donde $x_i = a + ih$, para cada $i = 1, 2, \cdots, N$.

Paso 7: EL método de Newton para los sistemas no lineales requiere que en cada iteración del sistema lineal de $N \times N$

$$J(w_1, \cdots, w_N)(v_1, \cdots, v_n)^t = -F(w_1, w_2, \cdots, w_N)$$

$$\begin{aligned} J(w_1, \cdots, w_N)(v_1, \cdots, v_n)^t = \quad & -\Big(-w_0 + 2w_1 - w_2 + h^2 f(x_1, w_1, \tfrac{w_2 - w_0}{2h}), \\ & -w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 f(x_2, w_2, \tfrac{w_3 - w_1}{2h}), \cdots, \\ & w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 f(x_{N-1}, w_{N-1}, \tfrac{w_N - w_{N-2}}{2h}), \\ & w_{N-1} + 2w_N - w_{N+1} + h^2 f(x_N, w_N, \tfrac{w_{N+1} - w_{N-1}}{2h}) \Big)^t \end{aligned} \tag{3.15}$$

Se despeja $v_1, \cdots, v_n$ porque

$$w_{i+1}^k = w_i^{k-1} + v_i \tag{3.16}$$

Para cada $i = 0, 1, 2, \cdots, N$.

Ejemplo 3.2. Resolver el problema no lineal de valor de frontera

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad 1 \leq x \leq 3, \quad y(1) = 17, \quad y(3) = \frac{43}{3}$$

Solución.

Paso 1: Primero hallaremos h

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 3 \\ N &= 19 \\ \alpha &= 17 \\ \beta &= \frac{43}{3} \end{aligned}$$

$$h = \tfrac{3-1}{19+1} = \tfrac{2}{20} = 0.1$$

Paso 2: Se tiene la función

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) = \frac{1}{8}\Big(32 + 2x_i^3 - y(x_i)y'(x_i)\Big) = 4 + \tfrac{1}{4}x_i^3 - \tfrac{y(x_i)y'(x_i)}{8}$$

Paso 3: Las condiciones de frontera son:

$$w_0 = 17 \quad y \quad w_{20} = \tfrac{43}{3}$$

Paso 4: El sistema no lineal de 19×19 obtenido de la ecuación (3.11) y (3.12), se obtiene $F(w)$.

