UNIVERSIDAD NACIONAL
"PEDRO RUIZ GALLO"
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

"Existencia y unicidad de puntos fijos para funciones débilmente contractivas en espacios métricos completos parcialmente ordenados y algunas aplicaciones en EDO"

TESIS

PRESENTADO PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Presentado por:

Bach. Mat. Manayay Saavedra David
Bach. Mat. Tesén Garay James Manuel

Asesor:

Mg. Mat. Santamaria Santisteban Oscar A.

LAMBAYEQUE – PERÚ

2015

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO”

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “Existencia y unicidad de puntos fijos para funciones débilmente contractivas en espacios métricos completos parcialmente ordenados y algunas aplicaciones en EDO”, presentado por el Bach. Mat. David Manayay Saavedra y Bach. Mat. James Manuel Tesén Garay, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas.

Mg.Mat. Rimarachín López Betty

Presidente Jurado de Tesis

Mg. Mat. Tejada Romero Iris

Secretario Jurado de Tesis

Lic. Mat. Pérez Herrera Adelmo

Vocal Jurado de Tesis

Fecha de Defensa: Octubre - 2015

UNIVERSIDAD NACIONAL“ PEDRO RUIZ GALLO”
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“Existencia y unicidad de puntos fijos para funciones débilmente contractivas en espacios métricos completos parcialmente ordenados y algunas aplicaciones en EDO”

Bach. Mat. Manayay Saavedra David
Autor

Bach. Mat. Tesén Garay James Manuel
Autor

Mg. Mat. Santamaria Santisteban Oscar A.
Asesor

Lambayeque – Perú
Octubre - 2015

Dedicatoria

Esta tesis está dedicada a mi madre y hermanos de todo corazón por su amor, cariño, comprensión y apoyo.

David

A Dios, mis padres y mis hermanos, quienes han sido la guía para poder llegar a este punto de mi carrera.
A todos los que me apoyaron moral y economicamente para concluir esta tesis.

James

Agradecimiento

Agradecer a Dios y a la Virgen María por permitirme llegar a cumplir una de las metas más importantes de nuestras vidas, acompañadas de alegría y salud de nuestros seres querido.

Agradecer a nuestro asesor de tesis al Mg. Oscar Santamaria Santisteban y a nuestro jurado de tesis por las observaciones que nos hizo en nuestro proyecto de tesis.

David

A Dios por bendecirme para llegar hasta donde he podido llegar, porque hizo realidad este sueño anhelado.

A mis padres, ellos me dieron la vida y cuidaron de mi en los momentos de mayor fragilidad.Gran parte de lo que soy se lo debo a ellos.

A mi jurado, por las observaciones realizadas a esta tesis, exigiendo así un trabajo de calidad. Un especial agradecimiento por este privilegio.

Al profesor Oscar Santamaría Santisteban por asesorarme en la elección, elaboración y desarrollo del tema de mi tesis. Por su enorme paciencia.

James

Resumen

El principio de contracción de Banach ofrece las herramientas más simples en la teoría de punto fijo. Este principio se utiliza para estudiar la existencia y unicidad de la solución de una amplia clase de ecuaciones funcionales lineales y no lineales que surgen en la matemática pura y matemática aplicada.

En el presente trabajo de investigación se presentan resultados de Harjai y Sadarargani y algunos otros autores, que de alguna manera extienden el principio de contracción de Banach. Se introduce el concepto de función de distancia alternante para estudiar las condiciones que garantizan la existencia y unicidad de puntos fijos, para funcione débilmente contractivas en espacios métricos completos parcialmente ordenados.

Estos resultados se pueden utilizar para investigar una amplia gama de problemas no lineales. Como aplicación, se discute la existencia de una solución para un problema periódico con valores en la frontera.

Abstract

The Banach contraction principle provides the simplest tools in the theory of fixed point. This principle is used to study the existence and uniqueness of the solution of a wide class of nonlinear functional equations arising linealesy in pure mathematics.and applied mathematics.

In the present research results J. Harjani,K. Sadarangan and some others, That somehow extend the Banach contraction principle are presented. The function concept "altering distanceïs introduced to study the conditions that guarantee the existence and uniqueness of fixed points, for weakly contractive functions in complete partially ordered metric spaces.

These results can be used to investigate a wide range of non-linear problems. As an application we discuss the existence of a solution on a periodic problem for boundary value.

Introducción

Estudiar un problema asociado a ecuaciones diferenciales, implica investigar la existencia y unicidad de solución a ese problema, que en muchos casos no es posible garantizar. En el contexto clásico, se han obtenido diversos resultados de existencia y unicidad usando diferentes técnicas para encontrar su solución, destacando principalmente la técnica de punto fijo, la cual resulta ser una herramienta muy útil y que va muy de la mano con el desarrollo inherente de las ecuaciones diferenciales bajo diferentes tipos de condiciones. Recientemente, en [6] se han obtenido resultados de existencia y unicidad de solución a problemas de valor en la frontera en el contexto clásico usando algunos resultados de punto fijo más generales que el Principio de Contracción de Banach. Así, el interés de esta tesis está enfocado en establecer las condiciones suficientes de existencia y unicidad de puntos fijos, usando, en lugar del Principio de Contracción de Banach, algunos resultados de punto fijo, asociados en [3] y [4], sobre funciones débilmente contractivas definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados.

El capitulo 1 consta de tres secciones. En la primera sección se hará referencia a algunas definiciones y resultados que serán necesarios para el desarrollo de este trabajo. Los resultados de esta sección están presentados sin sus respectivas demostraciones ya que los resultados son clásicos del análisis y de la topología. Los interesados en dichas demostraciones pueden consultar cualquier libro sobre el tema, por ejemplo [2]. En la segunda sección abordaremos una parte de lo que encierra la teoría del punto fijo para una función de un espacio métrico en sí mismo, y en consecuencia, en la tercera sección enunciaremos y demostraremos algunos de los resultados clásicos de ésta teoría como es

el Principio de Contracción de Banach.

En el Capitulo 2, se demostrarán teoremas sobre la existencia y unicidad de punto fijo para las aplicaciones débilmente contractivas sobre los espacios métricos completos dotados de un orden parcial, siendo las funciones de distancia alternante (o "altering distance") el concepto básico. Tales funciones se introdujeron por Khan, en [5], donde presenta algunos teoremas punto fijo con la ayuda de dichas funciones.

En el capítulo 3, presentamos algunas aplicaciones de estos resultados para analizar la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden.

Esperemos que este trabajo sirva como una fuente de información para quienes se inician en el estudio de temas correspondientes a la teoría de punto fijo. Las diversas definiciones dadas se ha procurado ilustrarla mediante ejemplos a fin de facilitar la comprensión de las mismas.

Índice general

Capítulo 1:

Preliminares

Los espacios métricos fueron introducidos inicialmente por el matemático francés M. Fréchet en 1906 y posteriormente desarrollados por F. Hausdorff, constituyen un marco suficientemente general para nuestros propósitos. La presentación que hacemos en este capítulo es con la finalidad de prepararnos para las futuras definiciones y demostraciones, sin embargo no pretendemos hacer una exposición tan siquiera incompleta.

1.1 Espacios Métricos

Definición 1.1. Sea X un conjunto no vacío. Una métrica en X, o función distancia sobre X, es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, que satisface las siguientes propiedades:

(M1) $d(x, y) \geq 0, \quad \forall\, x, y \in X$

(M2) $d(x, y) = 0, \quad$ si y solo sí $x = y$

(M3) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall\, x, y \in X$

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad$ (desigualdad triangular)

Estas propiedades son comunmente llamadas "axiomas de una métrica".
La expresión $d(x, y)$ se lee como **distancia de x a y**

Definición 1.2. Un espacio métrico es un par (X, d), donde X es un conjunto no vacío y d es una métrica definida en X.

Nota: Para (X, d) escribiremos también X_d. En abuso de notación diremos a menudo espacio métrico X sin especificar, si es claro o no, cual métrica se esta considerando.
De $(M4)$ obtenemos por inducción la "desigualdad triangular generalizada", así:

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Sobre un mismo conjunto pueden definirse distintas matrices, que dan lugar a diferentes espacios métricos, como se prueba en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.1.

1. **Espacio Métrico Discreto**

   Dado un conjunto no vacío cualquiera X definimos la métrica discreta d en X mediante

   $$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

   Puede verificarse fácilmente que se cumplen los axiomas métricos. Observamos también que cambiando el uno por cualquier otro valor numérico obtenemos otra distancia, también discreta.

2. **La recta real $\mathbb{R}$**

   Sea $X = \mathbb{R}$, $d_u(x, y) = |x - y|$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$. En este ejemplo los axiomas métricos se cumplen, se le conoce como la métrica usual.
   El conjunto de los números complejos C con la función distancia $d(z, w) = |z - w|$ también es un espacio métrico

3. **El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$**

   Sea $X = \mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las $n-$uplas de números reales. Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son elementos de X, definimos la distancia

   $$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Puede verificarse fácilmente que se cumplen los dos primeros axiomas métricos. La desigualdad triangular se escribe como

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_k - y_k|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_k - y_k|^2} = d(x,z) + d(z,y)$$

Si en la desigualdad anterior reemplazamos $x_k - z_k = a_k$ y $z_k - y_k = b_k$, por lo tanto $x_k - y_k = a_k + b_k$ y la desigualdad se escribe como

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Esta última desigualdad se deduce a partir de la desigualdad Cauchy-Schwartz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

En efecto, usando la desigualdad Cauchy-Schwartz

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2$$

4. **El espacio** $(\mathbb{R}^n, d_p)$

Sea $X = \mathbb{R}^n$, ahora definimos la distancia d_p entre x e y mediante

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde p es un número fijo mayor o igual a 1. En este ejemplo los axiomas métricos si se cumplen.

Para demostrar la desigualdad triangular veremos primero la desigualdad de Holder y luego la desigualdad de Minkowski.

Lema 1.1. Sean $\alpha > 0,\ \beta > 0$ tal que $\alpha + \beta = 1$, para cada $\alpha > 0,\ b > 0$ tenemos que

$$a^{\alpha}.b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b.$$

Demostración. Sea $y = f(x) = x^\alpha$ donde $0 < \alpha < 1,\ x \in < 0, \alpha >$

$$\begin{aligned} y &= x^\alpha \\ y' &= \alpha x^{\alpha-1} \\ y'' &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

$\alpha > 0$ y $\alpha < 1$ entonces $\alpha > 0$ y $\alpha - 1 < 0$ entonces $\alpha(\alpha-1) < 0$.

Por lo tanto $y'' < 0,\ \forall x \in < 0, \alpha >$.

Esto indica que la función $y = x^\alpha$ es cóncava hacia abajo. Entonces para cualquier $x \in < 0, \alpha >$ se tiene que la gráfica de la función $y = x^\alpha$ está debajo de la recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$.

En particular si $x_0 = 1$ y $y = t(x)$ es la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ entonces

$$f(x) \leq t(x) \tag{1.1}$$

Hallamos la recta tangente

$$\frac{y - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$$\frac{y - 1}{x - 1} = \alpha$$

$$y - 1 = \alpha(x - 1)$$

$$t(x) = y = \alpha x - \alpha + 1$$

reemplazando en (1.1) tenemos

$$x^\alpha \leq \alpha x - \alpha + 1, \quad \forall x \in < 0, \alpha >$$

en particular si $x = \dfrac{a}{b}$, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha\left(\dfrac{a}{b}\right) - \alpha + 1$

multiplicando por b se tiene

$$b\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha a + (1-\alpha)b$$

$$a^\alpha . b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b$$

$$a^\alpha . b^\beta \leq \alpha a + \beta b$$

□

Desigualdad de Holder

Sean $p, q > 1$, tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, entonces para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración. Por la desigualdad del lema anterior para $a > 0,\ b > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$ con $\alpha + \beta = 1$ tenemos que

$$a^{\alpha}.b^{\beta} \leq \alpha a + \beta b$$

$$a = \frac{|x_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p}, \qquad b = \frac{|y_i|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q}$$

y $\alpha = \dfrac{1}{p}$, $\beta = \dfrac{1}{q}$ entonces

$$\left(\frac{|x_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p} \right)^{1/p} \left(\frac{|y_i|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q} \right)^{1/q} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|x_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|y_i|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q} \right)$$

$$\frac{|x_i|^p}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}} \frac{|y_i|^q}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|x_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p} \right) + \frac{1}{q} \left(\frac{|y_i|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q} \right)$$

Aplicamos sumatoria $\sum\limits_{i=1}^{n}$ a la ecuación anterior

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i.y_i|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \left(\cancel{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p}} \right) + \frac{1}{q} \left(\cancel{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q}} \right)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i.y_i|}{\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\Big)^{1/q}} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i.y_i| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\Big)^{1/q}$$

□

<u>Desigualdad de Minkowsky</u>

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Demostración.

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p = \sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i||x_i+y_i|^{p-1} \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1}$$

Utilizando la desigualdad de Holder entonces

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i+y_i|^{p-1}\Big)^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i+y_i|^{p-1}\Big)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\Big(|x_i+y_i|^{p-1}\Big)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Usando de la desigualdad de Holder el dato

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\frac{q+p}{pq}=1$$

$$q+p=pq$$

$$pq - q = p$$

$$q(p-1) = p$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$\square$

Casos particulares de los espacios $(\mathbb{R}^n, d_p)$

a) Si $p = 1$ se obtiene la llamada "métrica Manhattan"

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$$

Esta métrica mide la distancia recorrida por un peatón de un punto a otro en una ciudad cuadriculada.

b) Si $p = 2$ recobramos el espacio euclídeo.

c) Si $p \to \infty$ la distancia resulta

$$d_\infty(x, y) = \operatorname*{máx}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

5. **El espacio de las sucesiones** ℓ_p

Sea X el conjunto de las sucesiones de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

para un número fijo $p \geq 1$. Definimos la distancia entre $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.2}$$

Otra vez, las dos primeros axiomas son directos. De acuerdo con la desigualdad de Minkowski, para n cualquiera vale

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Por hipótesis las series

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p$$

convergen, por lo tanto, pasando al límite para $n \to \infty$, obtenemos

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Esto demuestra que la distancia (1.2) tiene sentido para cualquier $x, y \in \ell_p$, además muestra que satisface la desigualdad triangular.

El espacio ℓ_2 es llamado espacio de Hilbert . Para $p < \infty$ los elementos de ℓ_p son sucesiones que necesariamente deben converger a cero, los elementos de ℓ_∞ sólo necesitan estar acotados, $d_\infty(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n - y_n|\}$.

6. **<u>El espacio de las funciones continuas $C([a, b])$</u>**

Sea X el conjunto de las funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$. Introducimos una métrica en X mediante:

$$d(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)|dt$$

que viene dada por el área comprendida entre funciones continuas.

Sabemos que si $f(t) \geq 0$, para cada $t \in [a, b]$ entonces $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ y también que $\int_a^b f(t)dt = 0$ si, y sólo so, $f \equiv 0$; por lo tanto se cumplen los dos primeros axiomas de métrica.