i	x_i	Ecuaciones	
1	$x_1 = 1.1$	$2w_1 - w_2 + (0.01)\left(4 + 0.33275 - \frac{w_1(w_2-17)}{1.6}\right)$-17	=0
2	$x_2 = 1.2$	$-w_1 + 2w_2 - w_3 + (0.01)\left(4 + 0.432 - \frac{w_2(w_3-w_1)}{1.6}\right)$	=0
3	$x_3 = 1.3$	$-w_2 + 2w_3 - w_4 + (0.01)\left(4 + 0.54925 - \frac{w_3(w_4-w_2)}{1.6}\right)$	=0
4	$x_4 = 1.4$	$-w_3 + 2w_4 - w_5 + (0.01)\left(4 + 0.686 - \frac{w_4(w_5-w_3)}{1.6}\right)$	=0
5	$x_5 = 1.5$	$-w_4 + 2w_5 - w_6 + (0.01)\left(4 + 0.84375 - \frac{w_5(w_6-w_4)}{1.6}\right)$	=0
6	$x_6 = 1.6$	$-w_5 + 2w_6 - w_7 + (0.01)\left(4 + 1.024 - \frac{w_6(w_7-w_5)}{1.6}\right)$	=0
7	$x_7 = 1.7$	$-w_6 + 2w_7 - w_8 + (0.01)\left(4 + 1.22825 - \frac{w_7(w_8-w_6)}{1.6}\right)$	=0
8	$x_8 = 1.8$	$-w_7 + 2w_8 - w_9 + (0.01)\left(4 + 1.458 - \frac{w_8(w_9-w_7)}{1.6}\right)$	=0
9	$x_9 = 1.9$	$-w_8 + 2w_9 - w_{10} + (0.01)\left(4 + 1.71475 - \frac{w_9(w_{10}-w_8)}{1.6}\right)$	=0
10	$x_{10} = 2$	$-w_9 + 2w_{10} - w_{11} + (0.01)\left(4 + 2 - \frac{w_{10}(w_{11}-w_9)}{1.6}\right)$	=0
11	$x_{11} = 2.1$	$-w_{10} + 2w_{11} - w_{12} + (0.01)\left(4 + \ 2.31525 - \frac{w_{11}(w_{12}-w_{10})}{1.6}\right)$	=0
12	$x_{12} = 2.2$	$-w_{11} + 2w_{12} - w_{13} + (0.01)\left(4 + \ 2.662 - \frac{w_{12}(w_{13}-w_{11})}{1.6}\right)$	=0
13	$x_{13} = 2.3$	$-w_{12} + 2w_{13} - w_{14} + (0.01)\left(4 + 3.04175 - \frac{w_{13}(w_{14}-w_{12})}{1.6}\right)$	=0
14	$x_{14} = 2.4$	$-w_{13} + 2w_{14} - w_{15} + (0.01)\left(4 + 3.456 - \frac{w_{14}(w_{15}-w_{13})}{1.6}\right)$	=0
15	$x_{15} = 2.5$	$-w_{14} + 2w_{15} - w_{16} + (0.01)\left(4 + 3.90625 - \frac{w_{15}(w_{16}-w_{14})}{1.6}\right)$	=0
16	$x_{16} = 2.6$	$-w_{15} + 2w_{16} - w_{17} + (0.01)\left(4 + 4.394 - \frac{w_{16}(w_{17}-w_{15})}{1.6}\right)$	=0
17	$x_{17} = 2.7$	$-w_{16} + 2w_{17} - w_{18} + (0.01)\left(4 + 4.92075 - \frac{w_{17}(w_{18}-w_{16})}{1.6}\right)$	=0
18	$x_{18} = 2.8$	$-w_{17} + 2w_{18} - w_{19} + (0.01)\left(4 + 5.488 - \frac{w_{18}(w_{19}-w_{17})}{1.6}\right)$	=0
19	$x_{19} = 2.9$	$-w_{18} + 2w_{19} + (0.01)\left(4 + 6.09725 - \frac{w_{19}(14.333333-w_{18})}{1.6}\right)$-14.333333	=0

Paso 5: Hallando el jacobiano usando la ecuación (3.13).

$$J(w) = \begin{bmatrix}
2-(0.01)(\frac{w_2-17}{1.6}) & -1-(0.01)(\frac{w_1}{1.6}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-1+(0.01)(\frac{w_2}{1.6}) & 2-(0.01)(\frac{w_3-w_1}{1.6}) & -1-(0.01)(\frac{w_2}{1.6}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -1+(0.01)(\frac{w_3}{1.6}) & 2-(0.01)(\frac{w_4-w_2}{1.6}) & -1-(0.01)(\frac{w_3}{1.6}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & -1+(0.01)(\frac{w_4}{1.6}) & 2-(0.01)(\frac{w_5-w_3}{1.6}) & -1-(0.01)(\frac{w_4}{1.6}) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1+(0.01)(\frac{w_5}{1.6}) & 2-(0.01)(\frac{w_6-w_4}{1.6}) & -1-(0.01)(\frac{w_5}{1.6}) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1+(0.01)(\frac{w_6}{1.6}) & 2-(0.01)(\frac{w_7-w_5}{1.6}) & -1-(0.01)(\frac{w_6}{1.6}) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+(0.01)(\frac{w_7}{1.6}) & 2-(0.01)(\frac{w_8-w_6}{1.6}) & -1-(0.01)(\frac{w_7}{1.6}) & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+(0.01)(\frac{w_{18}}{1.6}) & 2-(0.01)(\frac{w_{19}-w_{17}}{1.6}) & -1-(0.01)(\frac{w_{18}}{1.6}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1+(0.01)(\frac{w_{19}}{1.6}) & 2-(0.01)(\frac{14{,}333333-w_{18}}{1.6})
\end{bmatrix}$$

Paso 6: Encontrar la aproximación inicial $w^{(0)}$ mediante la ecuación (3.14)

$$w_0^{(0)} = \begin{bmatrix} 16.86666667 \\ 16.73333333 \\ 16.6 \\ 16.46666667 \\ 16.33333333 \\ 16.2 \\ 16.06666667 \\ 15.9333333 \\ 15.8 \\ 15.66666667 \\ 15.53333333 \\ 15.4 \\ 15.26666667 \\ 15.13333333 \\ 15 \\ 14.86666667 \\ 14.733333333 \\ 14.6 \\ 14.46666667 \end{bmatrix}$$

Paso 7: EL método de Newton para los sistemas no lineales requiere que en cada iteración del sistema lineal de 19 × 19

$$J\big(W_1^{(0)}\big)\big(v_1\big)^t = -F\big(W_1^{(0)}\big)$$

Reemplazar paso 6 en 5 y 4

$$J(w_0^{(0)}) = \left[\begin{array}{ccccccccc}
2.00166667 & -1.10541667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.89541667 & 2.00166667 & -1.10458333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.89625 & 2.00166667 & -1.10375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.89708333 & 2.00166667 & -1.10291667 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.89791667 & 2.00166667 & -1.10208333 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.89875 & 2.00166667 & -1.10208333 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.89958333 & 2.00166667 & -1.10041667 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.90041667 & 2.00166667 & -1.09958333 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.90125 & 2.00166667 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.90208333 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1.09875 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2.00166667 & -1.09791667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.90291667 & 2.00166667 & -1.09708333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.90375 & 2.00166667 & -1.09625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.90458333 & 2.00166667 & -1.09541667 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.90541667 & 2.00166667 & -1.09458333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.90625 & 2.00166667 & -1.09375 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.90708333 & 2.00166667 & -1.09291667 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.90791667 & 2.00166667 & -1.09208333 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.90875 & 2.00166667 & -1.09125 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.90958333 & 2.00166667
\end{matrix}\right]$$

$$F\left(w_0^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 0.07143862 \\ 0.07220888 \\ 0.07315917 \\ 0.07430445 \\ 0.07565971 \\ 0.07724 \\ 0.07906032 \\ 0.08113549 \\ 0.08348086 \\ 0.08611112 \\ 0.08904138 \\ 0.09228667 \\ 0.09586195 \\ 0.09978221 \\ 0.1040625 \\ 0.10871778 \\ 0.11376305 \\ 0.11921333 \\ 0.12508362 \end{bmatrix}$$

$$\left(v_0\right)^t = -F'\left(W_0^{(0)}\right) * J^{-1}\left(W_0^{(0)}\right)$$

$$(v_0)^t = [\ \text{-0.34347477}\quad \text{-0.68804099}\quad \text{-1.03245423}\quad \text{-1.37497978}\quad \text{-1.71327189}\quad \text{-2.04422967}\quad \text{-2.36382549}$$
$$\text{-2.66500945}\quad \text{-2.94272635}\quad \text{-3.18870367}\quad \text{-3.39266099}\quad \text{-3.54191329}\quad \text{-3.62090609}\quad \text{-3.61067204}$$
$$\text{-3.48819726}\quad \text{-3.22568409}\quad \text{-2.78969523}\quad \text{-2.14016285}\quad \text{-1.22924379}\ ]^t$$

$$W_1^{(1)} = W_0^{(0)} + v_0$$

$$W_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 16.86666667 \\ 16.73333333 \\ 16.6 \\ 16.46666667 \\ 16.33333333 \\ 16.2 \\ 16.06666667 \\ 15.9333333 \\ 15.8 \\ 15.66666667 \\ 15.53333333 \\ 15.4 \\ 15.26666667 \\ 15.13333333 \\ 15 \\ 14.86666667 \\ 14.733333333 \\ 14.6 \\ 14.46666667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{-0.34347477} \\ \text{-0.68804099} \\ \text{-1.03245423} \\ \text{-1.37497978} \\ \text{-1.71327189} \\ \text{-2.04422967} \\ \text{-2.36382549} \\ \text{-2.66500945} \\ \text{-2.94272635} \\ \text{-3.18870367} \\ \text{-3.39266099} \\ \text{-3.54191329} \\ \text{-3.62090609} \\ \text{-3.61067204} \\ \text{-3.48819726} \\ \text{-3.22568409} \\ \text{-2.78969523} \\ \text{-2.14016285} \\ \text{-1.22924379} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.52319190 \\ 16.04529234 \\ 15.56754577 \\ 15.09168689 \\ 14.62006144 \\ 14.15577033 \\ 13.70284118 \\ 13.26832385 \\ 12.85727365 \\ 12.47796300 \\ 12.14067234 \\ 11.85808671 \\ 11.64576058 \\ 11.52266129 \\ 11.51180274 \\ 11.64098258 \\ 11.94363810 \\ 12.45983715 \\ 13.23742288 \end{bmatrix}$$