De la simetría del valor absoluto se obtiene el tercer axioma; y por último, de la desigualdad triangular del valor absoluto, de la aditividad de la integral y de que $f(t) \leq g(t)$ implica $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$, se deduce

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \int_a^b |f(t) - g(t)| \leq \int_a^b (|f(t) - h(t)| + |h(t) + g(t)|)dt \\ &= \int_a^b |f(t) - h(t)|dt + \int_a^b |h(t) - g(t)| = d(f, h) + d(h, g) \end{aligned}$$

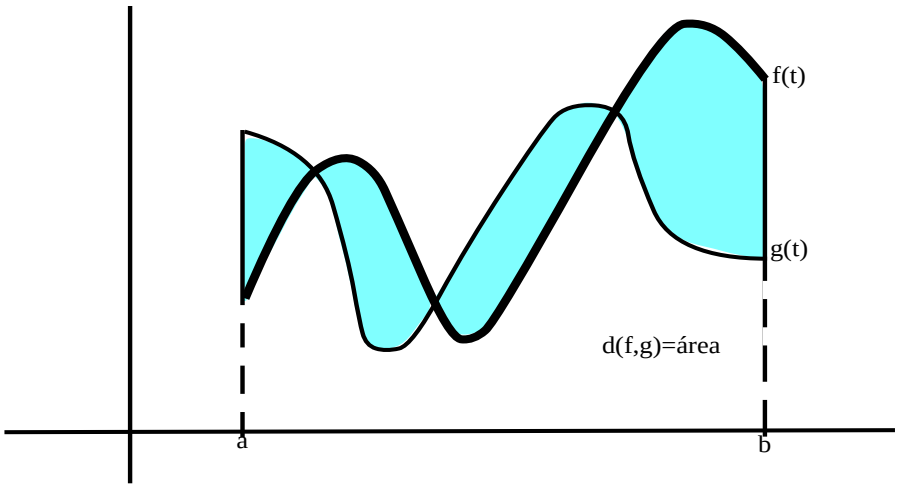

Fig 1.1: *La distancia es el área comprendida entre dos curvas*

Definición 1.3. Un subespacio $(Y, \overline{d})$ de (X, d) se obtiene si tomamos un subconjunto $Y \subset X$ y restringimos d para $Y \times Y$ así la métrica sobre Y es la restricción.

$$\overline{d} = d|_{Y \times Y}$$

$\overline{d}$ se llama métrica inducida por d en Y.

Ejemplo 1.2.

Consideremos en la recta real, el subconjunto [0,1] y la métrica usual. Entonces

$$([0, 1], d)$$

es un subespacio métrico.

Proposición 1.1. *Sea X un espacio métrico. Para todo $x, y, z \in X$ se verifica:*

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)$$

Demostración. Aplicando la desigualdad triangular y la simetría de la métrica tenemos

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = d(x, y) + d(z, y)$$

por lo que $d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y)$.

De forma análoga podemos poner $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) = d(x, z) + d(x, y)$ y tendremos que $-d(x, y) \leq d(x, z) - d(z, y)$

Usando estas dos desigualdades tenemos

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y) < d(x,y)$$

lo que concluye la demostración. □

1.2 Nociones topológicas en espacios métricos

1.2.1 Bolas abiertas y cerradas

Definición 1.4. Sea (X,d) un espacio métrico y $r > 0$. Se llama:

1. Bola abierta de centro x y radio r, al conjunto $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.
2. Bola cerrada de centro x y radio r, al conjunto $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$.

Observación 1.1. La intersección arbitraria de bolas no tiene porque ser otra bola.

Ejemplo 1.3. En $(\mathbb{R}, d_u)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(0,\frac{1}{n}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \{0\}$ que no es una bola.

Teorema 1.1. *(Propiedad de Hausdorff) Sea (X,d) un espacio métrico y dos puntos distintos $x, y \in X$. Entonces existen $r_x, r_y > 0$ tales que*

$$B(x,r_x) \cap B(y,r_y) = \phi$$

Demostración. Sea $r = d(x,y)$, entonces las bolas $B(x,\frac{r}{2})$ y $B(y,\frac{r}{2})$ abiertas, tienen intersección vacía. En efecto, veamos que ningún punto de la primera puede estar en la segunda.

Si $z \in B(x,\frac{r}{2})$, entonces, por la desigualdad triangular

$$d(z,y) \geq d(x,y) - d(z,x) = r - d(z,x) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

con lo que $z \notin B(y,\frac{r}{2})$. Para la otra bola se hace de la misma forma. □

1.3 Conjuntos abiertos y cerrados

1.3.1 Conjuntos Abiertos

Definición 1.5. En (X, d), un subconjunto A se dice abierto, si para cada $a \in A$, existe $r_a > 0$ (que depende de a) tal que $B(a, r_a) \subset A$.

Teorema 1.2. *En un espacio métrico (X, d), para cada $x \in X$ y $r > 0$, la bola $B(x, r)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $y \in B(x, r)$ y $s = d(x, y) < r$; es $B(y, r - s) \subset B(x, r)$. □

Definición 1.6. En (X, d), un subconjunto F se dice cerrado, si su complemento es un conjunto abierto.

En general en un espacio métrico habrán subconjuntos que no son ni abiertos ni cerrados. Por ejemplo $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $(\mathbb{R}, d_u)$.
La siguiente proposición afrece la primera caracterización de los conjuntos cerrados

Proposición 1.2. *Un subconjuntp F de un espacio métrico (X, d) es cerrado si y sólo sí, para todo $x \notin F$ existe una bola abierta, de centro x y radio $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap F \neq \phi$*

Demostración. Si $F \subset X$ es cerrado quiere decir que $X - F$ es abierto; por tanto, para todo $x \in F$, existe una bola de centro x y radio $r > 0$ talque $B(x, r) \subset X - F$ y por lo tanto se cumple que $B(x, r) \cap F = \phi$. Por otro lado, si para todo $x \notin F$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap F = \phi$, entonces $B(x, r) \subset X - F$ y así $X - F$ es abierto, luego F es cerrado.

□

1.3.2 Adherencia

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$. Se dice que $x \in X$ es un **punto adherente** de A si todo entorno U de x cumple $U \cap A \neq \phi$, es decir, no hay ningún entorno de x totalmente contenido en $X - A$.

El conjunto de puntos adherentes de A se llama la adherencia o clausura de A y se representa por $\overline{A}$

Observación 1.2. Tal y como hemos definido la adherencia de un conjunto A, lo evidente que $A \subset \overline{A}$.

Teorema 1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces:*

i) El conjunto $\overline{A}$ es cerrado.

ii) $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A, es decir, si B es un conjunto cerrado tal que $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset B$.

Demostración.

i) Es una consecuencia inmediata de la proposición (1.2) y la definición (1.7).

ii) Razonaremos por reducción al absurdo. Sea B un cerrado tal que $A \subset B$ y supongamos que $\overline{A} \not\subset B$, es decir, que existe un punto $x \in \overline{A}$ tal que $x \notin B$.
Entonces $X - B$ es un abierto que contiene al punto x, y como $A \subset B$, se cumple que $(X - B) \cap A = \phi$. Por lo tanto, x no es un punto adherencia de A, lo cual es una contradicción.

□

Corolario 1.1. *A es cerrado si y sólo sí, $A = \overline{A}$*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema (1.3) □

1.4 Nociones analíticas en espacios métricos

1.4.1 Definición de una sucesión

Definición 1.8. Una sucesión en $X \neq \phi$ es una aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$. Normalmente, en vez de usar la notación funcional, se utiliza la notación con subíndices $f(n) = x_n$ y se habla de la sucesión f o $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El punto x_n se llama término de la sucesión y $Rg(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = f(\mathbb{N})$ es el rango de la sucesión.

Observación 1.3. Destacamos a continuación algunas propiedades relativas a las sucesiones:

i) La función f definiendo una sucesión no tiene porque ser inyectiva, y por lo tanto, en una sucesión pueden existir términos iguales.

ii) No hay que confundir el rango con la propia sucesión: Si $X = \mathbb{R}$, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión oscilante, cuyo rango es finito $\{-1, 1\}$.

iii) Si f es constante, es decir, existe $x \in X$ talque $f(n) = x$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se habla la sucesión constante igual a x y en este caso $f(\mathbb{N}) = \{x\}$

Definición 1.9. Una subsucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es otra sucesión definida por $y_n = x_{\varphi(n)}$, donde $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente.

Lema 1.2. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es una función estrictamente creciente, es $\varphi(n) \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.3. Toda sucesión es una subsucesión en sí misma.

Demostración. Basta toma $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ como la función identidad. □

Observación 1.4. Denotaremos a los elementos de las subsucesiones $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como $x_{\varphi(n)} = x_{n_k}$.

1.4.2 Sucesiones convergentes

Definición 1.10. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (X,d). Se dice que $x \in X$ es llamado límite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ talque para cada $n \geq n_\epsilon$ es $d(x_x, x) < \epsilon$. Se dice también que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y se denotará por $\{x_n\} \longrightarrow x$.

Lema 1.4. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (X,d), tal que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Entonces, $\{x_n\}$ converge a x.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, por la propiedad Arquimediana de los enteros, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$, osea, $\frac{1}{n_0} < \epsilon$. Entonces si $n \geq n_0$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$ y por lo tanto $d(x_n, x) < \frac{1}{n} < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$, por lo que termina la demostración de convergencia. □

Teorema 1.4. *Una sucesión convergente en (X,d), lo hace de manera única.*

Demostración. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converja a dos puntos distintos $x \neq y$.
Sea $d(x,y) = r > 0$. Por la propiedad de Hausdorff, es $B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2}) = \phi$, lo cual contradice la convergencia.

□

Observación 1.5. Si $\{x_n\} \longrightarrow x$ en (X,d) se denotará también como $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x$

Observación 1.6. Las sucesiones oscilantes no convergen en ningún espacio métrico, en efecto, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n = x$ para n par y $x_n = y \neq x$ para n impar, si $\{x_n\} \longrightarrow z$, $\epsilon = \frac{1}{2}d(x,y)$ debería ser $x_n \in B(z,\epsilon)$ para n suficientemente grande, es decir $x, y \in B(z,\epsilon)$, lo que es imposible.

Teorema 1.5. *En (X,d), si $\{x_n \longrightarrow x\}$, cualquier subsucesión $\{x_{n_k}\} \longrightarrow x$*

Demostración. Basta utilizar el lema (1.4) □

Observación 1.7. El reciproco no es cierto: en $(\mathbb{R}, d_u)$ la sucesión $\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge, pero la subsucesión de los términos $\{(-1)^{2n}\} \longrightarrow 1$.

1.4.3 Caracterizaciones de los conjuntos cerrados

El siguiente resultado pone de manifiesto que en un espacio métrico podemos estudiar cualquier noción y propiedad topológica mediante el uso de sucesiones.

Proposición 1.3. ***(Caracterización secuencial de adherencia)***. *Sea A un subconjunto de (X, d) y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo sí, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A que converge a x.*

Demostración. Supongamos que $x \in \overline{A}$. Entonces para natural n, existe un punto $x_n \in A$ tal que $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. De la desigualdad anterior, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.
Recíprocamente, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A que converge a x. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_\epsilon$ es $d(x_n, x) < \epsilon$, esto implica que $B(x, \epsilon) \cap A$ es no vacío. Esto prueba que $x \in \overline{A}$. □

Corolario 1.2. ***(Caracterización secuencial de los conjuntos cerrados)***. *A es cerrado si y sólo sí, dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A tal que $\{x_n\} \longrightarrow x$, es $x \in A$.*

Demostración. Si A es cerrado y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A tal que $\{x_n\} \longrightarrow x$, por la proposición (1.3), $x \in \overline{A}$ y como A es cerrado, $x \in A$.
Recíprocamente. Supongamos que A contiene el límite de toda sucesión convergente en A.
Sea $x \in A$, por la proposición (1.3) existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{x_n\} \longrightarrow x$. Por hipótesis $x \in A$. Por tanto, A es cerrado. □

1.4.4 Sucesiones de Cauchy

Definición 1.11. En (X, d) una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se llama de Cauchy, si para cada $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_\epsilon$ es $d(x, x_m) < \epsilon$, es decir, los términos de la sucesión se acercan entre sí a medida que los índices crecen.

Teorema 1.6. *En (X, d), si $\{x_n\} \longrightarrow x$, entonces es de Cauchy.*

Demostración. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en (X, d), entonces dado $\epsilon/2 > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, n) < \frac{\epsilon}{2}$ si $n \geq n_\epsilon$, por lo que

$$d(x_n, d_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \text{para } m, n \geq n_\epsilon$$

□

Observación 1.8. El recíproco no es cierto en general: En $((0, 1], du)$, la sucesión $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, pero no convergente.

Teorema 1.7. *En (X, d), si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y posee una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\} \longrightarrow x$, entonces $\{x_n\} \longrightarrow x$*

Demostración. Como $\{x_{n_k}\} \longrightarrow x$, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ es $d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2}$, y la condición de Cauchy dice que para $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_1$ es $d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$. Tomando $n_\epsilon = \text{máx}\{n_0, n_1\}$, para $n \geq n_\epsilon$ se tiene que

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x_n) < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Teorema 1.8. *En (X, d), toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Consideramos $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ implica que $d(x_n, x_m) < 1$. Ahora

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_0) < 1 + d(x_{n_k}, x_0) \text{ para todo } n > n_0$$

Por lo tanto $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} d(x_n, x_0) \leq 1 + \sup\limits_{1<k<n_0} d(x_k, x_0)$. □

El siguiente lema ofrece una caracterización para las sucesiones de Cauchy.

Lema 1.5. Sean (X, d) un espacio métrico, $\{x_n\}$ una sucesión en X y $\alpha < 1$ tal que:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy

Demostración. En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$$

esto implica:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$$

Ahora sean $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ es decir, existe $h \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + h$. Entonces:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+h}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+h-1}, x_{n+h}) \\ &\leq \alpha^n d(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n+h-1} d(x_0, x_1) \\ &= \alpha^n d(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}) \\ &= \alpha^n \cdot \frac{(1-\alpha^n)}{1-\alpha} \cdot d(x_0, x_1) \\ &< \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned} \tag{1.3}$$

De (1.4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) = 0$$

Por tanto se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. □

1.4.5 Completitud

Definición 1.12. Un espacio métrico se llama completo, si toda sucesión de Cauchy es convergente. Así, es este tipo de espacios, se puede averiguar si una sucesión es convergente, sin necesidad de calcular su límite

Teorema 1.9. *Si (X, d) es completo y $A \subset X$ es cerrado, entonces (A, d_A) es completo.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (A, d_A) como (X, d) es completo, $\{x_n\} \longrightarrow x$ en (X, d). Pero $x \in \overline{A} = A$. □

Teorema 1.10. *Si $A \subset X$ y (A, d_A) es completo, entonces A es cerrado en (X, d)*

Demostración. Sea $x \in \overline{A}$, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A talque $\{x_n\} \longrightarrow x$. Luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (A, d_A). Por completitud y unicidad del límite, es necesariamente $x \in A$. □

1.5 Aplicaciones continuas sobre espacios métricos

Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) espacios métricos y $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ una función

Definición 1.13. Si $a \in X$, se dice que f es continua en a, si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ talque para cada $x \in X$ verificando $d_X(x, a) < \delta$, es $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Por la definición de bola abierta, esta definición es equivalente a decir que f es continua en a, si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ talque

$$f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \epsilon)$$

donde $f(B_X(a, \delta))$ es la imagen de $B_X(a, \delta)$ bajo f, es decir

$$f(B_X(a, \delta)) = \{y \in Y : \ existe\ x \in B(a, \delta)\ talque f(x) = y\}$$

y $B_Y(f(a), \epsilon)$ es la bola en Y de radio ϵ alrededor de $f(a)$.

Observación 1.9. Sea $a \in X$, y definimos $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $f(x) = d_X(x, a)$, entonces f es continua en X, esto quiere decir que la función distancia es una función continua.

Definición 1.14. Se dice que f es continua en X (o simplemente continua), si es continua en a para cada $a \in X$.