Después de 6 iteraciones se tiene:

$$w_5^{(5)} = \begin{bmatrix} 15.72086273 \\ 14.79868841 \\ 14.16105669 \\ 13.74612387 \\ 13.50207651 \\ 13.38574061 \\ 13.36093228 \\ 13.39692270 \\ 13.46767951 \\ 13.55176033 \\ 13.63207111 \\ 13.69605437 \\ 13.73665771 \\ 13.75361454 \\ 13.75472570 \\ 13.75662924 \\ 13.78435886 \\ 13.86896411 \\ 14.04282603 \end{bmatrix}$$

$$J\big(W_5^{(5)}\big)\big(v_5\big)^t = -F\big(W_5^{(5)}\big)$$

$$J(w_5^{(5)}) = \begin{bmatrix}
2.0137582 & -1.09825539 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.9075082 & 2.00974879 & -1.0924918 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.9114934 & 2.00657853 & -1.0885066 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.91408673 & 2.00411863 & -1.08591327 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.91561202 & 2.0022524 & -1.08438798 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.91633912 & 2.00088215 & -1.08366088 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91649417 & 1.99993011 & -1.08350583 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91626923 & 1.99933283 & -1.08373077 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.915827 & 1.99903226 & -1.084173 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.9153015 & 1.99897255 & -1.0846985 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91479956 & 1.99909816 & -1.08520044 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91439966 & 1.99934633 & -1.08560034 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91414589 & 1.99964025 & -1.08585411 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91403991 & 1.99988708 & -1.08596009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91403296 & 1.99998116 & -1.08596704 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91402107 & 1.99981479 & -1.08597893 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91384776 & 1.99929791 & -1.08615224 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91331897 & 1.99838458 & -1.08668103 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.91223234 & 1.99709769 & 0
\end{bmatrix}$$

$$F\left(w_5^{(5)}\right) = \begin{bmatrix} -0.09734472 \\ -0.09595333 \\ -0.08404749 \\ -0.06741032 \\ -0.04886195 \\ -0.02947932 \\ -0.00945002 \\ 0.01087558 \\ 0.03079034 \\ 0.04984632 \\ 0.0671861 \\ 0.08104727 \\ 0.08912223 \\ 0.08885254 \\ 0.07801096 \\ 0.05556609 \\ 0.02265397 \\ -0.01678087 \\ -0.05642948 \end{bmatrix}$$

$$\left(v_5\right)^t = -F'\left(W_5^{(5)}\right) * J^{-1}\left(W_5^{(5)}\right)$$

$$\left(v_5\right)^t = \begin{bmatrix} 0.22461408 & 0.39115209 & 0.48654273 & 0.50860409 & 0.46120806 & 0.35171811 & 0.19000523 \\ -0.01156428 & -0.23816401 & -0.47282195 & -0.69643757 & -0.88822399 & -1.02723838 & -1.09484138 \\ -1.07794316 & -0.97251697 & -0.78642966 & -0.54035916 & -0.26576996 \end{bmatrix}^t$$

$$W_6^{(6)} = W_5^{(5)} + v_5$$

$$W_6^{(6)} = \begin{bmatrix} 15.72086273 \\ 14.79868841 \\ 14.16105669 \\ 13.74612387 \\ 13.50207651 \\ 13.38574061 \\ 13.36093228 \\ 13.39692270 \\ 13.46767951 \\ 13.55176033 \\ 13.63207111 \\ 13.69605437 \\ 13.73665771 \\ 13.75361454 \\ 13.75472570 \\ 13.75662924 \\ 13.78435886 \\ 13.86896411 \\ 14.04282603 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.22461408 \\ 0.39115209 \\ 0.48654273 \\ 0.50860409 \\ 0.46120806 \\ 0.35171811 \\ 0.19000523 \\ -0.01156428 \\ -0.23816401 \\ -0.47282195 \\ -0.69643757 \\ -0.88822399 \\ -1.02723838 \\ -1.09484138 \\ -1.07794316 \\ -0.97251697 \\ -0.78642966 \\ -0.54035916 \\ -0.26576996 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.94547681 \\ 15.18984050 \\ 14.64759942 \\ 14.25472796 \\ 13.96328457 \\ 13.73745872 \\ 13.55093751 \\ 13.38535842 \\ 13.22951550 \\ 13.07893838 \\ 12.93563354 \\ 12.80783038 \\ 12.70941933 \\ 12.65877316 \\ 12.67678254 \\ 12.78411227 \\ 12.99792920 \\ 13.32860495 \\ 13.77705607 \end{bmatrix}$$

Tabla 3.3: Resultado de 6 iteraciones

x_i	w_i	W_0^0	W_1^1	W_2^2	W_3^3	W_4^4	W_5^5	W_6^6
1.0	w_0	17	17	17	17	17	17	17
1.1	w_1	16.86666667	16.5231919	15.99220187	15.54211308	15.48346914	15.72086273	15.754503
1.2	w_2	16.73333333	16.04529234	15.02037346	14.24727457	14.27952324	14.79868841	14.755455
1.3	w_3	16.6	15.56754577	14.09404657	13.12544298	13.36056231	14.16105669	13.997692
1.4	w_4	16.46666667	15.09168689	13.22381153	12.18304108	12.69562307	13.74612387	13.388571
1.5	w_5	16.33333333	14.62006144	12.42118947	11.42268289	12.2526165	13.50207651	12.916667
1.6	w_6	16.2	14.15577033	11.69843705	10.84314495	12.00002655	13.38574061	12.560000
1.7	w_7	16.06666667	13.70284118	11.06827899	10.43955682	11.90797074	13.36093228	12.301765
1.8	w_8	15.9333333	13.26832385	10.54321822	10.20379455	11.94865577	13.3969227	12.128889
1.9	w_9	15.8	12.85727365	10.13535996	10.14577898	12.09356097	13.46767951	12.031053
2.0	w_{10}	15.66666667	12.477963	9.85623919	10.23411723	12.31515534	13.55176033	12.000000
2.1	w_{11}	15.53333333	12.14067234	9.71600796	10.45339655	12.58909457	13.63207111	12.029048
2.2	w_{12}	15.4	11.85808671	9.72277812	10.7858714	12.8916151	13.69605437	12.112727
2.3	w_{13}	15.26666667	11.64576058	9.8818353	11.21110738	13.19949712	13.73665771	12.246522
2.4	w_{14}	15.13333333	11.52266129	10.19464101	11.70535367	13.49059606	13.75361454	12.426667
2.5	w_{15}	15	11.51180274	10.65746236	12.24078204	13.74520731	13.7547257	12.650000
2.6	w_{16}	14.86666667	11.64098258	11.25933746	12.78491747	13.94851054	13.75662924	12.913846
2.7	w_{17}	14.73333333	11.9436381	11.97886204	13.30092175	14.09418108	13.78435886	13.215926
2.8	w_{18}	14.6	12.45983715	12.77890211	13.75001561	14.18877295	13.86896411	13.554286
2.9	w_{19}	14.46666667	13.23742288	13.59766481	14.09845335	14.25540549	14.04282603	13.927241
3.0	w_{20}	14.33333333	14.33333333	14.33333333	14.33333333	14.33333333	14.33333333	14.333333

Utilizando el Software MATLAB

```
>> w= Newton_sys(F,JF,w0,tol,max_it)
ans =

  Columns 1 through 8

   15.7545   14.7717   13.9957   13.3863   12.9143   12.5575
12.2993   12.1265

  Columns 9 through 16

   12.0288   12.1265   12.0271   12.1110   12.2450   12.4254
12.6489   12.9130

  Columns 17 through 19

   13.2153   13.5539   13.9270
```

Conclusiones

1. El método del disparo no lineal utiliza el algoritmo del método de Runge-Kutta de cuarto orden para hallar la solución más aproximada de una ecuación diferencial ordinaria no lineal con valores de frontera de segundo orden.