Observación 1.10. $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ no es continua en $a \in X$ si verifica cualquiera de las dos condiciones equivalentes siguientes:

i) Existe $\epsilon_0 > 0$, tal que para cada $\delta > 0$ existe $x_\delta \in X$ tal que $d_X(x_\delta, a) < \delta$ pero es $d_Y(f(x_\delta), f(a)) > \epsilon_0$.

ii) Existe $\epsilon_0 > 0$, tal que para cada $\delta > 0$ es $f(B_X(a, \delta)) \not\subset B_Y(f(a), \epsilon_0)$

Teorema 1.11. *La aplicación $f : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ es continua en x si y sólo sí, para cada sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X con $\{x_n\} \longrightarrow x$, la sucesión de imágenes verifica que $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$.*

Demostración. Si f es continua, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$ tal que $f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \epsilon)$. Como $\{x_n\} \longrightarrow x$, para δ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ es $x_n \in B_X(x, \delta)$, con lo que $f(x_n) \in B_Y(f(x), \epsilon)$ y queda probado que $\{f(x_n\} \longrightarrow f(x)$. Recíprocamente, supongamos que f no es continua. Existe $\epsilon > 0$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_X(x, \frac{1}{n}) - \{x\}$ de modo que $f(x_n) \notin B_Y(f(x), \epsilon)$. Hemos construido de este modo una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x, (ver lema 1.4) pero tal que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a $f(x)$.

□

Ejemplo 1.4. Ejemplos de completitud

1. Completitud de $\mathbb{R}^n$. El espacio $\mathbb{R}^n$ con cualquiera de las tres métricas d_1, d_2, d_∞ es completo. Para probar esto, se sugiere aplicar la proposición 1.8.

2. Completitud de ℓ^∞. Veamos que el espacio ℓ^∞ es completo.
   Sea $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞. Entonces, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_\varepsilon$ tal que para $n, m > n_\varepsilon$

   $$d(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon \Rightarrow |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \epsilon, \forall i \Rightarrow \exists x_i : |x_i^{(m)} - x_i| < \varepsilon$$

   Si llamamos $x = (x_1, x_2, \ldots)$, entonces $d(x^{(m)}, x) < \varepsilon$, es decir $x^{(m)} \to x$.
   Por otra parte, como la sucesión $\{x_i^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a x_i, está acotada, es decir $\exists\ k > 0$: $|x_i^{(m)}| < k$, $\forall\ m$. Aplicando la desigualdad triangular

   $$|x_i| \leq |x_i - x_i^{(m)}| + |x_i^{(m)}| < \varepsilon + k$$

   lo que significa que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ esta acotado. Esto prueba que $x \in \ell^\infty$

3. Si $X = C[a, b]$ y $d_\infty(f, g) = \operatorname*{máx}_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$, mostraremos que este espacio $(C[a, b], d_\infty)$ es completo.

En efecto, si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, $\text{máx}_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon$, para $n,m>n_\epsilon$. Entonces $|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon$, $\forall\, x\in[a,b]$. Por tanto por el criterio de convergencia de Cauchy, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $[a,b]$. Por lo tanto el espacio es completo.

4. $X=C[a,b]$ con la métrica $d(f,g)=\left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2dt\right)^{1/2}$, para todo $f,g\in X$, no es completo.

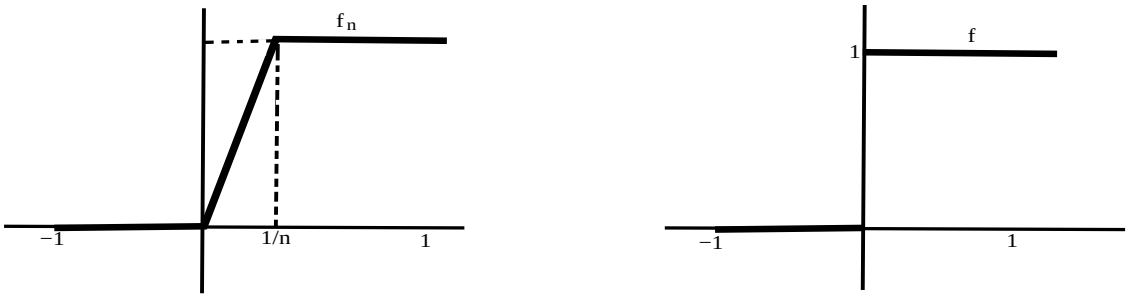

Fig 1.2

Si hacemos por ejemplo $a=-1$, $b=1$, la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } -1\le x\le 0\\ nx & \text{si } 0<x\le 1/n\\ 1 & \text{si } 1/n<x\le 1\end{cases}$$

es de Cauchy, pero el límite

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } 1\le x\le 0\\ 1 & \text{si } 0<x\le 1\end{cases}$$

no es continua en $x=0$. Entonces $f\notin C[a,b]=X$.

Por lo tanto X no es completo.

5. Finalmente es claro que $(\mathbb{Q},d_u|_{\mathbb{Q}})$ no es un espacio métrico completo, ya que la sucesión de números racionales

$$\{q_n=1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\cdots+\tfrac{1}{n!}\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión de Cauchy, sin embargo, no converge en $(\mathbb{Q},d_u|_{\mathbb{Q}})$.

1.6 Punto Fijo y Contracción

Definición 1.15. Sea X un conjunto no vacío y $T : X \longrightarrow X$ una aplicación. Un punto $x \in X$ se llama punto fijo de T, si $T(x) = x$, es decir x se mantiene fijo por T.

Para cada aplicación $T : X \longrightarrow X$, podemos definir el conjunto de puntos fijos como

$$fix(T) = \{x \in X : x = T(x)\}$$

Nótese que el concepto de punto fijo es muy general, ya que no requiere siquiera que X tenga alguna estructura, tan sólo se requiere un conjunto diferente del vacío.

Ejemplo 1.5.

1. El origen de $0 \in \mathbb{R}^n$ es el único punto fijo de la aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = -x$.

2. La aplicación $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $T(x) = x^2$ posee dos puntos fijos, que son precisamente el cero y el uno.
   Los puntos fijos de una función real de variable real son las abscisas de los puntos del plano en que la gráfica de T intersecta a la diagonal $y = x$

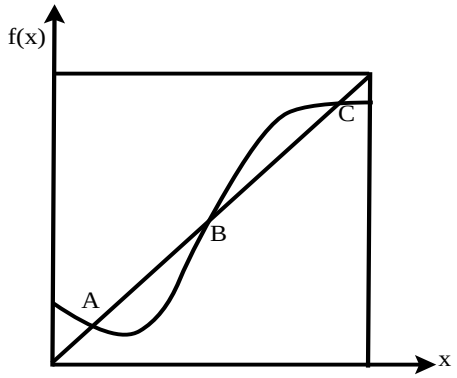

Fig 1.3: *Intersección de la gráfica de T con la diagonal $y = x$*

3. Existen aplicaciones que no poseen puntos fijos como por ejemplo la traslación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dadas por $T(x) = x + a$, $a \neq 0$.

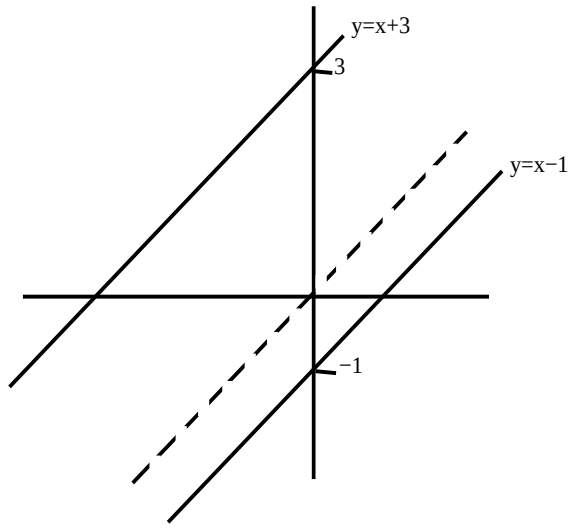

Fig 1.4: *La traslación no posee puntos fijos*

4. También la aplicación $T : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ definida por $f(x) = \frac{x}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no posee punto fijo. En efecto, Si $T(x) = x$ tenemos que $x = \frac{x}{2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ de donde se concluye que $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = 2$, lo que es imposible.

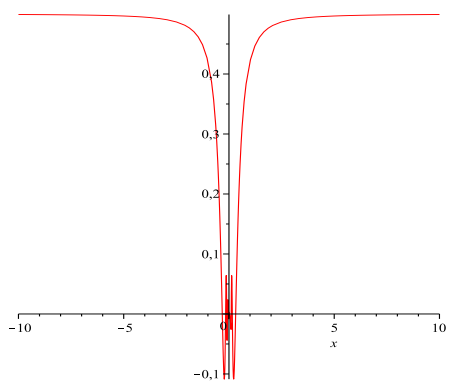

Fig 1.5: *Función* $f(x) = \frac{x}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ *no tiene punto fijo*

5. Nada impide que una aplicación tenga infinitos puntos fijos como es el caso de la aplicación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$

Definición 1.16. Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico. Una aplicación $f : X \longrightarrow X$ se llama contracción si existe un número real positivo $\alpha < 1$ tal que para todo $x, y \in X$.

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \qquad (\alpha < 1)$$

Ejemplo 1.6.

La función $f :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2/3$, es contractiva con coeficiente de contracción $\alpha = 2/3$, puesto que, cualquiera que sean x, $y \in]0, 1[$, se cumple:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3}\right| = \left|\frac{1}{3}(x - y)(x + y)\right| \leq \frac{2}{3}|x - y|\cdot$$

Definición 1.17. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d). Decimos que $\{x_n\}$ es una sucesión contracción, si para algún $0 < \alpha < 1$, se tiene que $d(x_{n+1}, x_n) < \alpha d(x_n, x_{n-1})$, para cualquier índice natural $n \geq 2$.

Proposición 1.4 (Propiedad de las contracciones)**.**
Si $\{x_n\}$ es una sucesión contracción de constante α, se cumplen las siguientes desigualdades:

1. *Comparando dos términos consecutivos con los dos primeros términos*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^{n-1} d(x_2, x_1), \quad \forall n \geq 2$$

2. *Dos términos cualesquiera con los dos primeros términos*

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} d(x_2, x_1), \quad \textit{para cada } m > n$$

Demostración.

1. La relación es cierta para $n = 2$, se refiere a la condición de la contracción para $n = 2$. Es decir, se cumple,

$$d(x_3, x_2) \leq \alpha d(x_2, x_1)$$

Supongamos que la relación es cierta para $n > 2$. Demostraremos la validez de la relación para el sucesor $n + 1$, es decir debemos mostrar la validez de la relación

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_2, x_1)$$

De la hipótesis contractiva y de la hipótesis inductiva para n se cumple

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq \alpha d(x_{n+1}, x_n) < \alpha^{n-1} d(x_2, x_1) = \alpha^n d(x_2, x_1)$$

2. Para $m > n$, se tiene

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$

luego, usando 1 se tiene

$$d(x_m, x_n) \leq (\alpha^{m-2} + \alpha^{m-3} + \cdots + \alpha^{n-1}) d(x_2, x_1)$$

sacando factor común α^{n-1} se tiene:

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{m-n-1}) d(x_2, x_1)$$

luego, $d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1} \left(\dfrac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \right) d(x_2, x_1)$

Afirmación: $1 - \alpha^{m-n} < 1$.

En efecto, α^n, $\alpha^m > 0$ pues $0 < \alpha < 1$. Entonces, $\alpha^n - \alpha^m < \alpha^n$, y por lo tanto,

$$\frac{\alpha^n - \alpha^m}{\alpha^n} < 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha^m}{\alpha^n} < 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha^{m-n} < 1$$

Así, $d(x_m, x_n) \leq \alpha^{n-1} \left(\dfrac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} \right) d(x_2, x_1) \leq \dfrac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} d(x_2, x_1)$

□

Proposición 1.5. *Toda sucesión que es contracción es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Si $\{x_n\}$ es una contracción, entonces existe $0 < \alpha < 1$ que cumple, $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$, para cada índice $n \geq 2$.

Dado $\epsilon > 0$, debemos mostrar que existe $N \in \mathbb{N} : d(x_m, x_n) < \epsilon$ si $n, m \geq N$

De la proposición 1.4 en 2 tenemos

$$d(x_m, x_n) < \frac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} d(x_2, x_1) \text{ para cada índice } m > n$$

Como la sucesión $\dfrac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} d(x_2, x_1) \longrightarrow 0$, cuando $n \longrightarrow \infty$, existe un índice natural N que cumple,

$$\frac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} d(x_2, x_1) < \epsilon, \text{ para cada índice } n \geq N$$

Así que para cada par de índices $p, q \geq N$, si $p < q$ se tiene

$$d(x_q, x_p) < \frac{\alpha^{p-1}}{1-\alpha} d(x_2, x_1) < \epsilon \text{ es decir, } \{x_n\} \text{ es de Cauchy}\cdot$$

□

1.7 Principio de Contracción de Banach

El Principio de Contracción de Banach es un teorema de existencia y unicidad para puntos fijos de funciones contractivas, y también da un procedimiento constructivo para obtener aproximaciones cada vez mejores del punto fijo (solución práctica del problema). Este procedimiento es llamado **iteración**, una definición mas precisa es la siguiente.

Definición 1.18. La iteración es un método tal que dada $f : X \longrightarrow X$ una aplicación, elegimos un punto arbitrario x_0 en X y determinamos sucesivamente $x_1, x_2, \cdots$ de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$ con $n = 0, 1, 2, \cdots$ es decir

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \ \cdots, \quad x_{n+1} = f(x_n), \ \cdots.$$

Los procedimientos de iteración son usados a menudo en muchas ramas de la matemática aplicada, y las pruebas de convergencia y de estimaciones de error son comúnmente obtenidas aplicando el principio de contracción de Banach.

Teorema 1.12 (Principio de Contracción de Banach)**.**
Consideremos un espacio métrico (X, d) donde $X \neq \emptyset$. Supongamos que X es completo. Sea $f : X \longrightarrow X$ una contracción en X, entonces T tiene un único punto fijo.

Demostración. Construiremos una sucesión $\{x_n\}$ y mostraremos que es de Cauchy y por lo tanto que es convergente en X por ser X completo, y entonces probaremos que este límite x es un punto fijo de f y f no tiene otros puntos fijos. Esta será la idea de la prueba.
Sea $x_0 \in X$, calculemos la secuencia x_1, $x_2, \ldots$ de una relación de la forma:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Esto es que nosotros escogemos un $x_0 \in X$ y determinamos sucesivamente $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = Tx_1, \ldots$

Afirmación: $\{x_n\}$ es una sucesión de contracción.

En efecto, $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1})$.

Luego, por la proposición 1.5 $\{x_n\}$ es de Cauchy, y entonces, existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x \in X$ cuando $n \to \infty$.

A continuación mostraremos que x es punto fijo de la aplicación T.

En efecto,

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, f(x)) \quad \text{para cualquier } m \\ d(x, f(x)) &\leq d(x, x_m) + d(f(x_{m-1}), f(x)) \\ &\leq d(x, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x) \end{aligned}$$

tomando límite cuando $m \to \infty$, se concluye: $d(x, f(x)) = 0$, por lo tanto $f(x) = x$.

De esta manera queda demostrado que x es punto fijo de f.

Veamos que x es el único punto fijo de f.

En efecto, supongamos que $\exists\ y \in X$, $x \neq y$ tal que $f(y) = y$.

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \text{de donde}$$

$d(x, y) = 0$, por lo tanto $x = y$ (contradicción). □

Como se ve, la completitud del espacio es esencial para la validez del teorema precedente y no es difícil de encontrar ejemplos de aplicaciones contractivas en espacios métricos no completos que carecen de puntos fijos.

por otra parte, el recíproco del teorema no es cierto; como se pone de manifiesto en el ejemplo siguiente, existe aplicaciones no contractivas que poseen un único punto fijo.