2. El método del disparo no lineal es más inestable que el de diferencias finitas no lineales.

3. El método de diferencias finitas no lineales nos va a permitir a través de un sistema de ecuaciones no lineales calcular su solución aproximada de la ecuación diferencial no lineal sobre su dominio discreto.

4. El Software MATLAB es un gran soporte que nos permite simplificar el proceso de solución de cada uno de los métodos y llegar en forma rápida a una solución más exacta.

5. En el presente trabajo se detalla en forma numérica la solución de las ecuaciones diferenciales no lineales utilizando los algoritmos de disparo no lineal y diferencias finitas no lineal, además se comprueban a través del software matemático MATLAB.

Bibliografía

1. **Abdelwahab K., Ronald B.** *"An Introduction to Numerical Methods a MATLAB Approach"*, Trird Edition-2012.

2. **Alhiet O., Cristian M.** & **Alfonso V.** *Software para ciencia e ingeniería MATLAB* , Empresa Editora MACRO-2010.

3. **Ayres, F.,** *"Ecuaciones Diferenciales"*. Edición Mc Graw-Hill 2008.

4. **Arenas S., Enrique** & **Ramírez G., Margarita** *"Cuaderno de Ejercicios de Ecuaciones Diferenciales"*. Facultad de Ingeniería, UNAM México, 2010.

5. **Courtney R.** *"Numerical Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations"*. A project submitted to the Department of Mathematical Sciences in conformity with the requirements for Math 4301 (Honour's Seminar), Lakehead University, Thunder Bay, Ontario, Canada, 2013

6. **Esquerro, J.,** *"Iniciación a los métodos numéricos"*. Universidad de la Rioja, servicio de publicaciones, 2012.

7. **Keller H., Isaacson E.,** *"Analysis of numerical methods"*. New York, Dover Publications, 1966

8. **Keller, H.,** *"Numerical methods for two-point boundary-value problems"*, Blaisdell, Waltham, MA, 1 968, 1 84 pp. QA372.K42 659, 664, 668, 689, 690

9. **Mathews, J., Fink, K.,** *"Métodos Numéricos con Matlab"*. Edición 1999.

10. **R. L Burden y J.D. Faires**, *"Análisis Numérico"*. 9^a ed. Cengage, 2011.

11. **Simmons, G. F,** *"Ecuaciones Diferenciales (con aplicaciones y notas históricas)"*. Edición Mc Graw- Hill (1998).

12. **S. Chapra y R. Canale**, *"Numerical Methods for Engineers"*, 6 edición Mcgraw-Hill, 2010.

13. **Spiegel R. Murray** *"Ecuaciones Diferenciales Aplicadas "*. Prentice-Hall México, 1993.

14. **Villarán A., Jimenez J.y García V.,** *"Análisis numérico II"*.

15. **Zill, D,** *"Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones"*, Edición Grupo editorial Iberoamericana (1998).

Anexo

3.2.0 Algoritmo del método de disparo no lineal

dispnl.m

```
%método del disparo para problemas de contorno no lineales
clear;
a=input('Escriba el punto inicial a=');
b=input('Escriba el punto final b=');
alfa=input('Escriba el valor de y(a)=');
beta=input('Escriba el valor de y(b)=');
n=input('Escriba el número de divisiones (n+1) n=');
tol=input('Escriba la tolerancia=');
%Resolución del primer sistema
fin=0;
to=(beta-alfa)/(b-a);
while (fin==0)
    ybto=ec2(a,[alfa to],b,n,1,0); %0 por poner algo
    % Resolución del primer sistema para h/2. Este resultado
    %nos servira para resolver el segundo sistema.
    aux=ec2(a,[alfa to],b,2*n,1,0);
    %resolución del segundo sistema . Necesitaremos pasarle
    %esta variable aux.
    zbto=ec2(a,[0 1],b,n,2,aux);
```

```
    t1=to-((ybto(n,1)-beta)/zbto(n,1));
    if (abs(t1-to)<tol)
        t=t1;
        fin=1;
    else
        to=t1;
    end
end
'La solución es:', sol=ec2(a,[ alfa t],b,n,1,0)
'pulse una tecla para ver el grafico de la función'
pause
plot(sol(:,3),sol(:,1));
hold on;
```

ec2.m

```
%esta función calcula la solución de un sistema de 2° orden
% utilizando R-k
function valor=ec2(to,w,t,n,sist,yyp)
%to es el punto inicial
%w es el valor inicial y(to)=[];
%t es el punto para calcular su valor.
%n es el numero de divisiones
%sist es una variable ue indica si se resuelve el primer
% sistema o el segundo
h=(t-to)/(n-1);
for k=1:n
    M(k,:)=w;
    a(k,:)=to;
    if (sist==1)
        w=r(to,w,h);
```

```
    elseif (sist==2)
        w=r2(to,w,h,yyp,k);
    else
        error('error en la funcion ec2: debe especificar
               sistema 1 o 2.');
    break;
    end
    to=to+h;
end
valor=[M a];
```

f.m

```
function valor=f(x,v) %f(t,y,z)
%sustituir z por y' en la ecuación y''=...
y=v(1);
z=v(2);
valor=[z,(32+2*(x^3)-y*(z))/8];
```

f2.m

```
function valor=f2(x,v,yyp);
z=v(1);
q=v(2);
y=yyp(1);
yp=yyp(2);
valor=[q,fy(x,y,yp)*z+fyp(x,y,yp)*q];
```

fy.m

```
function valor=fy(x,y,yp)% derivada de y'' respecto de y.
valor=-(1/8)*yp;
```

fyp.m

```
function valor=fyp(x,y,yp)% derivada de y'' respecto de y prima.
```

```
valor=-(1/8)*y;
```

r.m

```
function yn=r(x,w,h)
k1=h*f(x,w);
k2=h*f(x+h/2,w+k1/2);
k3=h*f(x+h/2,w+k2/2);
k4=h*f(x+h,w+k3);
yn=w+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
```

r2.m

```
function yn=r2(x,w,h,yyp,i)
k1=h*f2(x,w,yyp((2*i)-1,:));
k2=h*f2(x+h/2,w+k1/2,yyp(2*i,:));
k3=h*f2(x+h/2,w+k2/2,yyp(2*i,:));
k4=h*f2(x+h,w+k3,yyp((2*i)-1,:));
yn=w+1/6*(k1+2*k2+2*k3+k4);
```