Ejemplo 1.7. Consideremos el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ de la recta real y la aplicación

$$f(x) = x - sen(\pi x)$$

Es trivial comprobar que $x = 1$ es un punto fijo de f y es el único en $[\frac{1}{2}, 1]$ ya que los puntos fijos son las soluciones de la ecuación

$$sen(\pi x) = 0$$

sin embargo f no es contractiva porque, por ejemplo,

$$|f(\tfrac{1}{2}) - f(1)| = |\tfrac{1}{2} - sen(\tfrac{\pi}{2}) - 1 + sen(\pi)| = \tfrac{3}{2} > \tfrac{1}{2}$$

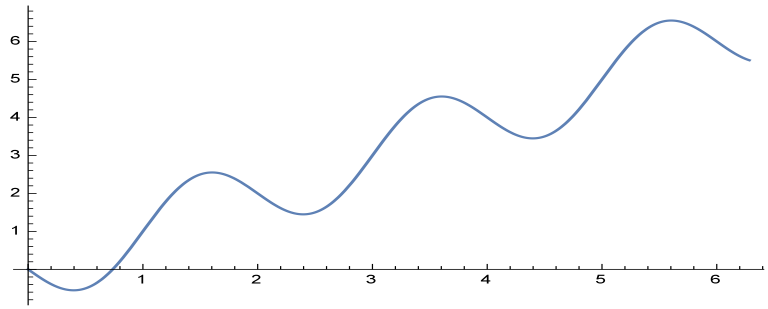

Fig 1.6: *Gráfica de la función* $f(x) = x - sin(\pi x)$

Ejemplo 1.8.

Consideremos (X, d) el subespacio métrico de $\mathbb{R}$, dado por $X = \mathbb{R} - \{0\}$ con la métrica usual. Claramente X no es completo. Tomando $0 < M < 1$, definimos la función $f : X \longrightarrow X$ tal que $\forall\, x \in X$, $f(x) = Mx$.

$$|f(x) - f(y)| = M|x - y|, \quad x, y \in X$$

f es claramente una contracción y sin embargo, no admite punto fijo alguno.

Ejemplo 1.9.

Consideremos el espacio métrico completo de $X = [1, +\infty)$ con la métrica usual.
Sea $f : X \longrightarrow X$ dada por $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f(x) - f(y) = x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = (x - y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right)$$

De donde $|f(x) - f(y)| = |x - y|\left(1 - \dfrac{1}{xy}\right) < |x - y|$, $\forall\, x, y \in [1, +\infty)$ con $x \neq y$
Claramente f es una función de contracción y sin embargo, dado que $f(x) > x\ \forall\, x \in X$, f no tiene punto fijo.

Corolario 1.3. *Sea $f : X \longrightarrow X$, (X, d) un espacio métrico completo. Si para algún número natural $n \geq 1$ la función f^n es una contracción, entonces f admite un único punto fijo.*

Demostración. Designamos por $g = f^n$. Existe un número real α con $0 < \alpha \leq 1$, tal que

$$d(g(x), g(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall\, x, y \in X$$

En virtud del teorema anterior, existe un único punto $x \in X$ con $g(x) = x$. Por otra parte, nótese que

$$g \circ f = f^{n+1} = f \circ g$$

de donde $f(x) = f(g(x)) = g(f(x))$.

Se verifica entonces que:

$$d(x, f(x)) = d(g(x), g(f(x))) \leq \alpha d(x, f(x))$$

lo cual implica que $d(x, f(x)) = 0$, es decir, $x = f(x)$, ya que $0 < \alpha < 1$.

De esta manera concluimos que x también es punto fijo de f, veamos que x es el único punto fijo de f.

En efecto, si para algún $y \in X$, se tiene $f(y) = y$, necesariamente $g(y) = y$, de donde $y = x$, por la unicidad del punto fijo de g.

Por lo tanto f tiene un único punto fijo. □

Ejemplo 1.10.

Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \geq 0 \\ -x/4 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|f(x) - f(y)| = |-2x + 2y| = 2|x - y| \ \text{ si } x, y > 0$$

Así queda claro que, $d(f(x), f(y)) = 2d(x, y)$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$

Por lo tanto f no es una contracción. Por otro lado tenemos que

$$f(f(x)) = \begin{cases} -2f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ \frac{-f(x)}{4} & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f(f(x)) = \begin{cases} -2(\frac{-x}{4}) & \text{si } x < 0 \\ -\frac{(-2x)}{4} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

De donde tenemos que $f^2(x) = \dfrac{x}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, claramente f^2 es una contracción. Por lo tanto, usando el corolario 1.3, concluimos que f admite un único punto fijo, de hecho $x = 0$ es el único punto fijo en f.

1.8 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definición 1.19. Se dice que un conjunto $\mathcal{P}$ esta ordenado parcialmente por una relación binaria $\preceq$ si:

(I) $a \precsim b$ y $b \precsim c$ implican $a \precsim c$.

(II) $a \precsim a$ para todo $a \in \mathcal{P}$.

(III) $a \precsim b$ y $b \precsim a$ implican $a = b$.

Un subconjunto $\mathcal{Q}$ de un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{P}$, se dice totalmente ordenado, si cualquiera dos elementos en $\mathcal{P}$ son comparables es decir, si para todo $a, b \in \mathcal{Q}$ verifica $a \preceq b$ o bien $b \preceq a$

Ejemplo 1.11. Ejemplos de conjuntos parcialmente ordenados

1. El orden $\leq$ usual en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

2. Si $X \neq \emptyset$, la inclusión $\subset$ es una relación de orden en $P(E)$.
   En general, para referirse a relaciones de orden en cualquier conjunto utilizaremos la notación $\leq$ o la notación $\precsim$. Si a, b no están relacionados por la relación de orden $\precsim$, esto es, $a \not\precsim b$ y $b \not\precsim a$ se dice que no son comparables.

3. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y definamos en él la relación $x \precsim y$ si y solo sí x es divisor de y. El orden dado por esta relación no es total, pues existen infinitas parejas de números naturales que no son comparables.

Al par $(\mathcal{P}, \subset)$ se le llama conjunto (parcialmente) ordenado. A menudo se dice que $\mathcal{P}$es un conjunto ordenado cuando se sobrentiende implícitamente el orden definido en $\mathcal{P}$. También se dice que $\preceq$ es un orden en $\mathcal{P}$. $\mathcal{P}$.

1.8.1 Elementos notables

Sea $(\mathcal{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Damos las siguientes definiciones duales:

1. Se dice que $k \in \mathcal{P}$ es **cota superior** (**inferior**) de $\mathcal{Q}$, si $b \leq k (b \geq k)$, $\forall\, b \in \mathcal{Q}$

2. Si $\mathcal{Q}$ tiene alguna cota superior (inferior) en $\mathcal{P}$ se dice que $\mathcal{Q}$ está **acotado superiormente** (**inferiormente**). Si $\mathcal{Q}$ posee cota superior e inferior se dice **acotado**

3. La más pequeña (grande) de las cotas superiores (inferiores) de $\mathcal{Q}$, si existe, se llama **supremo** (**ínfimo**). Además si el supremo (ínfimo) de $\mathcal{Q}$ está en $\mathcal{Q}$, recibe el nombre de **máximo** (**mínimo**). Si $\mathcal{Q}$ posee supremo (ínfimo) en $\mathcal{P}$, a causa de la antisimetría de la relación $\leq$, éste es único

4. Se dice que $m \in \mathcal{P}$ es un elemento **maximal** (**minimal**) de $\mathcal{P}$ si no admite elementos en $\mathcal{P}$ posteriores (anteriores), es decir, si se tiene que $a \geq m \rightarrow a = m$ $(a \leq m \rightarrow a = m)$

Capítulo 2:
Existencia y unicidad de puntos fijos en espacios métricos completos parcialmente ordenados

El propósito de este capítulo es mostrar la existencia y unicidad de un punto fijo para ciertas funciones que no necesariamente son contracciones y que a la vez están definidas sobre espacios métricos parcialmente ordenados. Usando, en nuestras hipótesis, las funciones de distancia alternante.

2.1 Aplicaciones continuas y no decrecientes

Definición 2.1. Una función de distancia alternante (o "altering distance") es una función $\psi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ que satisface

1. $\psi(t) = 0$ si y sólo sí $t = 0$.
2. ψ es monótona no decreciente.
3. ψ es continua.

Definición 2.2. Si $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y $f : X \longrightarrow X$, decimos que f es monótona no decreciente si $x, y \in X$

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$

Ejemplo de función de distancia alternante.
Considere $\psi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ definida como $\psi(t) = ln(t^2 + 1)$, es una función distancia alternante, pues satisface las condiciones de la definición 2.1 (otro ejemplo $\psi(t) = arctan\ t$)

Definición 2.3. Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \longrightarrow X$ una función. Se dice que T es débilmente contractiva si

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) - \psi(d(x, y)) \quad \forall x, y \in X$$

donde ψ es una función de distancia alternante.

Nótese que, si tomamos $\psi(t) = (1 - \alpha)t$ para $0 < \alpha \leq 1$ entonces la desigualdad se reduce a la definición 1.15. Además, que para que una función sea débilmente contractiva implica continuidad.
A continuación Rhodes [8] extiende y generaliza estos conceptos en el contexto de los espacios métricos completos para demostrar la unicidad de punto fijo cuando f es débilmente contractiva

Teorema 2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una aplicación débilmente contractiva. Entonces f tiene un único punto fijo en X.*

Demostración.
Primero demostraremos la existencia de punto fijo, consideremos $x_0 \in X$ y definimos $x_{n+1} = f(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Como f es una aplicación débilmente contractiva, entonces.

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq d(x_n, x_{n+1}) - \psi(d(x_n, x_{n+1}))\cdot$$

Si tomamos $\delta_n = d(x_n, x_{n+1})$, entonces tenemos que

$$\delta_{n+1} \leq \delta_n - \psi(\delta_n) \leq \delta_n \tag{2.1}$$

Por lo tanto $\{\delta_n\}$ es una sucesión no negativa no creciente, y en consecuencia posee un límite $\delta^* \geq 0$. Por otro lado supongamos que $\delta^* > 0$. Como ψ es no decreciente, $\psi(\delta_n) \geq \psi(\delta^*) > 0$.

Luego, tenemos a partir de (2.1), $\delta_{n+1} \leq \delta_n - \psi(\delta^*)$. Ahora afirmamos afirmamos que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\delta_{N+m} \leq \delta_m - N \cdot \psi(\delta^*),\ \forall m \in \mathbb{N}$$

La ecuación anterior lo demostraremos por inducción. Si para $N = h$ se cumple que $\delta_{h+m} \leq \delta_m - h\psi(\delta^*)$, entonces para $N = h + 1$ se cumplirá que

$$\delta_{(h+1)+m} \leq \delta_m - (h+1)\psi(\delta^*)$$

En efecto.

$$\begin{aligned} \delta_{(h+1)+m} = \delta_{h+(m+1)} \quad &\leq \delta_{m+1} - h\psi(\delta^*) \\ &\leq \delta_m - \psi(\delta^*) - h\psi(\delta^*) \\ &= \delta_m - (h+1)\psi(\delta^*) \end{aligned}$$

entonces

$$\delta_{(h+1)+m} = \delta_m - (h+1)\psi(\delta^*)$$

se concluye que $\exists N$ tal que $\delta_{N+m} \leq \delta_m - N\psi(\delta^*)$ sabemos que δ_n es convergente por lo tanto δ_n es de Cauchy.

De la igualdad anterior tenemos que

$$\delta_m - \delta_{N+m} \geq N\psi(\delta^*)$$

haciendo tender a $m \longrightarrow \alpha$ tenemos que

$$\lim_{m \longrightarrow \alpha} |\delta_m - \delta_{N+m}| \geq N\psi(\delta^*)$$

$$0 \geq N\psi(\delta^*)$$

Ahora haciendo un análisis decimos que cuando N es suficientemente grande tenemos que

$$0 \geq \alpha$$

Lo anterior es una contradicción.

Por lo tanto $\delta^* = 0$ es decir $\lim\limits_{n\longrightarrow\alpha} \delta_n$.

Dado un $\epsilon > 0$, como $\lim\limits_{n\longrightarrow\alpha} \delta_n$ entonces

$$\exists N \textit{ tal que } d(x_N, x_{N+1}) \leq \text{mín}\{\frac{\epsilon}{2}, \psi(\frac{\epsilon}{2})\}$$

Ahora probaremos que f es una aplicación de la bola cerrada $\overline{B}(x_N, \epsilon)$ sobre sí misma. Es decir $f(\overline{B}(x_N, \epsilon)) \subset \overline{B}(x_N, \epsilon)$.

Supongamos que $x \in \overline{B}(x_N, \epsilon)$, entonces hay dos casos.

Caso 1: $d(x, x_N) \leq \varepsilon/2$

$$\begin{aligned} d(f(x), x_N) &\leq d(f(x), f(x_N)) + d(f(x_N), x_N) \\ &\leq d(x, x_N) - \psi(d(x, x_N)) + d(x_{N+1}, x_N) \\ &\leq d(x, x_N) + d(x_{N+1}, x_N) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

Caso 2: $\varepsilon/2 < d(x, x_N) \leq \varepsilon$, como ψ es no decreciente entonces

$$\psi(d(x, x_N)) \geq \psi(\varepsilon/2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} d(f(x), x_N) &\quad d(f(x), f(_N)) + d(f(x_n), x_N) \\ &\leq d(x, x_N) - \psi(d(x, x_N)) + d(x_{N+1}, x_N) \\ &\leq d(x, x_N) - \psi(\varepsilon/2) + \psi(\varepsilon/2) \\ &\leq d(x, x_N) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $f(x) \in \overline{B}(x_N, \epsilon)$ es decir que $f(\overline{B}(x_N, \epsilon)) \subset \overline{B}(x_N, \epsilon)$.

Por otro lado $f(x_N) = x_{N+1} \in \overline{B}(x_N, \epsilon)$ entonces $f(x_{N+1}) = x_{N+2} \in \overline{B}(x_N, \epsilon)$ haciendo de forma repetida tenemos que $x_n \in \overline{\overline{B}(x_N, \epsilon)} = \overline{B}(x_N, \epsilon)$ para $n \geq N$. Siendo ϵ arbitrario, se concluye que x_n $\exists z \in X$ tal que $\lim\limits_{n\longrightarrow\alpha} x_n = z$.

Como f es continua

$$f(z) = \lim_{n\longrightarrow\alpha} f(x_n) = \lim_{n\longrightarrow\alpha} x_{n+1} = z.$$

Entonces f tiene punto fijo.

Hemos verificado que f tiene punto fijo.

Por último probaremos la unicidad de f, supongamos que x y y son puntos fijos es decir $f(x) = y$ y $f(y) = y$ entonces

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) - \psi(d(x, y))$$

$$d(x, y) \leq d(x, y) - \psi(d(x, y))$$

$$0 \leq \psi(d(x, y)) \leq 0$$

entonces $\psi(d(x, y)) = 0$, como ψ es distancia alternante tenemos que $d(x, y) = 0$ entonces $x = y$ esto demuestra que f tiene un único punto fijo. □

Recientemente J. Harjani y K. Sadarangni muestran algunos resultados de puntos fijos para funciones débilmente contractivas en el contexto de los espacios métricos parcialmente ordenados usando funciones de distancia alternante.

De hecho, en [3] se agrega que $\lim_{n\to\infty} \psi(t) = \infty$ como una condición adicional a la definición de función de distancia alternante.

Nota 2.1. Para probar los siguientes teoremas, que son una versión del teorema 2.1, en el contexto de los espacios métricos completos parcialmente ordenados.

Teorema 2.2. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supongamos que existe una métrica d en X tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Sea $f : X \to X$ una aplicación continua y no decreciente tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) - \psi(d(x, y)), \qquad \text{para } x \geq y \tag{2.2}$$

donde $\psi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ es una función continua y no decreciente tal que es positivo en $(0, \infty)$, $\psi(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$. Si existe $x_0 \in X$ con $x_0 \leq f(x_0)$
Entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Si $f(x_0) = x_0$ entonces la prueba termina.