3.2.0 Algoritmo del método de diferencias finitas no lineal

```
function w= Newton_sys(F,JF,w0,tol,max_it)
F='Newton_sys_F';
JF='Newton_sys_JF';
w0=[16.86666667, 16.73333333, 16.6, 16.46666667,16.33333333,
16.2,16.06666667, 15.9333333, 15.8, 15.66666667,15.53333333,
15.4, 15.26666667, 15.13333333,15, 14.86666667,14.733333333,
14.6, 14.46666667];
tol=0.0000001;
max_it=19;
w_old = w0;
```

```
disp([0 w_old]);
iter = 1;
while (iter <= max_it)
 v=-feval(JF,w_old)\feval(F,w_old);
w_new = w_old + v';
dif = norm(w_new - w_old);
disp([iter w_new dif]);
if dif <= tol
   w = w_new;
   disp('Newton method has converged')

   return;
else
w_old = w_new;
end
iter = iter + 1;
end
disp('Newton method did not converge')
w = w_new;
```

```
function y= Newton_sys_F(w)
y=[( 2*w(1)-w(2)+0.01*(4+0.33275-(w(1)*(w(2)-17)/1.6))-17)
(-w(1)+2*w(2)-w(3)+0.01*(4+0.432-(w(2)*(w(3)-w(1))/1.6)))
(-w(2)+2*w(3)-w(4)+0.01*(4+0.54925-(w(3)*(w(4)-w(2))/1.6)))
(-w(3)+2*w(4)-w(5)+0.01*(4+0.686-(w(4)*(w(5)-w(3))/1.6)))
(-w(4)+2*w(5)-w(6)+0.01*(4+0.84375-(w(5)*(w(6)-w(4))/1.6)))
(- w(5)+2*w(6)- w(7)+0.01*(4+1.024-(w(6)*(w(7)-w(5))/1.6)))
(-w(6)+2*w(7)-w(8)+0.01*(4+1.22825-(w(7)*(w(8)-w(6))/1.6)))
(-w(7)+2*w(8)-w(9)+0.01*(4+1.458-(w(8)*(w(9)-w(7))/1.6)))
(-w(8)+2*w(9)-w(10)+0.01*(4+1.71475-(w(9)*(w(10)-w(8))/1.6)))
```

```
(-w(9)+2*w(10)-w(11)+0.01*(4+2-(w(10)*(w(11)-w(9))/1.6)))
(-w(10)+2*w(11)-w(12)+0.01*(4+2.31525-(w(11)*(w(12)-w(10))
/1.6)))
(-w(11)+2*w(12)-w(13)+0.01*(4+2.662-(w(12)*(w(13)-w(11))/
1.6)))
(-w(12)+2*w(13)-w(14)+0.01*(4+3.04175-(w(13)*(w(14)-w(12))/
1.6)))
(-w(13)+2*w(14)-w(15)+0.01*(4+3.456-(w(14)*(w(15)-w(13))/
1.6)))
(-w(14)+2*w(15)-w(16)+0.01*(4+3.90625-(w(15)*(w(16)-w(14))/
1.6)))
(-w(15)+2*w(16)-w(17)+0.01*(4+4.394-(w(16)*(w(17)-w(15))/
1.6)))
(-w(16)+2*w(17)-w(18)+0.01*(4+4.92075-(w(17)*(w(18)-w(16))/
1.6)))
(-w(17)+2*w(18)-w(19)+0.01*(4+5.488-(w(18)*(w(19)-w(17))/
1.6)))
(-w(18)+2*w(19)+0.01*(4+6.09725-(w(19)*(14.333333-w(18))/
1.6))
- 14.333333 )];
```

```
function y = Newton_sys_JF(w)
y =[ 2-0.01*((w(2)-17)/1.6) -1-0.05*(0.125*w(1)) 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
-1+0.05*(0.125*w(2)) 2-0.01*((w(3)-w(1))/1.6) -1-0.05*
(0.125*w(2)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 -1+0.05*(0.125*w(3)) 2-0.01*((w(4)-w(2))/1.6) -1-0.05*
(0.125*w(3)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 -1+0.05*(0.125*w(4)) 2-0.01*((w(5)-w(3))/1.6) -1-0.05*
(0.125*w(4)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
```

```
0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(5)) 2-0.01*((w(6)-w(4))/1.6) -1-0.05*
(0.125*w(5)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(6)) 2-0.01*((w(7)-w(5))/1.6) -1-
0.05*(0.125*w(6)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(7)) 2-0.01*((w(8)-w(6))/1.6) -1-
0.05*(0.125*w(7)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(8)) 2-0.01*((w(9)-w(7))/1.6) -1-
0.05*(0.125*w(8)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(9)) 2-0.01*((w(10)-w(8))/
1.6) -1-0.05*(0.125*w(9)) 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(10)) 2-0.01*((w(11)-w(9))/
1.6) -1-0.05*(0.125*w(10)) 0 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(11)) 2-0.01*((w(12)-w(10)
)/1.6) -1-0.05*(0.125*w(11)) 0 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(12)) 2-0.01*((w(13)-
w(11))/1.6) -1-0.05*(0.125*w(12)) 0 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(13)) 2-0.01*((w(14)-
w(12))/1.6) -1-0.05*(0.125*w(13)) 0 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(14)) 2-0.01*((w(15)
-w(13))/1.6) -1-0.05*(0.125*w(14)) 0 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(15)) 2-0.01*((w(
16)-w(14))/1.6) -1-0.05*(0.125*w(15)) 0 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(16)) 2-0.01*((
w(17)-w(15))/1.6) -1-0.05*(0.125*w(16)) 0 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(17)) 2-0.01*(
(w(18)-w(16))/1.6) -1-0.05*(0.125*w(17)) 0;
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(18)) 2-0.01*
((w(19)-w(17))/1.6) -1-0.05*(0.125*w(18));
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1+0.05*(0.125*w(19)) 2-
0.01*(14.333333-w(18)/1.6 ) ]
```