Supongamos que $x_0 < f(x_0)$. Por ser f una función no decreciente, obtenemos por inducción que

$$x_0 < f(x_0) \leq f^2(x_0) \leq f^3(x_0) \leq \cdots \leq f^n(x_0) \leq f^{n+1}(x_0) \leq \cdots$$

si hacemos $x_{n+1} = f(x_n)$, para cada $n \geq 1$

$$x_n = f(x_{n-1}) \leq f^2(x_{n-1}) = f(x_n) = x_{n+1}$$

y esto es $x_n \leq x_{n+1}$, entonces x_n y x_{n+1} son comparables. De lo anterior y de (2.2) obtenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq d(x_n, x_{n-1}) - \psi(d(x_n, x_{n-1}))$$

Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_{n_0}, x_{n_0-1}) = 0$ entonces

$$x_{n_0-1} = x_{n_0} = f(x_{n_0-1})$$

y esto es $x_{n_0-1} = f(x_{n_0-1})$, entonces f tiene un punto fijo, la prueba termina.
En otro caso, si suponemos que $d(x_{n+1}, x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, teniendo en cuenta (2.2) y nuestras suposiciones sobre ψ

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) - \psi(d(x_n, x_{n-1})) < d(x_n, x_{n-1})$$

si consideramos $\rho_n = d(x_{n+1}, x_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces reemplazando en lo anterior

$$\rho_n \leq \rho_{n-1} - \psi(\rho_{n-1}) \leq \rho_{n-1} \tag{2.3}$$

Es decir $\rho_n \leq \rho_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Por lo tanto $\{\rho_n\}$ es una sucesión decreciente no negativo, en consecuencia posee un límite, es decir, el $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = \rho*$ de (2.3). Haciendo que $n \to \infty$. De (2.3) haciendo que $n \longrightarrow \infty$, obtenemos

$$\rho^* \leq \rho^* - \psi(\rho^*) \leq \rho^*$$

y, en consecuencia, $\psi(\rho^*) = 0$. Y como ψ es una función de distancia alternante, entonces $\rho^* = 0$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$ En lo que sigue vamos a demostrar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, es una sucesión de Cauchy.
Dado $\epsilon > 0$, como $\rho_n = d(x_{n+1}, x_n) \to 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) \leq \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{2}, \psi\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\right\}$$

entonces se afirma que $f\left(\overline{B(x_{n_0}, \epsilon)} \cap \{y \in X : y \geq x_{n_0}\}\right) \subset \overline{B(x_{n_0}, \epsilon)}$.
Sea $z \in \overline{B(x_{n_0}, \epsilon)} \cap \{y \in X : y \geq x_{n_0}\}$, entonces hay dos casos:

Caso 1: $d(z, x_{n_0}) \leq \dfrac{\epsilon}{2}$

En este caso, como z y x_{n_0} son comparables, obtenemos que

$$\begin{aligned} d(f(z), x_{n_0}) &\leq d(f(z), f(x_{n_0})) + d(f(x_{n_0}), x_{n_0}) \\ &= d(f(z), f(x_{n_0})) + d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) \\ &\leq d(z, x_{n_0}) - \psi(d(z, x_{n_0})) + d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) \\ &\leq d(z, x_{n_0}) + d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(z) \in \overline{B(x_{n_0}, \epsilon)}$

Caso 2: $\dfrac{\epsilon}{2} < d(z, x_{n_0}) \leq \epsilon$. En este caso, como ψ es una función no decreciente, $\psi(d(z, x_{n_0})) \geq \psi\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$ entonces

$$\begin{aligned} d(f(z), x_{n_0}) &\leq d(f(z), f(x_{n_0})) + d(f(x_{n_0}), x_{n_0}) \\ &= d(f(z), f(x_{n_0})) + d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) \\ &\leq d(z, x_{n_0}) - \psi(d(z, x_{n_0})) + d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) \\ &\leq d(z, x_{n_0}) - \psi(\epsilon/2) + d(x_{n_0+1}, x_{n_0}) \\ &\leq d(z, x_{n_0}) - \psi(\epsilon/2) + \psi(\epsilon/2) = d(z, x_{n_0}) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(z) \in \overline{B(x_{n_0}, \epsilon)}$.

Esto demuestra la afirmación

Por otro lado, como $f(x_{n_0}) = x_{n_0+1} \in \overline{B(x_{n_0}, \epsilon)} \cap \{y \in X : y \geq x_{n_0}\}$ entonces $f(x_{n_0+1}) = x_{n_0+2} \in \overline{B(x_{n_0}, \epsilon)} \cap \{y \in X : y \geq x_{n_0}\}$ repitiendo este proceso se sigue que $x_n \in \overline{B(x_{n_0}, \epsilon)}$ para $n \geq n_0$. Siendo ϵ arbitrario, la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es Cauchy y como X es un espacio métrico completo, existe $z \in X$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = z$

Por la continuidad de f implica que

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = z$$

Por lo tanto z es un punto fijo de f, por lo que la prueba termina. $\square$

Teorema 2.3. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supongamos que existe una métrica d en X tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Sea $f : X \to X$ una*

aplicación continua no decreciente tal que

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \psi(d(x, y)) - \phi(d(x, y)), \quad \textit{para } x \geq y$$

donde ψ y ϕ son funciones de distancia alternante.
Si existe $x_0 \in X$ con $x_0 \leq f(x_0)$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Si $f(x_0) = x_0$ entonces la prueba termina. En otro caso, supongamos que $x_0 < f(x_0)$. Por ser f una función no decreciente obtenemos por inducción que

$$x_0 < f(x_0) \leq f^2(x_0) \leq f^3(x_0) \leq \cdots \leq f^n(x_0) \leq f^{n+1}(x_0) \leq \cdots$$

si tomamos $x_{n+1} = f(x_n)$, para cada $n \geq 1$

$$x_n = f(x_{n-1}) \leq f^2(x_{n-1}) = f(x_n) = x_{n+1}$$

y esto es $x_n \leq x_{n+1}$, entonces x_n y x_{n+1} son comparables.
De lo anterior y de la hipótesis obtenemos que

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n+1}, x_n)) &= \psi(d(f(x_n), f(x_{n-1}))) \\ &\leq \psi(d(x_n, x_{n-1})) - \phi(d(x_n, x_{n-1})) \leq \psi(d(x_n, x_{n-1})) \end{aligned} \tag{2.4}$$

entonces $\psi(d(x_{n+1}, x_n)) \leq \psi(d(x_n, x_{n-1}))$
Usando el hecho que ψ es no decreciente tenemos que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n-1}) \tag{2.5}$$

Si existe $n_0 \in N$ tal que $d(x_{n_0}, x_{n_0-1}) = 0$ entonces

$$x_{n_0-1} = x_{n_0} = f(x_{n_0-1})$$

entonces f tiene un punto fijo, la prueba termina
En otro caso, supongamos que $d(x_{n+1}, x_n) \neq 0$ para todo $n \in N$ entonces, teniendo en cuanta (2.5), la sucesión $\{d(x_{n+1}, x_n)\}$ es decreciente y, consecuentemente, existe $r \geq 0$ tal que

$$d(x_{n+1}, x_n) \longrightarrow r \text{ cuando } n \to \infty$$

si tomamos $n \to \infty$ en (2.4) obtenemos que

$$\psi(r) \leq \psi(r) - \phi(r) \leq \psi(r)$$

y esto implica que $\phi(r) = 0$

Como ϕ es una función de distancia alternante, $r = 0$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0 \tag{2.6}$$

En lo que sigue vamos a demostrar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, es una sucesión de Cauchy

Supongamos que $\{x_n\}$ no es una sucesión de Cauchy, entonces, existe $\epsilon > 0$ para lo que podemos encontrar subsucesiones $\{x_{m(k)}\}$ y $\{x_{n(k)}\}$ de $\{x_n\}$ con $n(k) > m(k) > k$ tal que

$$d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \epsilon \tag{2.7}$$

además, correspondiente a $m(k)$ podemos elegir $n(k)$ en una forma tal que es el entero más pequeño con $n(k) > m(k)$ y satisfaciendo (2.7). Entonces

$$d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < \epsilon \tag{2.8}$$

Usando (2.7) y (2.8) y la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned} \epsilon &\leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \\ &\leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) \\ &< d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + \epsilon \end{aligned}$$

Entonces

$$\epsilon \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) < d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + \epsilon$$

si tomamos que $k \to \infty$ y usando (2.6) tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \epsilon \tag{2.9}$$

de nuevo, usando la desigualdad triangular nos da

$$\begin{aligned} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) &\leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) \\ d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) &\leq d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) \end{aligned}$$

nuevamente tomando $k \to \infty$ en las dos desigualdades anteriores y usando (2.6) y (2.9) tenemos que

$$\epsilon \leq \lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})$$

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) \leq \epsilon$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) = \epsilon \tag{2.10}$$

Como $n(k) > m(k)$ y $x_{n(k)-1}$ y $x_{m(k)-1}$son comparables (de hecho $x_{m(k)-1} < x_{n(k)-1}$)
Colocamos $x = x_{n(k)-1}$ y $y = x_{m(k)-1}$ en la hipótesis, obtenemos

$$\begin{aligned}
\psi(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})) &= \psi(d(f(x_{n(k)-1}), f(x_{m(k)-1}))) \\
&\leq \psi(d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})) - \phi(d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})) \\
&\leq \psi(d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})
\end{aligned}$$

ahora, si tomamos $k \to \infty$ y teniendo en cuenta (2.9) y (2.10) tenemos

$$\psi(\epsilon) \leq \psi(\epsilon) - \phi(\epsilon) \leq \psi(\epsilon)$$

y en consecuencia $\phi(\epsilon) = 0$, ϕ es una función de distancia alternante en consecuencia $\epsilon = 0$ que es una contradicción.
Esto muestra que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y como X es un espacio métrico completo, existe $z \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z$$

Por otra parte la continuidad de f implica que

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z$$

Esto demuestra que z es un punto fijo, por lo que queda demostrado el teorema 2.3 $\square$

Ejemplo 2.1.

Sea $X = [0,1] \cup \{2,3,4,\ldots\}$ y la métrica

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{si } x,y \in [0,1], \quad x \neq y \\ x+y & \text{si } (x,y) \notin [0,1]\times[0,1] \text{ y } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases} \tag{2.11}$$

Entonces (X,d) es un espacio métrico completo [1].

Sea $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definido como

$$\psi(t) = \begin{cases} t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t^2, & \text{si } t > 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

y sea $\phi = [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definida como

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t, & \text{si } t > 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

Sea $T : X \to X$ definida por

$$T_x = \begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & \text{si } x \in \{2,3,\ldots\} \end{cases} \tag{2.14}$$

Sin perdida de generalidad, suponemos que $x > y$ y discutimos los siguientes casos

Caso 1: $(x \in [0,1])$. Entonces

$$\begin{aligned} \psi(d(T_x,T_y)) &= \left(x - \tfrac{1}{2}x^2\right) - \left(y - \tfrac{1}{2}y^2\right) \\ &= (x-y) - \tfrac{1}{2}(x-y)(x+y) \leq (x-y) - \tfrac{1}{2}(x-y)^2 \\ &= d(x,y) - \tfrac{1}{2}[d(x,y)]^2 \\ &= \psi(d(x,y)) - \tfrac{1}{2}[d(x,y)]^2 \\ &= \psi(d(x,y)) - \phi(d(x,y)) (\text{pues } x-y \leq x+y) \end{aligned} \tag{2.15}$$

Caso 2: $(x \in \{3,4,\ldots\})$. Entonces

$$\begin{aligned} d(T_x,T_y) &= d(x-1, y - \tfrac{1}{2}y^2) \quad \text{si } y \in [0,1] \\ \text{o } d(T_x,T_y) &= x-1+y-\tfrac{1}{2}y^2 \leq x+y-1 \\ d(T_x,T_y) &= d(x-1,y-1) \quad \text{si } \ y \in \{2,3,4,\ldots\} \\ \text{o } d(T_x,T_y) &= x+y-2 \leq x+y-1 \end{aligned} \tag{2.16}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}\psi(d(T_x,T_y)) &= [d(T_x,T_y)]^2 \leq (x+y-1)^2 < (x+y-1)(x+y+1)\\ &= (x+y)^2-1 < (x+y)^2-\tfrac{1}{2}\\ &= \psi(d(x,y))-\phi(d(x,y))\end{aligned} \tag{2.17}$$

Caso 3: $(x=2)$. Entonces $y\in[0,1]$, $T_x=1$ y $d(T_x,T_y)=1-\left(y-\frac{1}{2}y^2\right)\leq 1$.

Por lo tanto, tenemos $\psi(d(T_x,T_y))\leq\psi(1)=1$

Por otro lado $d(x,y)=2+y$. Se sigue que,

$$\begin{aligned}\psi(d(x,y))-\phi(d(x,y)) &= (2+y)^2-\phi((2+y)^2)\\ &= (2+y)^2-\frac{1}{2}\\ &= \frac{7}{2}+4y+y^2>1\\ &= \psi(d(T_x,T_y))\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta todos los casos anterior, se concluye que la desigualdad sigue siendo válida para ψ, ϕ y T definidos anteriormente y en consecuencia, por el teorema 2.3, T tiene un único punto fijo.

Posteriormente, Amini-Harondi prueban un nuevo teorema sobre la unicidad de punto fijo para contracciones generalizadas en espacios métricos completos parcialmente ordenados. Usando la siguiente clase de funciones.

Notación: Denotemos que $\mathscr{S}$ a la clase de funciones $\beta:[0,\infty)\longrightarrow[0,1]$ que satisface la condición $\beta(t_n)\to 1 \Rightarrow t_n\to 0$.

Teorema 2.4. *Sea $(X,\leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supongamos que existe una métrica d en X tal que (X,d) es un espacio métrico completo. Sea $f:X\to X$ una aplicación creciente tal que existe un elemento $x_0\in X$, con $x_0\leq f(x_0)$.*

Supongamos que existe $\beta\in\mathscr{S}$ tal que

$$d(f(x),f(y))\leq\beta(d(x,y))d(x,y) \text{ para cada } x,y\in X \text{ con } x\geq y. \tag{2.18}$$

Supongase que X verifica que si una sucesión no decreciente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x\in X$, entonces $x_n\leq x$ para todo $n\in\mathbb{N}$, o que f sea continua.

Además, si

$$\textit{para cada } x, y \in X \textit{ existe } z \in X \textit{ que es comparable con } x \textit{ e } y \tag{2.19}$$

entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración. Primero mostraremos que f tiene un punto fijo. Ya que $x_0 \leq f(x_0)$ y f es una función no decreciente, obtenemos por inducción que

$$x_0 \leq f(x_0) \leq f^2(x_0) \leq f^3(x_0) \leq \cdots \leq f^n(x_0) \leq f^{n+1}(x_0) \leq \cdots$$

Colocamos $x_n = f^n(x_0) \leq f^{n+1}(x_0) = x_{n+1}$, y esto es $x_n \leq x_{n+1}$.
Entonces x_n y x_{n+1} son comparables para cada $n \in N$ de (2.18) tenemos

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) &= d(f^{n+1}(x_0), f^{n+2}(x_0)) \\ &= d(f(f^n(x_0)), f(f^{n+1}(x_0))) \\ &= d(f(x_n), f(x_{n+1})) \\ &\leq \beta(d(x_n, x_{n+1}))d(x_n, x_{n+1}) \leq d(x_n, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

Se tiene $d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq d(x_n, x_{n+1}$.
Entonces $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r \geq 0$. Asumir $r > 0$ entonces de (2.20) tenemos

$$\frac{d(x_{n+1}, x_{n+2})}{d(x_n, x_{n+1})} \leq \beta(d(x_n, x_{n+1})) \leq 1 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

De lo anterior, si tomamos $n \to \infty$
Entonces $1 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \beta(d(x_n, x_{n+1})) \leq 1$ por consiguiente $\lim\limits_{n\to\infty} \beta(d(x_n, x_{n+1})) = 1$ y además $\beta \in \mathscr{S}$
entonces

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = r = 0$$

Ahora mostraremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, es una sucesión de Cauchy. Asumamos lo contrario, es decir

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup d(x_n, x_m) > 0 \tag{2.21}$$

Por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m) + \beta(d(x_n, x_m))d(x_n, x_m) \end{aligned}$$

de lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) - \beta(d(x_n, x_m))d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \\ (1 - \beta(d(x_n, x_m)))d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$d(x_n, x_m) \leq (1 - \beta(d(x_n, x_m)))^{-1}[d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{m+1}, x_m)]$$

ya que $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sup d(x_n, x_m) > 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$
entonces

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup(1 - \beta(d(x_n, x_m)))^{-1} = \infty$$

entonces

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup(1 - \beta(d(x_n, x_m))) = 0$$

entonces

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup \beta(d(x_n, x_m)) = 1$$

pero además $\beta \in \mathscr{S}$, entonces $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sup d(x_n, x_m) = 0$. Esto es una contradicción de (2.21)

Esto implica que $\{x_n\}$ es una secuencia de Cauchy en X. Como (X, d) es un espacio métrico completo, entonces existe un $z \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$

Como f es continua tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f(f^n(x_0)) \\ &= \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= z \end{aligned}$$

entonces z es un punto fijo de f

Ahora mostraremos la unicidad de punto fijo:

Sea y otro punto fijo de f. De (2.19) existe $x \in X$ que es comparable con y y z.

Por monotonía implica que $f^n(x)$ es comparable a $f^n(y) = y$ y $f^n(z) = z$ para $n \in \mathbb{N}$ por otra parte

$$\begin{aligned} d(z, f^n(x)) &= d(f^n(z), f^n(x)) \\ &= d(f(f^{n-1}(z)), f(f^{n-1}(x))) \\ &\leq \beta(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x)))d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x)) \\ &\leq d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x)) \ = \ d(z, f^{n-1}(x)) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Colocamos $\gamma_n = d(z, f^n(x))$

En consecuencia la sucesión γ_n es decreciente y no negativo, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma > 0$

Ahora mostraremos que $\gamma = 0$. Asumamos contrario, es decir que $\gamma > 0$ pasando a subsucesión, si es necesario, se puede suponer que $\lim\limits_{n\to\infty} \beta(\gamma_n) = \lambda$ existe, esto implicará

$$\begin{aligned} \lambda\gamma &= \lim_{n\to\infty} \beta(\gamma_n) \cdot \lim_{n\to\infty} \gamma_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \beta(\gamma_n).\gamma_n \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \beta(d(z, f^n(x))).d(z, f^n(x)) \\ &\geq \lim_{n\longrightarrow\infty} d(f(z), f^{n+1}(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \gamma_{n+1} \ = \ \gamma \end{aligned}$$

entonces

$$\lambda\gamma \geq \gamma$$

Por otro lado

$$\lambda\gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n\beta(\gamma_n) \leq \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$$

entonces $\lambda\gamma = \gamma$ entonces $\lambda = 1$ y además $\beta \in \mathscr{S}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} d(z, f^n(x)) = 0$, esto es una contradicción, lo cual demuestra que $\gamma = 0$

de manera análoga se puede mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(y, f^n(x)) = 0$

Finalmente por la desigualdad triangular

$$d(z, y) \leq d(z, f^n(x)) + d(f^n(x), y)$$

si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ $d(z, y) \leq 0$, Entonces $d(z, y) = 0$

Por lo tanto

$$z = y$$

Se concluye que z es único. □

Lema 2.1. Si ψ es una función de distancia alternante y $\phi : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ es una función continua con la condición $\psi(t) > \phi(t)$ para todo $t > 0$, entonces $\phi(0) = 0$

Demostración. Ya que $\phi(t) < \psi(t)$ y $\phi(t)$ y ϕ, ψ son continuas tenemos

$$0 \leq \phi(0) = \lim_{t \to 0} \phi(t) \leq \lim_{t \to 0} \psi(t) = \psi(0) = 0$$

es decir

$$\phi(0) = 0$$

la prueba termina □

Bajo ciertas hipótesis, se puede extender los resultados expuestos anteriormente y obtener un nuevo principio de contracción sobre los espacios métricos parcialmente ordenados. En lo que sigue, mostramos los siguientes teoremas, que de alguna forma extienden los teoremas 2.2-2.4 .

Teorema 2.5. *Sea X un conjunto parcialmente ordenado y supongamos que existe una métrica d en X tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación continua no decreciente tal que*

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \phi(d(x, y)) \quad \textit{para todo } x \geq y \tag{2.23}$$

donde ψ es una función de distancia alternante y $\phi : [0, \infty[\longrightarrow [0, \infty[$ es una función continua con la condición $\psi(t) > \phi(t)$ para todo $t > 0$. Si existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \leq f x_0$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Puesto que f es una función no decreciente, se obtiene, por inducción, que

$$x_0 \leq f(x_0) \leq f^2(x_0) \leq f^3(x_0) \leq \cdots \leq f^n(x_0) \leq f^{n+1}(x_0) \cdots$$

Colocamos $x_{n+1} = fx_n$ para cada $n \geq 1$

$$x_n = f(x_{n-1}) \leq f^2(x_{n-1}) = f(x_n) = x_{n+1}$$

y esto es $x_n \leq x_{n+1}$entonces x_n y x_{n+1} son comparables

Por otro lado de (2.23) tenemos

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n+1}, x_n)) &= \psi(d(f(x_n), f(x_{n-1})) \\ &\leq \phi(d(x_n, x_{n-1})) < \psi(d(x_n, x_{n-1})) \end{aligned} \tag{2.24}$$

entonces $\psi(d(x_{n+1}, x_n)) < \psi(d(x_n, x_{n-1}))$

De lo anterior y como ψ es no decreciente, tenemos que: $d(x_{n+1}, x_n) < d(x_n, x_{n-1})$. Por lo tanto, la sucesión $d(x_{n+1}, x_n)$ es decreciente, esto implica que existe $r \geq 0$ tal que

$$d(x_{n+1}, x_n) \longrightarrow r, \quad \text{cuando } n \to \infty \tag{2.25}$$

Si tomamos $n \to \infty$ en (2.24) tenemos que

$$\psi(r) \leq \phi(r)$$

Entonces usando el lema 2.1 tenemos que $r = 0$

Por lo tanto

$$d(x_{n+1}, x_n) \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \longrightarrow \infty \tag{2.26}$$

En lo que sigue vamos a demostrar que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Supongamos que $\{x_n\}$ no es una sucesión de cauchy entonces, existe $\epsilon > 0$ para el cual podemos encontrar subsucesión $\{x_{n(k)}\}$ y $x_{m(k)}$ con $n(k) > m(k) > k$ tal que

$$d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \epsilon \text{ para todo } k \geq 1 \tag{2.27}$$

Además, correspondiente a $m(k)$, podemos elegir $n(k)$ de una manera tal que es el entero más pequeño con $n(k) > m(k)$ satisfaciendo (2.27) entonces

$$d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) < \epsilon \tag{2.28}$$

de (2.27) y (2.28), y la desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned} \epsilon \leq d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) &\leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)}) \\ &< d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + \epsilon \end{aligned}$$

Si tomamos $k \longrightarrow \infty$ y usando (2.26), tenemos que

$$\epsilon \leq \lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \leq \epsilon$$

entonces

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) = \epsilon \tag{2.29}$$

mediante el uso de la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned} d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) &\leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)-1}) + d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{m(k)}) \\ d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) &\leq d(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}) + d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) + d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) \end{aligned}$$

tomando $k \to \infty$ en las dos desigualdades anteriores y usar (2.26) y (2.29), tenemos que

$$\epsilon \leq \lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})$$

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) \leq \epsilon$$

Esto implica que

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1}) = \epsilon \tag{2.30}$$

como $n(k) > m(k)$ y $x_{n(k)-1}$ y $x_{m(k)-1}$ son comparables, tenemos

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n(k)}, x_{m(k)})) &= \psi(d(f(x_{n(k)-1}), f(x_{m(k)-1}))) \\ &\leq \phi(d(x_{n(k)-1}, x_{m(k)-1})) \end{aligned}$$

Si tomamos $k \longrightarrow \infty$ y usando (2.29) y (2.30) tenemos que

$$\psi(\epsilon) \leq \phi(\epsilon)$$

Entonces por el Lema 2.1 tenemos que $\epsilon = 0$. Este hecho es una contradicción, la cual viene de haber supuesto que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy. Por lo tanto la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Por otro lado, como X es un espacio métrico completo, entonces existe $z \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = z$$

Como f es continua entonces

$$fz = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = z$$

Esto prueba que z es un punto fijo. $\square$

Ahora, probaremos que el teorema 2.5, sigue siendo válido para una función f no es necesariamente continua, asumiendo la siguiente hipótesis sobre X.

Observación 2.1. Si (x_n) es una sucesión no decreciente en X tal que $x_n \to x$ entonces

$$x_n \leq x \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \tag{2.31}$$

Teorema 2.6. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supongamos que exista una métrica d en X tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Supóngase que X verifica que si una sucesión no decreciente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in X$, entonce $x_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*
Sea $f : X \longrightarrow X$ una aplicación no decreciente tal que

$$\psi(d(f(x), f(y))) \leq \phi(d(x, y)), \quad \textit{para todo } x \geq y$$

donde ψ es una función de distancia alternante y $\phi : [0, \infty > \longrightarrow [0, \infty >$ es una función continua con la condición $\psi(t) > \phi(t)$ para todo $t > 0$ si existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \leq f(x_0)$, entonces f tiene un punto fijo.

Demostración. Después de la demostración del teorema anterior. Solo queda comprobar que $f(z) = z$.
Como $\{x_n\}$ es una sucesión en X y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$, la condición (2.31) nos da que $x_n \leq z$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia

$$\begin{aligned} \psi(d(x_{n+1}, f(z))) &= \psi(d(f(x_n), f(z))) \\ &\leq \phi(d(x_n, z)) \end{aligned}$$

Si tomamos $n \to \infty$, tenemos que

$$0 \leq \psi(d(z, f(z))) \leq \phi(d(z, z)) = \phi(0)$$

Usando el Lema 2.1, tenemos que $\phi(0) = 0$ lo que implica que $\psi(d(z, f(z))) = 0$
Como ψ es una función de distancia alternante, tenemos que

$$d(z, f(z)) = 0$$

y como d es una métrica tenemos que

$$f(z) = z$$

La prueba termina $\square$

En el siguiente ejemplo se muestra que la hipótesis en el teorema 2.5 y teorema 2.6 no garantiza la unicidad del punto fijo.

Ejemplo 2.2.

Sea $X = \{(1,0),(0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ y considerar el orden habitual $(x,y) \leq (z,t) \iff x \leq z$ y $y \leq t$

Así definido X es un conjunto parcialmente ordenado cuyo elementos diferentes son comparables, es decir que los elementos en X solo son comparables así mismo.

Además, (X, d_2) es un espacio métrico completo y d_2 es la distancia euclidiana. La aplicación identidad $f(x,y) = (x,y)$ es trivialmente continua y no decreciente. Por la observación (2.1) sabemos que cualquier (x_n) sucesión no decreciente en X tal que $x_n \longrightarrow x$ entonces $x_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

por otro lado si consideramos $\varphi(t) = 2t$ una función distancia alternante y una función continua $\phi(t) = t$ se cumple que $\psi(t) > \phi(t)$ para todo $t > 0$.

Vamos a verificar la condición de la hipótesis de los teoremas (2.5) y (2.6)

$$\psi(d(f(x), f(y))) \geq \phi(d(x,y)), \ \textit{para todo } x \geq y.$$

$$\psi(d(x,y)) \geq \phi(d(x,y))$$

Sabemos que los elementos en X son comparables así mismo es decir $d(x,y) = 0$,

$$\psi(0) \geq \phi(0)$$

$$0 \geq 0$$

Por otro lado $(1,0) \leq (1,0) = f(1,0) \longrightarrow (1,0) \leq f(1,0)$.

Por los teoremas (2.5) y (2.6) garantiza la existencia, pero sabemos que f en X tiene dos puntos fijos que son $(1,0)$ y $(0,1)$.

Esto quiere decir que no garantiza la unicidad.

En lo que sigue, se da una condición suficiente para la unicidad del punto fijo en los teoremas 2.5 y 2.6. Esta condición es la siguiente:

$$\text{para } x, y \in X, \text{ existe un límite inferior o un límite superior} \tag{2.32}$$

en [17], se demuestra que la condición (2.32) es equivalente

$$\text{para } x, y \in X, \text{ existe } z \in X \text{ que es comparable a } x \text{ y } y \tag{2.33}$$

2.2 Unicidad de punto fijo

Proporcionaremos una condición suficiente para garantizar la unicidad del punto fijo en los teoremas 2.5 y 2.6.

Teorema 2.7. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supongamos que existe una métrica d en X, tal que (X, d) es un espacio métrico completo. Supóngase que X verifica que si una sucesión no decreciente $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in X$, entonces $x_n \leq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $f : X \leq\longrightarrow X$ una aplicación no decreciente*

$$\psi(d(f(x), f(y)) \leq \phi(d(x, y)), \textit{para todo } x \geq y$$

Donde ψ es una función de distancia alternante y $\phi : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ es una función continua con la condición $\psi(t) > \phi(t)$ para todo $t > 0$. Supóngase que para $x, y \in X$, existe $z \in X$ que es comparable a x e y. Si existe $x_0 \in X$ tal que $x_0 \leq f(x_0)$, entonces f tiene un único punto fijo.

Demostración. Supongamos que existe z, $y \in X$ que son puntos fijos. Se distinguen los dos casos siguientes

Caso 1: Si y es comparable a z, entonces $f^n(y) = y$ es comparable a $f^n(z) = z$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
\psi(d(z, y)) &= \psi(d(f^n(z), f^n(y))) \\
&= \psi(d(f(f^{n-1}(z)), f(f^{n-1}(y)))) \\
&\leq \phi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(y))) = \phi(d(z, y))
\end{aligned}$$

Usando la hipótesis del Teorema 2.7 tenemos

$$\psi(d(z,y)) \leq \phi(d(z,y))$$

Entonces por el Lema 2.1 tenemos que $\phi(d(z,y)) = 0$, si y solo si $d(z,y) = 0$ lo que implica que $z = y$

Caso 2: Si y no es comparable a z, entonces existe $x \in X$ comparable a y y z. Por monotonía de f implica que $f^n(x)$ es comparable a $f^n(y) = y$ y a $f^n(z) = z$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Por otra parte

$$\begin{aligned} \psi(d(z, f^n(x))) &= \psi(d(f^n(z), f^n(x))) = \psi(d(f(f^{n-1}(z)), f(f^{n-1}(x)))) \\ &\leq \phi(d(f^{n-1}(z), f^{n-1}(x))) = \phi(d(z, f^{n-1}(x))) \end{aligned}$$

por la condición $\psi(t) > \phi(t)$, para todo $t > 0$ tenemos

$$\psi(d(z, f^n(x))) \leq \phi(d(z, f^{n-1}(x))) < \psi(d(z, f^{n-1}(x))) \tag{2.34}$$

entonces

$$\psi(d(z, f^n(x))) < \psi(d(z, f^{n-1}(x)))$$

como ψ es una función no decreciente tenemos que

$$d(z, f^n(x)) < d(z, f^{n-1}(x))$$

esto nos da que $\{d(z, f^n(x))\}$ es una sucesión decreciente no negativa, y en consecuencia, existe γ tal que

$$\lim_{n\to\infty} d(z, f^n(x)) = \gamma$$

Si tomamos $n \to \infty$ en (2.34) y teniendo en cuenta que ψ y ϕ son funciones continuas, obtenemos

$$\varphi(\gamma) \leq \phi(\gamma) < \psi(\gamma)$$

en particular para $t = \gamma$ y por Lema 2.1 tenemos que $\phi(\gamma) = 0$ si y solo si $\gamma = 0$

Análogamente, podemos probar que

$$\lim_{n\to\infty} d(y, f^n(x)) = 0$$

Por lo tanto tenemos

$$\lim_{n\to\infty} d(z, f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} d(y, f^n(x)) = 0$$

Por la desigualdad triangular, tenemos

$$d(y, z) \leq d(y, f^n(x)) + d(f^n(x), z)$$

dejar que $n \to \infty$ en la desigualdad anterior obtenemos que

$$0 \leq d(y, z) \leq 0$$

Por lo tanto

$$d(y, z) = 0$$

Esto implica que

$$y = z$$

Por lo tanto f tiene un único punto fijo. $\square$

i) Una consecuencia del teorema 2.7, es que si $\overline{x}$ es el punto fijo de f, entonces para todo $x \in X$ se cumple que $\lim_{k\to\infty} f^k(x) = \overline{x}$ (convergencia global del método de aproximaciones sucesivas).

iii) En el teorema 2.3 si si consideramos $\psi(t) = t$, este resultado se reduce al teorema 2.2.

Capítulo 3:

Algunas aplicaciones

3.1 Ecuaciones Diferenciales

3.1.1 El problema de Cauchy para ecuaciones de primer orden

Sea una E.D.O. de primer orden $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, donde f es una función definida en un cierto dominio $D \subset \mathbb{R}^2$.

El problema de Cauchy (o de valor inicial) asociado a dicha ecuación consiste en hallar una solución y de la ecuación diferencial definida en un intervalo real que contenga al punto x_0 y que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$.

Generalmente, el problema de Cauchy se escribe de la forma abreviada.

$$\begin{cases} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Geométricamente, se puede interpretar el problema de Cauchy como la búsqueda de aquella curva perteneciente a la solución general de la E.D.O. que pasa por el punto (x_0, y_0)

Teorema 3.1. *Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en una región $D \subset \mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) \in D$, es solución del problema*

$$(P) : \begin{cases} x'(t) & = f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = x_0 \end{cases}$$

si, y sólo sí, x es una función continua en I que verifica la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \text{ para cada } t \in I. \tag{3.1}$$

Demostración. Supongamos que $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$, con gráfica contenida en I (así x' es continua en I) y, por tanto, integrable Riemann en cualquier subintervalo compacto de I. Por hipótesis $t_0 \in I$; de forma que cualquier $t \in I$ tenemos

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

y como $\displaystyle\int_{t_0}^{t} x'(s)ds = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0$, se obtiene que x verifica la ecuación integral (3.1).

Recíprocamente, supongamos que x es una función continua en I que verifica (3.1). Como vimos anteriormente la función $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $s \longmapsto g(s) = f(s, x(s))$ es continua en I y por el teorema fundamental del Cálculo, la función

$$h : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto h(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

es derivable en I (de hecho es de clase uno en I) y verifica que $h'(t) = g(t) = f(t, x(t))$ para cada $t \in$. Por tanto, x es derivable en I y verifica que $x'(t) = f(t, x(t))$ para cada $t \in I$. Por otra parte, es obvio que $x(t_0 = x_0)$. De esta manera $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución de (P).

□

Para cada $x \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ podemos considerar la función Tx definida por

$$t \mapsto Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Supuesto que Tx esté bien definida en el intervalo I (lo que requiere que la gráfica de x enté contenida en D), tendríamos un operador (aplicación) $T : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $x \mapsto Tx$, es decir, un punto fijo para T.

Definición 3.1. Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t,x) \mapsto f(t,x)$. Se dice que f es Lipschitziana en D respecto de la segunda variable x (o que satisface una condición de Lipschitz en D respecto a x) cuando existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \textit{ para cada par de puntos } (t,x),(t,y) \in D.$$

En tal caso se dice que L es una constante de Lipschitz para f en D respecto a la segunda variable.

3.1.2 El método de Picard-Lindelof

Sea $f : [t_0 - c, t_0 + c] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El problema de valores iniciales de Cauchy es el problema de encontrar una función $x : [t_0 - c, t_0 + c] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuamente derivable que satisfaga la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{cases} x'(t) & = f(t, x(t)) \quad t \in [t_0 - c, t_0 + c] \\ x(t_0) & = t_0 \end{cases}$$

El resultado clásico de Picard- Lindelof establece que si f es lipschitziana con respecto a la segunda variable, i.e., si existe $L > 0$ de forma que si para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y|, \quad \forall t \in [t_0 - c, t_0 + c]$$

entonces la ecuación anterior tiene una única solución.

Demostración. Consideremos el espacio de Banach $(C([t_0 - c, t_0 + c]), \|.\|_\infty)$. Sobre dicho espacio definimos la aplicación $F : C([t_0 - c, t_0 + c]) \longrightarrow C([t_0 - c, t_0 + c])$ donde a cada función $x \in C([t_0 - c, t_0 + c])$ le hacemos corresponder la función $F(x)$ definida de la siguiente forma:

$$F(x)(t) + p_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Es claro que si $x \in C([t_0 - c, t_0 + c])$, por el teorema fundamental del cálculo, se tiene que $F(x) \in C([t_0 - c, t_0 + c])$. Además, claramente una solución del problema de Cauchy

será un punto fijo de dicha aplicación.

Observar que si, $y \in C([t_0 - c, t_0 + c])$, entonces

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \leq$$

$$|\int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|ds| \leq |\int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)|ds| \leq L|t - t_0|\|x - y\|_\infty.$$

Ahora, teniendo presente la definición de la norma $\|.\|_\infty$ se concluye:

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq L2c\|x - y\|_\infty$$

Esta última expresión nos dice que la aplicación F es lipschitziana con constante de Lipschitz $k(F) \leq L2c$.

Consideremos ahora la aplicación $F^2 := F \circ F : C([t_0 - c, t_0 + c]) \longrightarrow C([t_0 - c, t_0 + c])$ y cuando el mismo razonamiento que antes, se tiene:

$$|F^2(x)(t) - F^2(y)(t)| \leq |\int_{t_0}^{t} |f(s, F(x)(s)) - f(s, F(y)(s))|ds| \leq$$

$$|\int_{t_0}^{t} L|F(x)(s) - F(y)(s)|ds| \leq |\int_{t_0}^{t} L|\int_{t_0}^{s} L|x(u) - y(u)|du|ds| \leq$$

$$L^2\|x - y\|_\infty|\int_{t_0}^{t} |s - t_0|ds| = L^2\frac{|t - t_0|^2}{2}\|x - y\|_\infty$$

Por lo tanto,

$$\|F^2(x) - F^2(y)\|_\infty \leq \frac{(2cL)^2}{2}\|x - y\|_\infty.$$

Repitiendo este proceso inductivamente se obtiene que

$$\|F^n(x) - F^n(y)\|_\infty \leq \frac{(2cL)^n}{n!}\|x - y\|_\infty.$$

Por otra parte, como $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \frac{(2cL)^n}{n!} = 0$. Entonces existirá una iterada de F la cual será contractiva, digamos F^{n_0}. Aplicando el principio de Banach a dicha iterada se tendrá: existe una única $x_0 \in C([t_0 - c, t_0 + c])$ de forma que $F^{n_0}x_0 = x_0$. Veamos ahora que x_0 también es un punto fijo de F. En caso contrario, tenemos:

$$\|F(x_0) - x_0\|_\infty = \|F^{n_0+1}(x_0) - F^{n_0}(x_0)\|_\infty \leq (F^{n_0})\|F(x_0) - x_0\|_\infty$$

Lo cual es una contradicción con el hecho de que F^{n_0} es contractiva y por lo tanto $k(F^{n_0}) < 1$. $\square$

La unicidad es consecuencia del Teorema de Banach:

En efecto, supongamos que y_1 es otra solución del problema. Entonces se debe cumplir que $F(y_1) = y_1$. Por lo tanto, y_1 es un punto fijo de F^{n_0}, que es una aplicación contractiva. El Teorema de Banach nos dice F^{n_0} sólamente tiene un punto fijo, con lo cual $y_1 = x_0$.

3.2 Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección se presentan dos ejemplos en los que muestran que los teoremas (2.6) y (2.7) del capítulo anterior se pueden aplicar a la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejemplo 3.1. Este ejemplo estudiaremos la existencia de una solución para el siguiente problema periódico de primer orden:

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in [0, T] \\ u(0) = u(T) \end{cases} \tag{3.2}$$

donde $T > 0$ y $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua

Este problema ha sido abordado en la literatura por diferentes autores en el contexto de las EDO's, usando diferentes resultados de punto fijo con la finalidad de garantizar la existencia y unicidad de solución. Recientemente J. Harjani y K. Sadarangami en [7] resolvieron este tipo de problemas a través de resultados de punto fijo de funciones débilmente contractivas.

Observación 3.1. Anteriormente, hemos considerado al espacio $C(I)(I = [0, T])$ de funciones continuas definidas sobre I. Obviamente, este espacio con la métrica dada por

$$d(x, y) = \sup\{|x(t) - y(t)| : t \in I\}$$

para $x, y \in C(I)$ es un espacio métrico completo

Observación 3.2. $C(I)$ se puede dotar con un orden parcial dado por

$$x, y \in C(I),\, x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x(t) \leq y(t), \quad \text{para } t \in I$$

Claramente $(C(I), \leq)$ satisface la ecuación (2.32), ya que para $x, y \in C(I)$ las funciones $\text{máx}\{x, y\}$ y $\text{mín}\{x, y\}$ son las cotas superior e inferior de x, y respectivamente

Observación 3.3. En [17] se muestra que $(C(I), \leq)$ con la observación 3.2 satisface las condiciones métricas (2.31).

Ahora, damos la siguiente definición

Definición 3.2. Una solución inferior para (3.2) es una función $\alpha \in C^{(1)}(I)$ tal que

$$\begin{cases} \alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)) & \text{para } t \in I \\ \alpha(0) \leq \alpha(T) \end{cases}$$

Teorema 3.2. *Considere el problema (3.2). Con $f : I \times R \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, y supongamos que existen λ, $\alpha > 0$ con*

$$\alpha \leq \left(\frac{2\lambda(e^{\lambda T} - 1)}{T(e^{\lambda T} + 1)} \right)^{1/2}$$

tal que para $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \geq y$

$$0 \leq f(t, x) + \lambda x - [f(t, x) + \lambda y] \leq \alpha \sqrt{\ln[(x - y)^2 + 1]}$$

entonces la existencia de una solución inferior para (3.2) proporciona la existencia de una única solución (3.2)

Demostración. El problema (3.2) se puede escribir como

$$\begin{cases} u'(t) + \lambda u(t) = f(t, u(t)) + \lambda u(t), & \text{para } t \in I = [0, T] \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

Este problema es equivalente a la ecuación integral

$$u(t) = \int_0^T G(t, s)[f(s, u(s)) + \lambda u(s)]ds$$

donde $G(t,s)$ es la función de Green dada por

$$\begin{cases} \dfrac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}, & 0 \leq s \leq t \leq T \\ \dfrac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}, & 0 \leq t \leq s \leq T \end{cases}$$

Definamos $F : C(I) \longrightarrow C(I)$ por

$$F(u(t)) = \int_0^T G(t,s)[f(s,u(s)) + \lambda u(s)]ds$$

tenga en cuenta que si $u \in C(I)$ es un punto fijo de F, entonces $u \in C^1(I)$ es una solución de 3.2

En lo que sigue, las observaciones (3.2) y (3.3) prueban la hipótesis de los teoremas (2.6) y (2.7).

Por otro lado, probaremos que F es no decreciente. Para $u \geq v$

Usando nuestras hipótesis, podemos obtener

$$f(t,u) + \lambda u \geq f(t,v) + \lambda v$$

lo que implica, desde $G(t,s) > 0$ para $t \in I$

$$\begin{aligned} F(u(t)) &= \int_0^T G(t,s)[f(s,u(s)) + \lambda u(s)]ds \\ &\geq \int_0^T G(t,s)[f(s,v(s)) + \lambda v(s)]ds \\ &= F(v(t)) \end{aligned}$$

lo que implica que $F(u(t)) \geq F(v(t))$, para $t \in I$.

Por otro lado, para $u \geq v$ tenemos

$$\begin{aligned} d(Fu,Fv) &= \sup_{t\in I} |F(u(t)) - F(v(t))| \\ &= \sup_{t\in I}(F(u(t)) - F(v(t))) \\ &= \sup_{t\in I}[\int_0^T G(t,s)[f(s,u(s)) + \lambda u(s)]ds - \int_0^T G(t,s)[f(s,v(s)) + \lambda v(s)]ds] \\ &= \sup_{t\in I}[\int_0^T G(t,s)\underbrace{[f(s,u(s)) + \lambda u(s) - (f(s,v(s)) + \lambda v(s))]}ds] \\ &\leq \sup_{t\in I}\int_0^1 G(t,s)\alpha\sqrt{\ln[(u(s)-v(s))^2+1]} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la ultima integral, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^T G(t,s)\alpha\sqrt{\ln[(u(s)-v(s))^2+1]}ds &\leq \left(\int_0^T G(t,s)^2ds\right)^{1/2}\left(\int_0^T\left(\alpha\sqrt{\ln[(u(s)-v(s))^2+1]}\right)^2ds\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_0^T G(t,s)^2ds\right)^{1/2}\left(\int_0^T \alpha^2\ln[(u(s)-v(s))^2+1]ds\right)^{1/2} \quad (3.4)\end{aligned}$$

La primera integral nos resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T G(t,s)^2ds &= \int_0^t G(t,s)^2ds+\int_t^T G(t,s)^2ds\\ &= \underbrace{\int_0^t \frac{e^{2\lambda(T+s-t)}}{(e^{\lambda T}-1)^2}ds}_{(I)}+\underbrace{\int_t^T \frac{e^{2\lambda(s-t)}}{(e^{\lambda T}-1)^2}ds}_{(II)}\end{aligned}$$

Para (I)			Para (II)		
v	$=$	$2\lambda(T+s-t)$	v_1	$=$	$2\lambda(s-t)$
dv	$=$	$2\lambda ds$	dv_1	$=$	$2\lambda ds$
ds	$=$	$\frac{1}{2\lambda}dv$	ds	$=$	$\frac{1}{2\lambda dv_1}$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^T G(s,t)^2ds &= \int_{2\lambda(T-t)}^{2\lambda T}\frac{e^v}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)^2}dv+\int_0^{2\lambda(T-t)}\frac{e^{v_1}}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)^2}dv_1\\ &= \frac{1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)^2}\int_{2\lambda(T-t)}^{2\lambda T}e^v dv+\frac{1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)^2}\int_0^{2\lambda(T-t)}e^{v_1}dv_1\\ &= \frac{1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)^2}\left[e^v\Big|_{2\lambda(T-t)}^{2\lambda T}+e^{v_1}\Big|_0^{2\lambda(T-t)}\right]\\ &= \frac{1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)^2}\left[e^{2\lambda T}-e^{2\lambda(T,t)}+e^{2\lambda(T,t)}-1\right]\\ &= \frac{1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)^2}(e^{2\lambda T}-1)\\ &= \frac{1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)^2}(e^{\lambda T}-1)(e^{\lambda T}+1)\\ &= \frac{e^{\lambda T}+1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_0^T G(t,s)^2ds = \frac{e^{\lambda t}+1}{2\lambda(e^{\lambda T}-1)} \quad (3.5)$$

Por otro lado $u(s) - v(s) \leq ||u - v||$ esto implica

$$(u(s) - v(s))^2 \leq \|u - v\|^2$$

entonces

$$(u(s) - v(s))^2 + 1 \leq \|u - v\|^2 + 1$$

Por consiguiente

$$\ln((u(s) - v(s))^2 + 1) \leq \ln(\|u - v\|^2 + 1)$$

Por la segunda integral (3.4) y lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \alpha^2 \ln[(u(s) - v(s))^2 + 1]ds &\leq \int_0^T \alpha^2 \ln(\|u - v\|^2 + 1)ds \\ &= \alpha^2 \ln(\|u - v\|^2 + 1) \int_0^T ds \\ &= \alpha^2 \ln(\|u - v\|^2 + 1)T \\ &= \alpha^2 \ln(d(u, v)^2 + 1)T \end{aligned} \tag{3.6}$$

teniendo en cuenta (3.3), (3.5) y (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} d(Fu, Fv) &\leq \sup_{t \in I} \left(\frac{e^{\lambda T} + 1}{2\lambda(e^{\lambda T} - 1)} \right)^{1/2} (\alpha^2 \ln[d(u, v)^2 + 1]T)^{1/2} \\ &= \left(\frac{e^{\lambda T} + 1}{2\lambda(e^{\lambda T} - 1)} \right)^{1/2} \alpha\sqrt{T}(\ln[d(u, v)^2 + 1])^{1/2} \end{aligned}$$

y de la ultima desigualdad, obtenemos

$$d(Fu, Fv)^2 \leq \frac{e^{\lambda T} + 1}{2\lambda(e^{\lambda T} - 1)} \alpha^2 T \ln[d(u, v)^2 + 1]$$

o de manera equivalente

$$2\lambda(e^{\lambda T} - 1)d(Fu, Fv)^2 \leq (e^{\lambda T} + 1)\alpha^2 T \ln[d(u, v)^2 + 1]$$

Por hipótesis tenemos que

$$\alpha \leq \left(\frac{2\lambda(e^{\lambda T} - 1)}{T(e^{\lambda T} + 1)} \right)^{1/2} \tag{3.7}$$

reemplazamos (3.7) en la última desigualdad

$$\begin{aligned}
2\lambda(e^{\lambda T}-1)d(Fu,Fv)^2 &\leq (e^{\lambda T}+1)\alpha^2\cdot T\ln[d(u,v)^2+1] \\
&\leq (e^{\lambda T}+1)\left[\left(\frac{2\lambda(e^{\lambda T}-1)}{T(e^{\lambda T}+1)}\right)^{1/2}\right]^2\cdot T\ln[d(u,v)^2+1] \\
&= (e^{\lambda T}+1)\frac{2\lambda(e^{\lambda T}-1)}{T(e^{\lambda T}+1)}\cdot T\ln[d(u,v)^2+1] \\
&= 2\lambda(e^{\lambda T}-1)\ln[d(u,v)^2+1]
\end{aligned}$$

de esto tenemos

$$2\lambda(e^{\lambda T}-1)d(Fu,Fv)^2 \leq 2\lambda(e^{\lambda T}-1)\ln[d(u,v)^2+1]$$

Por lo tanto

$$d(Fu,Fv)^2 \leq \ln[d(u,v)^2+1] \tag{3.8}$$

Colocamos $\psi(x)=x^2$ y $\phi(x)=\ln(x^2+1)$

Obviamente, ψ es una función de distancia alternante, $\psi(x)$ y $\phi(x)$ satisfacen la condición $\psi(x)>\phi(x)$ para $x>0$

De (3.8), obtenemos para $u\geq v$

$$\begin{aligned}
\psi(d(Fu,Fv)) &= d(Fu,Fv)^2 \\
&\leq \ln[d(u,v)^2+1] \\
&= \phi(d(u,v))
\end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\psi(d(Fu,Fv))\leq\phi(d(u,v))$$

Por ultimo, sea $\alpha(t)$ una solución inferior a (3.2)

Afirmamos que

$$\alpha\leq F(\alpha)$$

de hecho por hipótesis

$$\alpha'(t)\leq f(t,\alpha(t)) \quad \text{para } t\in I$$

esto es equivalente

$$\alpha'(t)+\lambda\alpha(t)\leq f(t,\alpha(t))+\lambda\alpha(t), \quad \text{para } t\in I$$

multiplicamos por $e^{\lambda t}$ a la desigualdad anterior

$$(\alpha'(t) + \lambda\alpha(t))e^{\lambda t} \leq (f(t, \alpha(t)) + \lambda\alpha(t))e^{\lambda t}, \quad \text{para } t \in I$$

entonces tenemos

$$\frac{d}{dt}(\alpha(t)e^{\lambda t}) \leq (f(t, \alpha(t)) + \lambda\alpha(t))e^{\lambda t} \quad \text{para } t \in I$$

integramos en la desigualdad anterior, y tenemos que

$$\alpha(t)e^{\lambda t} - \alpha(0) \leq \int_0^t (f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s))e^{\lambda s}ds \quad \text{para } t \in I$$

esto es equivalente a

$$\alpha(t)e^{\lambda t} \leq \alpha(0) + \int_0^t (f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s))e^{\lambda s}ds \quad \text{para } t \in I \tag{3.9}$$

Por hipótesis $\alpha(0) \leq \alpha(T)$ y multiplicamos por $e^{\lambda T}$ tenemos que

$$\alpha(0)e^{\lambda T} \leq \alpha(T)e^{\lambda T}$$

de (3.9) y de lo anterior tenemos

$$\alpha(0)e^{\lambda T} \leq \alpha(T)e^{\lambda T} \leq \alpha(0) + \int_0^T [f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]e^{\lambda s}ds$$

entonces de lo anterior tenemos

$$\alpha(0)(e^{\lambda T} - 1) \leq \int_0^T [f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]e^{\lambda s}ds$$

esto equivale a

$$\alpha(0) \leq \int_0^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T} - 1}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds$$

de lo anterior y (3.9) tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha(t)e^{\lambda t} &\leq \int_0^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T} - 1}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds + \int_0^t e^{\lambda s}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds \\
&= \int_0^t \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T} - 1}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T} - 1}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds \\
&\quad + \int_0^t e^{\lambda s}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds \\
&= \int_0^t \left(\frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T} - 1} + e^{\lambda s}\right)[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T} - 1}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds \\
&= \int_0^t \frac{e^{\lambda s} + e^{\lambda(T+s)} - e^{\lambda s}}{e^{\lambda T} - 1}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T} - 1}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds \\
&= \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s)}}{e^{\lambda T} - 1}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T} - 1}[f(s, \alpha(s)) + \lambda\alpha(s)]ds
\end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\alpha(t)e^{\lambda t} \leq \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s)}}{e^{\lambda T}-1}[f(s,\alpha(s))+\lambda\alpha(s)]ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T}-1}[f(s,\alpha(s))+\lambda\alpha(s)]ds$$

de lo anterior es equivalente

$$\begin{aligned}\alpha(t) &\leq e^{-\lambda t}\left[\int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s)}}{e^{\lambda T}-1}[f(s,\alpha(s))+\lambda\alpha(s)]ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda s}}{e^{\lambda T}-1}[f(s,\alpha(s))+\lambda\alpha(s)]ds\right]\\ &= \int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}[f(s,\alpha(s))+\lambda\alpha(s)]ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}[f(s,\alpha(s))+\lambda\alpha(s)]ds\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\alpha(t) &\leq \underbrace{\int_0^t \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}[f(s,\alpha(s))+\lambda\alpha(s)]ds + \int_t^T \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}[f(s,\alpha(s))+\lambda\alpha(s)]ds}\\ &= \int_0^T G(t,s)[f(s,\alpha(s))+\lambda\alpha(s)]ds\\ &= F(\alpha(t)) \quad \text{para } t\in I\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\alpha \leq F(\alpha)$$

Por ultimo los teoremas (2.6) y (2.7) dan que F tiene un único punto fijo.

Por lo tanto tiene una única solución para (3.2) □

Ejemplo 3.2. Sea la ecuación diferencial de 2do orden

$$\begin{cases} -\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,x), x\in[0,\infty),\ t\in[0,1]\\ x(0)=x(1)=0\end{cases} \tag{3.10}$$

Se sabe que si una función $x \in C^2[0,1]$ es una solución de (3.10). Esta solución es equivalente a la ecuación integral.

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds, \quad \text{para todo } t\in[0,1]$$

donde $G(t,s)$ es la función de Green dada por

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0\leq t\leq s\leq 1\\ s(1-t), & 0\leq s\leq t\leq 1\end{cases} \tag{3.11}$$

Teorema 3.3. *Considere el problema (3.10) con* $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty >$ *continua y no decreciente con respecto a la segunda variable, y supongamos que existe* $0 \leq \alpha \leq 8$ *tal que para* $x, y \in \mathbb{R}$ *con* $y \geq x$

$$f(t, y) - f(t, x) \leq \alpha \sqrt{\ln[(y - x)^2 + 1]} \tag{3.12}$$

Entonces el problema (3.10) tiene una solución única no negativa

Demostración. Considere el conjunto

$$P = \{x \in C[0, 1] : x(t) \geq 0\}$$

Obviamente, (P, d) con $d(x, y) = \sup\{|x(t) - y(t)| : t \in [0, 1]\}$ es un espacio métrico completo.

Considere el operador $T : P \longrightarrow P$ dado por

$$T(x(t)) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad \text{para } x \in P$$

donde $G(t, s)$ es la función de Green que aparece en (3.11)

Probaremos que T es un operador no decreciente.

Como f es no decreciente con respecto a la segunda variable, entonces para $x, y \in P$ con $y \geq x$ y $t \in [0, 1]$ tenemos

$$T(y(t)) = \int_0^1 G(t, s) f(s, y(s)) ds \geq \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds \; = \; T(x(t))$$

entonces

$$T(y(t)) \geq T(x(t)) \tag{3.13}$$

Por lo tanto T es un operador no decreciente

Además para $y \geq x$

$$\begin{aligned} d(Ty, Tx) &= \sup_{t \in [0,1]} |(Ty)(t) - (Tx)(t)| \\ &= \sup_{t \in [0,1]} |T(y(t)) - T(x(t))| \end{aligned}$$

de (3.13) tenemos que:

$$\begin{aligned} d(Ty,Tx) &= \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 (T(y(t)) - T(x(t)) \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \left(\int_0^1 G(t,s)(f(s,y(s))ds - \int_0^1 G(t,s)f(x,x(s)))ds \right) \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)(f(s,y(s)) - f(x,x(s)))ds \end{aligned}$$

reemplazamos (3.12) en la ecuación anterior, tenemos que

$$d(Ty,Tx) \leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\alpha\sqrt{\ln[(y(s)-x(s))^2+1]}ds \tag{3.14}$$

Como $y - x \leq \|y - x\|$

Entonces

$$(y-x)^2 \leq \|y-x\|^2$$

entonce

$$(y-x)^2 + 1 \leq \|y-x\|^2 + 1$$

esto implica que

$$\ln[(y-x)^2+1] \leq \ln[\|y-x\|^2+1] \tag{3.15}$$

reemplazamos (3.15) en (3.14) y obtenemos que

$$\begin{aligned} d(Ty,Tx) &\leq \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)\alpha\sqrt{\ln[||y-x||^2+1]}ds \\ &= \alpha\sqrt{\ln[||y-x||^2+1]} \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds \\ d(Ty,Tx) &\leq \alpha\sqrt{\ln[||y-x||^2+1]} \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds \end{aligned} \tag{3.16}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_0^1 G(t,s)ds &= \int_0^t G(t,s)ds + \int_t^1 G(t,s)ds \\
&= \int_0^t s(1-t)ds + \int_t^1 (1-s)ds \\
&= (1-t)\int_0^t sds + t\int_t^1 (1-s)ds \\
&= (1-t)\frac{s^2}{2}\bigg|_0^t + t\left(s-\frac{s^2}{2}\right)\bigg|_t^1 \\
&= (1-t)\frac{t^2}{2} + t\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\right] \\
&= \frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{2}+t\left[\frac{1}{2}-t+\frac{t^2}{2}\right] \\
&= \frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{2}+\frac{t}{2}-t^2+\frac{t^3}{2} \\
&= \frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

entonces

$$\int_0^1 G(t,s)ds = \frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)ds &= \operatorname*{máx}_{t\in[0,1]}\left\{\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

entonces

$$\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)ds = \frac{1}{8}$$

de lo anterior y la desigualdad (3.16) y la hipótesis $0 \leq \alpha \leq 8$ nos da

$$\begin{aligned}
d(Ty,Tx) &\leq \frac{\alpha}{8}\sqrt{\ln[d(x,y)^2+1]} \\
&\leq \sqrt{\ln[d(x,y)^2+1]}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$d(Ty,Tx)^2 \leq \ln[d(x,y)^2+1] \tag{3.17}$$

Considere $\psi(x) = x^2$, $\phi(x) = \ln(x^2+1)$, obviamente, ψ es una función de distancia alternantes, ψ y ϕ satisfacen la condición $\psi(x) > \phi(x)$ para $x > 0$

De (3.17) tenemos que

$$\begin{aligned} \psi(d(Tx,Ty)) &= d(Tx,Ty)^2 \\ &\leq ln[d(x,y)^2+1] \\ &= \phi(d(x,y)) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\psi(d(Tx,Ty)) \leq \phi(d(x,y))$$

Finalmente, como f y G son funciones no negativas

$$T(0) = \int_0^1 G(t,s)f(s,0)ds \geq 0$$

Por lo tanto por los teoremas (2.6) y (2.7) nos dice que T tiene una única solución no negativa $\square$

Conclusiones

1. En los espacios métricos completos toda aplicación débilmente contractiva tiene un único punto fijo.

2. En los espacios métricos completos parcialmente ordenados X, toda función $f : X \longrightarrow X$ débilmente contractiva continua y no decreciente para la cual existe x_0 en X con $x_0 \leq f(x_0)$, tiene un punto fijo.

3. Sobre los espacios métricos completos dotados de un orden parcial, es posible demostrar la existencia y unicidad para funciones no decrecientes que no necesariamente son continuas, bajo ciertas hipótesis adicionales.

4. Cuando existe una solución inferior del problema

$$\begin{cases} u'(t) & = f(t, u(t)), \quad t \in [o, T] \\ u(0) & = u(T) \end{cases} \tag{3.18}$$

   donde $T > 0$ y $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.
   Es posible demostrar la existencia y unicidad de la solución de este problema usando las funciones de Green y resultados de puntos fijos para funciones débilmente contractivas bajo ciertas condiciones.

5. Cuando en el problema de segundo orden

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2x}{dx^2} & = f(t, x), \qquad x \in [0, \infty], \ t \in [0, 1] \\ \\ x(0) & = x(1) = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

se tiene que f una función continua y no decreciente respecto a la segunda variable, es posible demostrar que este problema tiene una solución única no negativa usando las funciones de Green y resultados de puntos fijos para funciones débilmente contractivas, bajo ciertas hipótesis adicionales.

Bibliografía

[1] **Amini-Harandi, Emami, H:** *A fixed point theorem for contraction type maps in partially ordered metric spaces and application to ordinary differential equations.* Nonlinear Anal. 72, 2238-2242 (2010)

[2] **Dhuta, P, Choudhury, B**,*A generalization of contractions in partially ordered metric spaces.* Anal.87, 109-116 (2008).

[3] **Harjani, J, Sadarangni, K:** *Fixed point theorems for weakly contraction mappings in partially ordered sets.* Nonlinear Arial. 71, 3403-3410 (2009).

[4] **Harjani, J, Sadarangni, K:** *Generalized contractions in partially ordered metric spaces and applications to ordinary differential equations.* Nonlinear Arial. 72, 1188-1197 (2010)

[5] **Khan, MS, Swaleh, M, Sessa, S:** *Fixed point theorems by altering distances between the points.* Aust. Math. Soc. 30(1), 1-9(1984)

[6] **Kreyszig, Erwin** *" Introductory functional analysis with aplications"*, Ed. McGraw-Hill, 1978

[7] **Nieto, JJ, Rodriguez-López, R:** *Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ardinary differential equations.* Acta Math. Sin. 23, 2205-2212(2007).

[8] **Rhoades, BE:** *Some theorems on weakly contractive maps.* Nonlinear Anal.47, 2683-2693 (2001)

[9] **Rudin Walter**, *“ Principles of Mathematical Analysis”*, Ed. McGraw-Hill, 1980

[10] **Rudin Walter**, *“ Introducción al análisis funcional”*, Ed. Reverte, 1979